

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

**Численное исследование устройства фазового пространства дискретного
отображения, допускающего предельный переход к системе —
генератору «стохастической паутины»**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 431 группы

Направления 09.03.02.«Информационные системы и технологии»

код и наименование направления

Факультета нелинейных процессов

наименование факультета

Чекмаревой Лии Анверовны

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

к.ф.-м.н., доцент

должность, уч. ст., уч. зв.

Д.В. Савин

личная подпись, дата

инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой

д.ф.-м.н., профессор

должность, уч. ст., уч. зв.

А.А. Короновский

личная подпись, дата

инициалы, фамилия

Саратов 2020

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейная динамика – наука, связанная с синергетикой, физикой открытых систем и радиофизикой. Предметом ее исследования являются нелинейные динамические системы, эволюционные процессы и явления в них. Изучение колебательных нелинейных систем играет большую роль для различных приложений [1]. Знания о поведении различных сложных нелинейных и хаотических систем могут быть полезны для разного рода технологий, связанных с обработкой и передачей информации [2] – например, при создании схем скрытой передачи информации [3, 4], анализе и обработке сложных сигналов [5] и т. п.

При изучении и моделировании таких систем важную роль играет понятие динамической системы – это система, для которой однозначно определено ее состояние в определённый момент времени и однозначно задан закон его эволюции во времени. Внедрение компьютерного моделирования позволило использовать для анализа поведения нелинейных динамических систем численные методы, что подразумевает создание модели исследуемой системы с сохранением определяющих свойств. Удобным инструментом являются дискретные отображения, которые упрощают компьютерное исследование [6].

Однако это не мешает получать наглядные результаты и глубже понимать поведение нелинейных динамических систем. В этом контексте исследование относительно простых модельных динамических систем, демонстрирующих определённые специфические черты поведения, является весьма полезным — в процессе таких исследований накапливается информация о поведении сложных нелинейных динамических систем, которая в дальнейшем может быть использована при анализе поведения систем, имеющих непосредственные практические приложения.

В частности, интерес вызывает поведение динамических систем с малым уровнем диссипации, или, говоря иначе, с малой скоростью сжатия фазового

объёма. Фазовым пространством называется пространство, все элементы которого являются мгновенными состояниями системы. Точка, соответствующая одному из всех состояний, называется «изображающей точкой». Если со временем объём фазового пространства остается постоянным, система называется консервативной. Если же он уменьшается, можно говорить о наличии диссипации [7].

Для диссипативных динамических систем характерно наличие аттракторов — притягивающих множеств в фазовом пространстве. При одинаковом начальном условии траектория изображающей точки может сходиться к разным аттракторам — их сосуществование называется мультистабильностью [6]. Большой интерес представляют системы со слабой диссипацией: когда диссипация близка к нулю, количество аттракторов увеличивается, при этом структура фазового пространства становится сложнее [8].

В частности, в последнее время вызывает интерес исследование слабодиссипативных систем, сконструированных на основе модельной автоколебательной системы — осциллятора Ван дер Поля [9] — под импульсным воздействием специально подобранной переменной амплитуды в случае, когда уровень диссипации в системе невысок [10, 11]. В консервативном пределе такие системы переходят в систему — генератор т. н. «стохастической паутины» [12]. Этим термином обозначается специальный тип организации фазового пространства консервативных динамических систем: он характеризуется существованием бесконечного числа положений равновесия, окрестности которых соединены узкими каналами, допускающими перемещение по ним изображающей точки даже при малой амплитуде внешнего воздействия.

Целью данной работы является накопление информации о поведении нелинейных динамических систем с малым уровнем диссипации, а также создание комплекса программ, позволяющих проводить численное

исследование поведения различных нелинейных отображений. В рамках данной работы решались следующие **задачи**: создание в среде разработки Lazarus программ для построения карт динамических режимов, фазовых портретов и бассейнов притяжения аттракторов двумерных отображений; анализ устройства пространства параметров отображения для системы — генератора «стохастической паутины» с диссипативными возмущениями, изучение структуры аттракторов отображения в различных областях пространства параметров, поиск областей мультистабильности; исследование устройства бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов и изменений их структуры при изменении диссипации.

Бакалаврская работа содержит 33 страