МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

Численное исследование хаотической синхронизации двух взаимно связанных систем Лоренца

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 431 группы

Направления 09.03.02.«Информационные системы и технологии»
код и наименование направления

Факультета нелинейных процессов
наименование факультета

Давыдова Рината Адисовича
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

к.ф.-м.н., доцент		Д.В. Савин
должность, уч. ст., уч. зв.	личная подпись, дата	инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой

д.ф.-м.н., профессор		А.А. Короновский
должность, уч. ст., уч. зв.	личная подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2020

Введение

При изучении динамических систем очень важным моментом является переход к хаосу. В связанных системах с хаотической динамикой может наблюдаться явление синхронизации [1].

Явление хаотической синхронизации широко распространено в реальных системах, и потому имеет широкое практическое применение. Оно встречается в различных биологических, физиологических и химических задачах [1], в системах СВЧ электроники. Актуальность изучения этого явления для информационных систем и технологий обуславливается его применением в задачах скрытой передачи информации [2, 3].

Способы передачи информации с использованием хаотической синхронизации относятся к стеганографическим методам защиты информации [2]. Стеганографические методы в отличие от криптографических скрывают не содержимое тайного сообщения, а сам факт его передачи.

Наличие хаотической динамики тесно связано с неустойчивостью, присущей фазовым траекториям системы. В связи с этим при численном исследовании хаотических систем необходимо рассчитывать характеристики, связанные со скоростью расхождения близких траекторий, такие как ляпуновские характеристические показатели [4]. Их можно использовать, чтобы продемонстрировать зависимость свойств хаотического режима от значения параметра. Так, например, для квазигиперболических систем, таких, например, как система Лоренца, характерна слабая зависимость свойств хаотического режима и структуры хаотического аттрактора от параметров [5].

Целью данной работы является численное моделирование системы Лоренца и изучение синхронизации в таких системах со взаимной связью.

Бакалаврская работа содержит 22 страниц, приведённый список литературы включает 6 наименования.

Основная часть работы

В первом разделе приводится теоретическое описание диагностики динамического хаоса систем с помощью Ляпуновских показателей, а также полной и фазовой хаотических синхронизаций таких систем.

Динамический хаос – явление, которое характеризуется нерегулярным, похожим на случайный процесс, изменением динамических переменных во времени. Его можно наблюдать в системах нелинейных дифференциальных уравнений, например, в системе Лоренца:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy. \end{cases} \quad (1)$$

Обнаружить наличие хаотической динамики в системе могут помочь Ляпуновские показатели – величина, которая характеризует скорость изменения расстояния между двумя изначально близкими траекториями. Так как хаотический режим означает чувствительность динамической системы к изменениям начальных условий, то положительность значения старшего показателя Ляпунова является критерием хаоса.

Точное определение наличия хаотического режима в системе необходимо для исследования явления хаотической синхронизации двух связанных динамических систем. В данной работе исследовались полная и фазовая синхронизации.

Полное совпадение состояний двух систем называют полной синхронизацией.

Фазовая синхронизация двух связанных динамических систем означает, что происходит захват фаз хаотических сигналов, в то время как амплитуды этих сигналов остаются несвязанными между собой и выглядят хаотически.

Во втором разделе дипломной работы описываются результаты реализации теоретических сведений, описанных в первом разделе. В ходе выполнения бакалаврской работы была составлена программа, моделирующая систему Лоренца с помощью метода Рунге-Кутта четвертого порядка. Для этой системы был вычислен спектр показателей Ляпунова при разных значениях параметра r. Также было смоделировано поведение двух связанных систем Лоренца и исследовано возникновение полной и фазовой синхронизаций этих систем.

1. Вычисление спектра показателей Ляпунова

Программа численно решает систему Лоренца (1) и уравнения в вариациях:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(\tilde{y} - \tilde{x}), \\ \dot{y} = r\tilde{x} - \tilde{y} - x\tilde{z} - \tilde{x}z, \\ \dot{z} = -b\tilde{z} + x\tilde{y} + \tilde{x}y, \end{cases} \tag{2}$$

где $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ и $\tilde{z}$ – малые добавки.

Были построены график зависимости показателей Ляпунова от параметра r и фазовые траектории при разных значениях параметра r, для которых были рассчитаны ляпуновские показатели. По графику зависимости показателей Ляпунова от параметра r (рис.1) видно, что при увеличении параметра r растет старший показатель. Большую часть графика все ляпуновские показатели были отрицательными и только при $r \geq 24$ старший показатель становится больше нуля и появляется нулевой показатель.

По построенным фазовым траекториям (рис.2) видно, что отрицательным значениям показателя Ляпунова соответствует наличие в системе устойчивой неподвижной точки. В том случае, когда старший показатель Ляпунова положителен (рис. 3), можно наблюдать хаотический режим, так как видно, что траектории с двумя близкими начальными условиями не совпадают.

На графике также видно, что после того, как старший Ляпуновский показатель становится положительным, он больше не уходит в отрицательную зону. Это означает, что хаотический режим не сменяется периодическим, а является устойчивым в определённом интервале параметра, при этом значения ляпуновского показателя и структура аттрактора изменяются довольно слабо. Это свойство называются свойством структурной устойчивости, или грубости – оно, в частности, характерно для квазигиперболических систем, к которым относится система Лоренца, и может оказаться полезным при синхронизации хаотических колебаний в системах с неидентичными параметрами [5].

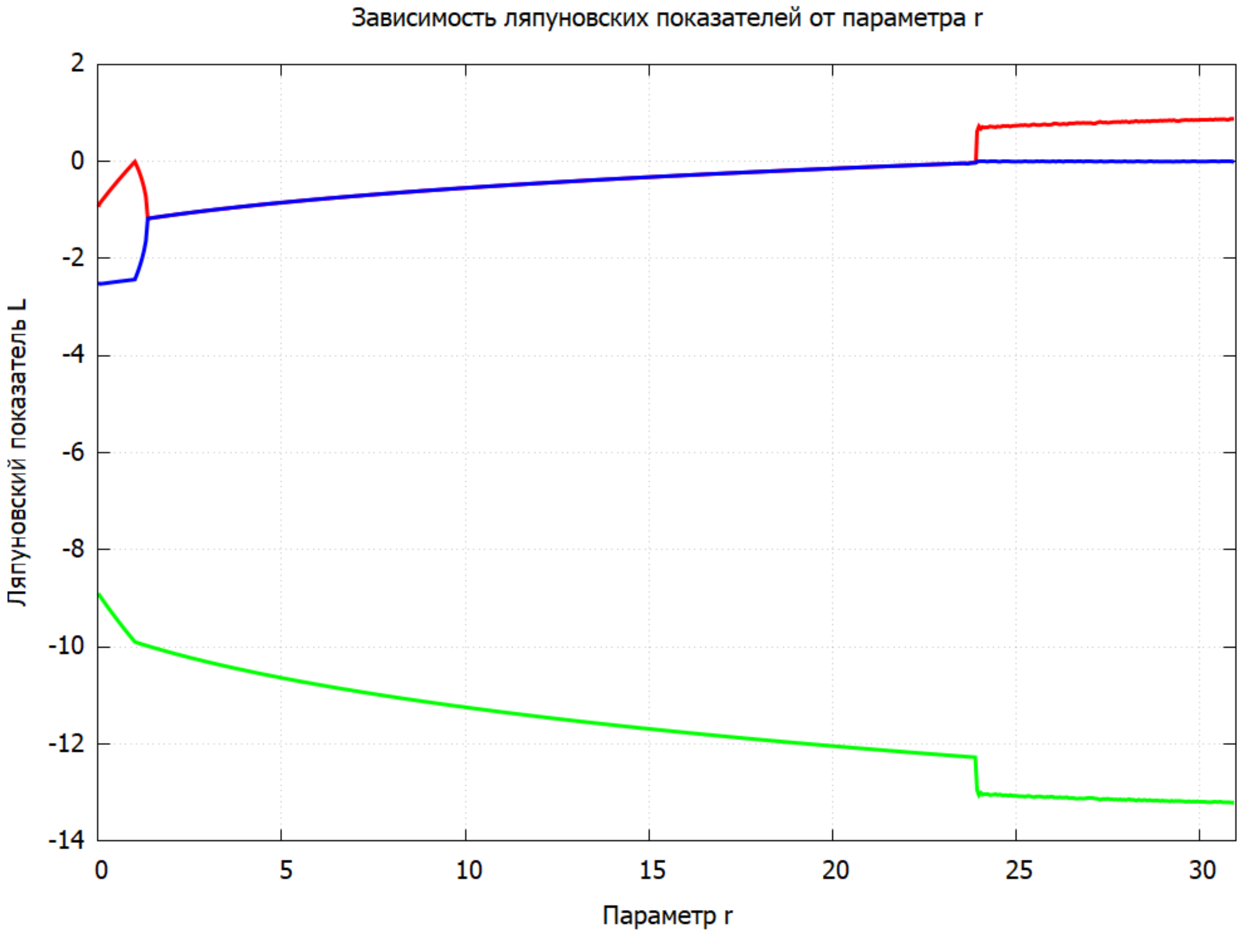


Рис.1. График зависимости ляпуновских показателей от параметра r. Красным цветом изображен старший ляпуновский показатель.

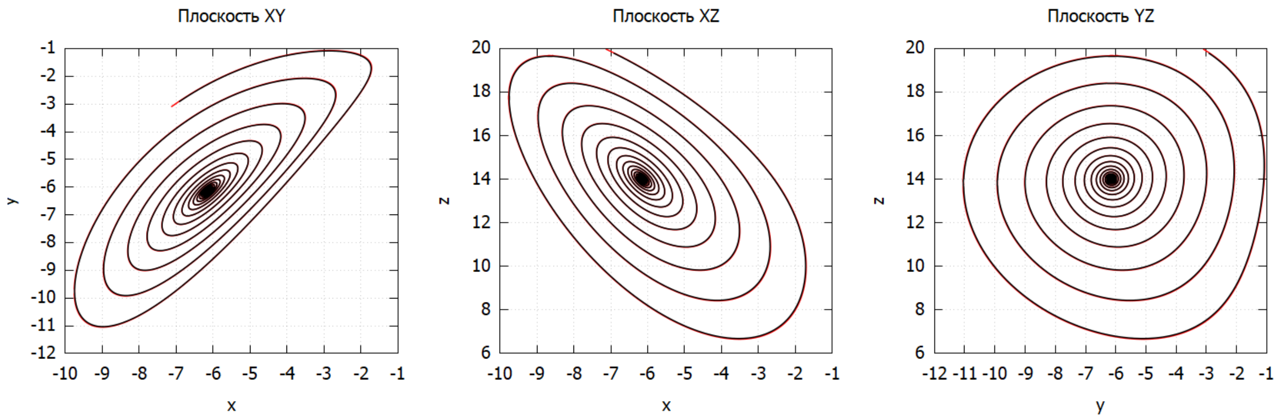


Рис.2. Фазовые траектории при значении параметра r = 15. Черным цветом изображена траектория с координатами начальной точки (1;1;1), красным - траектория с координатами начальной точки (1,01;1,01;1,01). Ляпуновские показатели равны $\Lambda_1 \approx -0{,}35$, $\Lambda_2 \approx -0{,}35$, $\Lambda_3 \approx -12{,}8$.

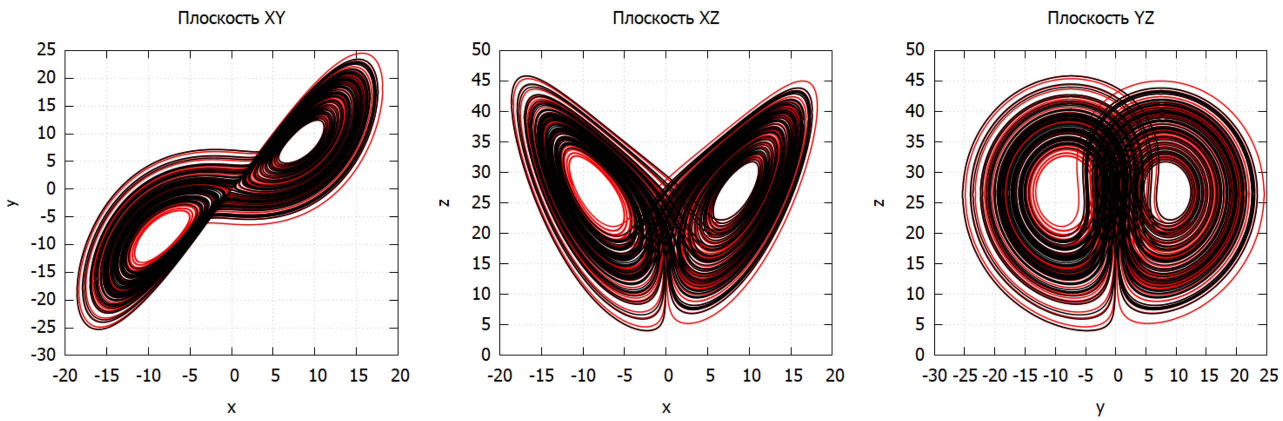


Рис.3. Фазовые траектории при значении параметра r = 28. Черным цветом изображена траектория с координатами начальной точки (1;1;1), красным - траектория с координатами начальной точки (1,01;1,01;1,01). Ляпуновские показатели равны $\Lambda_1 \approx 0{,}89$, $\Lambda_2 \approx 0$, $\Lambda_3 \approx -14{,}36$.

2. Исследование синхронизации двух связанных систем

Для исследования полной синхронизации была написана программа, которая численно решала две связанные системы Лоренца методом Рунге-Кутта четвертого порядка.

Были построены графики зависимости разности переменных $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2, z_1 - z_2$ от времени t. При значениях параметра связи $E < 0{,}46$ полной синхронизации не происходит (рис 4). В случае сильной связи (E ≥ 0,46) разность координат связанных систем достаточно быстро становится равной нулю и устанавливается полностью синхронное состояние (рис 5).

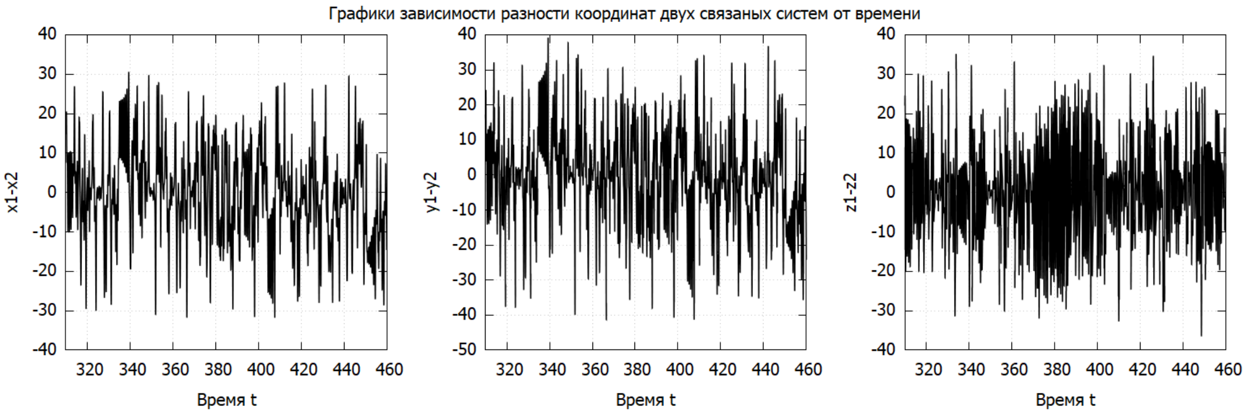


Рис.4. Зависимость разницы координат двух связанных систем $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2, z_1 - z_2$ от времени t при значении параметра связи $E = 0{,}1$.

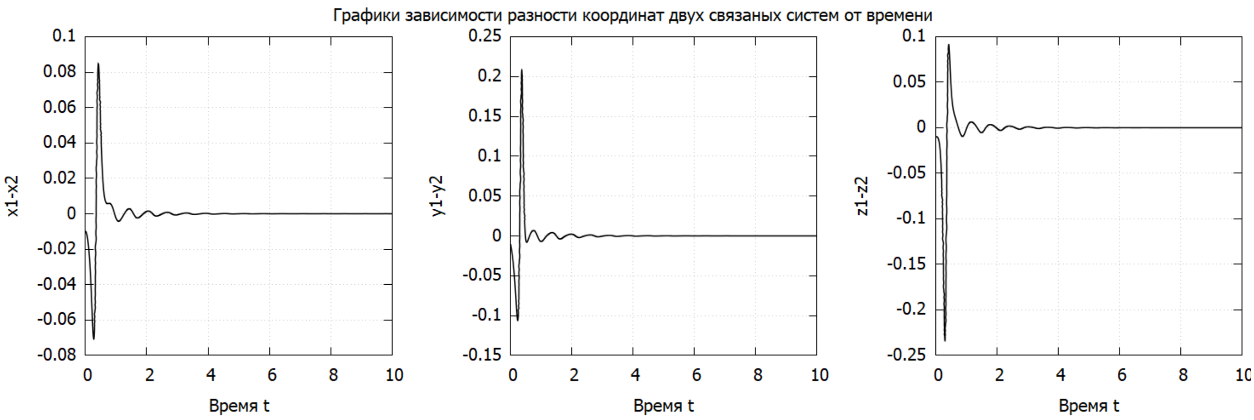
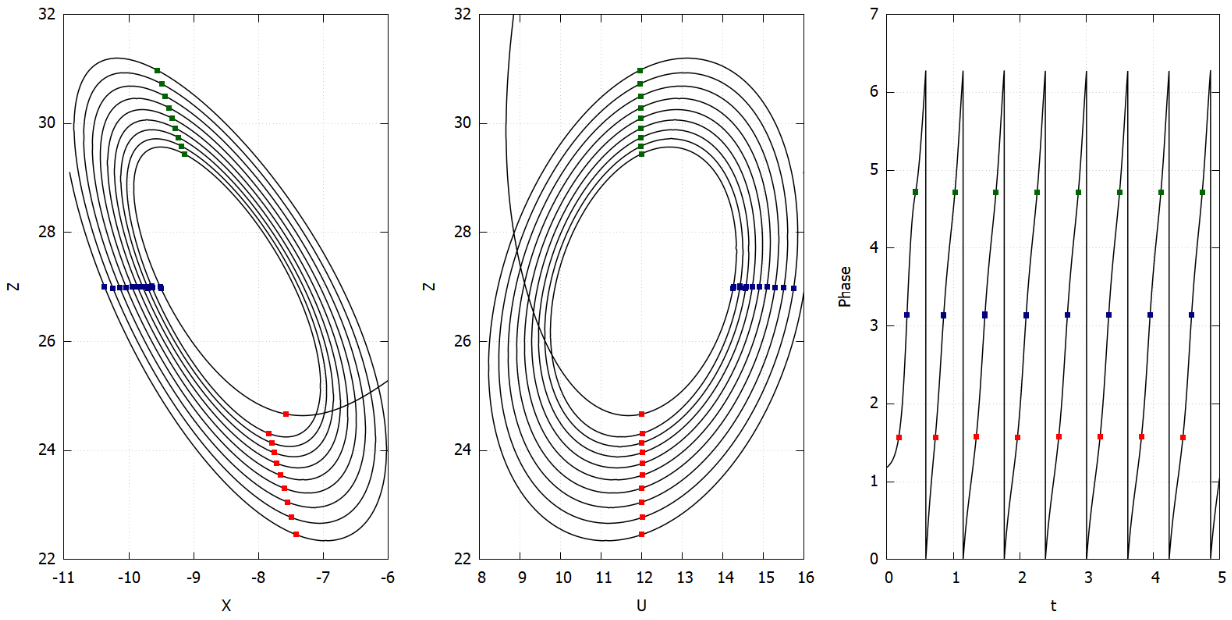


Рис.5. Зависимость разницы координат двух связанных систем $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2, z_1 - z_2$ от времени t при значении параметра связи $E = 0{,}5$.

Для исследования фазовой синхронизации двух связанных систем с неидентичными параметрами была составлена программа, вычисляющая фазу хаотических колебаний в системе Лоренца. Был сделан рисунок для демонстрации работы программы (рис. 6). На фазовых траекториях в плоскостях $(x,\ z)$ и $(u,\ z)$, а также на графике зависимости фазы θ от времени t, одним цветом были отмечены точки с близкой фазой.



а) б) в)

Рис.6. Рисунки к расчету фазы хаотических колебаний: а) фазовая траектория в плоскости (x, z); б) фазовая траектория в плоскости (u, z); в) график зависимости фазы колебаний от времени. Точки одинакового цвета соответствуют точкам с близким значение фазы. Красным цветом отмечены точки для $\theta = \frac{\pi}{2}$, синим для $\theta = \pi$, зеленым для $\theta = \frac{3}{2}\pi$

Также были построены графики зависимости фазы θ_1, θ_2 и разности фаз $\theta_1 - \theta_2$ от времени t для двух разных значений расстройки по параметру r. На всех графиках хорошо заметны моменты скачкообразного изменения разности фаз на 2π. Такие скачки происходят из-за того, что фаза по формуле определяется по модулю 2π – соответственно, точки с фазой, приблизительно равной 0 и 2π, на фазовых траекториях находятся близко к друг другу, в то время как разность фаз этих точек будет стремится к $|2\pi|$.

Видно, что при малых значениях параметра связи фазовой синхронизации не происходит (рис 7,9) – разность фаз постоянно изменяется. В случае сильной связи ($E \geq 0{,}58$ для (рис.8) и $E \geq 0{,}65$ для (рис.10)) разность фаз становится между моментами скачкообразных изменений ограниченной в некоторой области, то есть происходит захват фазы и устанавливается режим фазовой синхронизации.

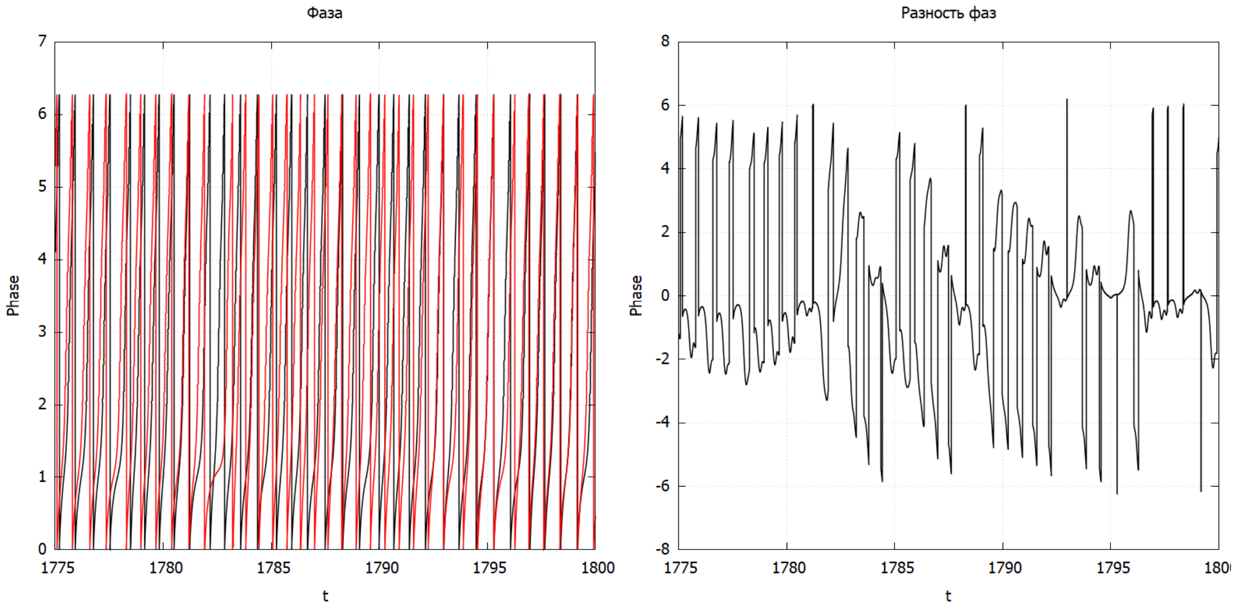


Рис.7. Изменение фазы двух связанных неидентичных систем Лоренца при значении параметра связи E = 0.1. Слева: график зависимости фаз колебаний от времени для двух связанных систем (красным цветом для системы со значением параметра r = 28 и координатами начальной точки (1;1;1), черным цветом для системы со значением параметра r = 28,5 и координатами начальной точки (1,5;1,5;1,5)). Справа: зависимость разности фаз от времени

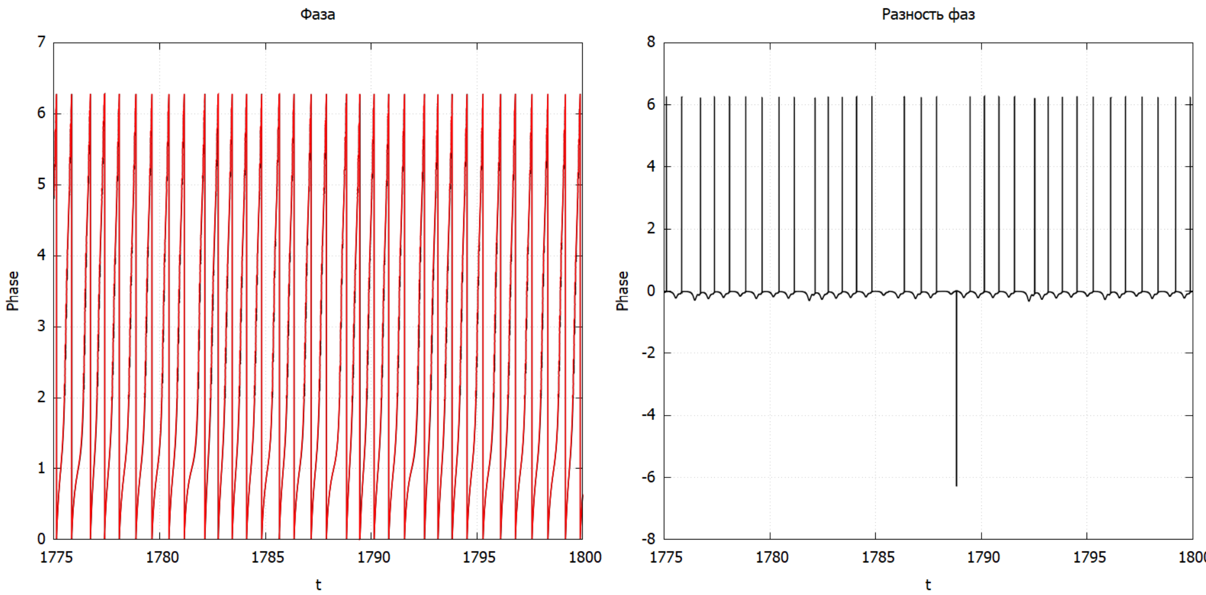


Рис.8. Изменение фазы двух связанных неидентичных систем Лоренца при значении параметра связи E = 0.58. Слева: график зависимости фаз колебаний от времени для двух связанных систем (красным цветом для системы со значением параметра r = 28 и координатами начальной точки (1;1;1), черным цветом для системы со значением параметра r = 28,5 и координатами начальной точки (1,5;1,5;1,5)). Справа: зависимость разности фаз от времени

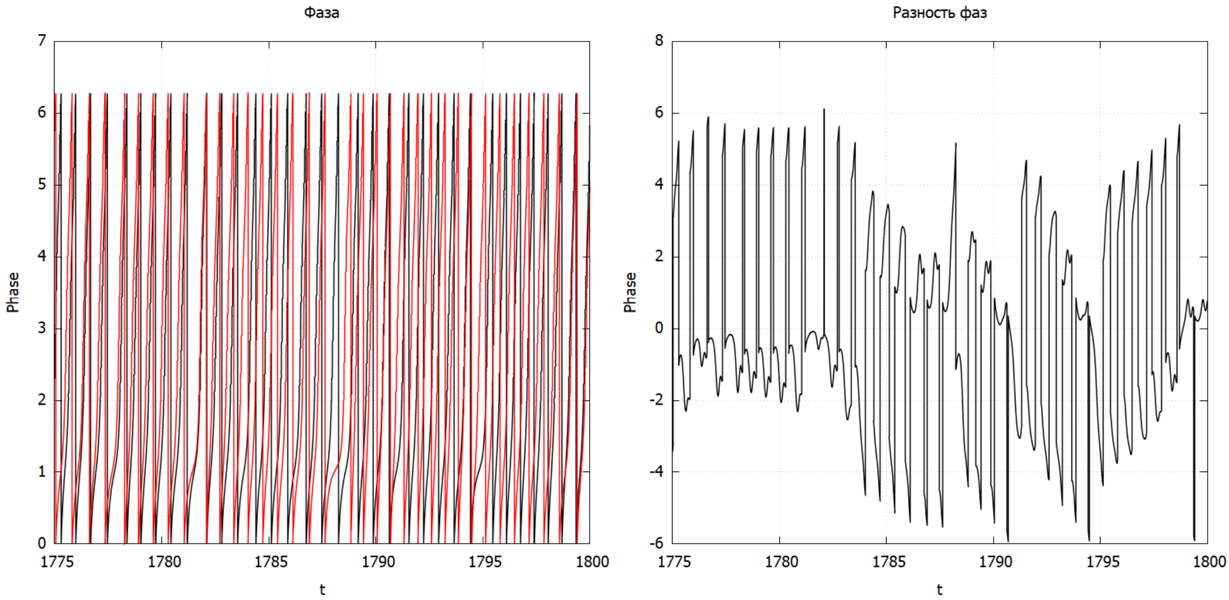


Рис.9. Изменение фазы двух связанных неидентичных систем Лоренца при значении параметра связи E = 0.1. Слева: график зависимости фаз колебаний от времени для двух связанных систем (красным цветом для системы со значением параметра r = 28 и координатами начальной точки (1;1;1), черным цветом для системы со значением параметра r = 29 и координатами начальной точки (1,5;1,5;1,5)). Справа: зависимость разности фаз от времени

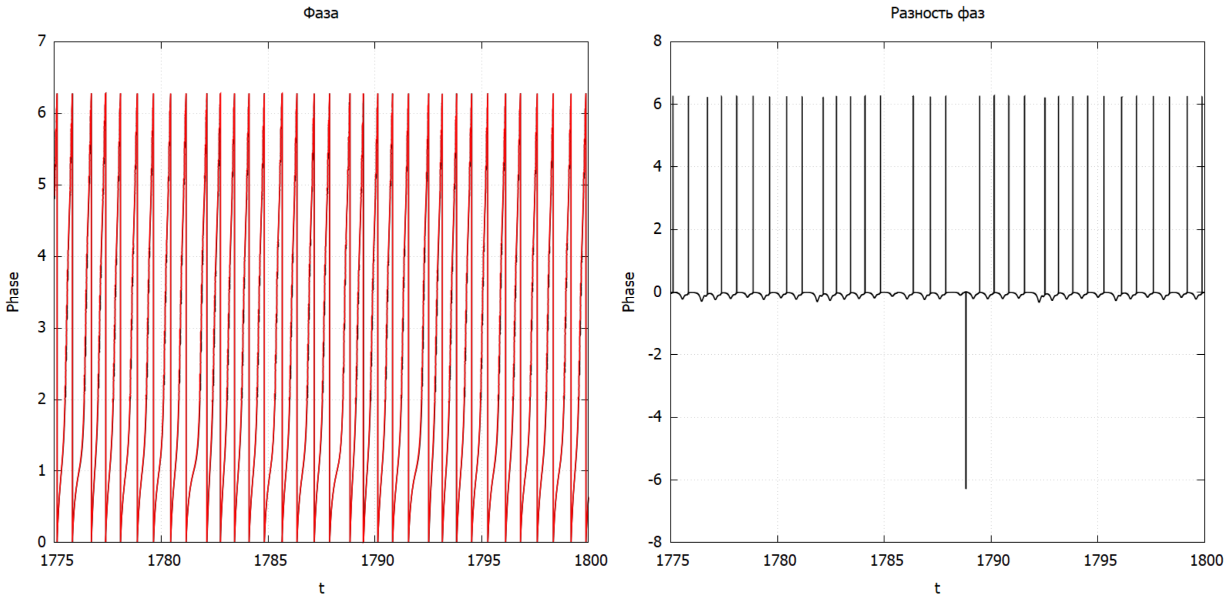


Рис.10. Изменение фазы двух связанных неидентичных систем Лоренца при значении параметра связи E = 0.65. Слева: график зависимости фаз колебаний от времени для двух связанных систем (красным цветом для системы со значением параметра r = 28 и координатами начальной точки (1;1;1), черным цветом для системы со значением параметра r = 29 и координатами начальной точки (1,5;1,5;1,5)). Справа: зависимость разности фаз от времени

Заключение

В ходе выполнения бакалаврской работы было проведено моделирование автономной системы Лоренца и расчёт для неё спектра ляпуновских показателей, проиллюстрировано наличие полной и фазовой синхронизации двух связанных систем Лоренца. Были построены графики разностей переменных и фаз. Полная синхронизация для взаимно связанных идентичных систем Лоренца происходит при значении параметра связи $E \geq 0.46$, при меньших значениях параметра она не наблюдается. Фазовую синхронизацию двух связанных неидентичных систем Лоренца можно наблюдать при значениях параметра связи E тем больших, чем больше расстройка параметров.

Список литературы

1. Пиковский, А. Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. / А. Пиковский, М. Розенблюм, Ю. Куртс — М.: Техносфера, 2003. – 496 с.

2. Короновский, А.А. О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации. / А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов. // Успехи физических наук — 2009 — Т. 179, №12 — С. 1281—1310.

3. Дмитриев, А.С. Динамический хаос. Новые носители информации для систем связи. / А.С. Дмитриев, А.И. Панас — М.: Физматлит, 2002. – 252 с.

4. Кузнецов, С.П. Динамический хаос: курс лекций. / С.П. Кузнецов – М.: Физматлит, 2001. – 296 с.

5. Кузнецов, С.П. Динамический хаос и гиперболические аттракторы. От математики к физике. / С.П. Кузнецов — Изд-во ИКИ, 2013. – 488 с.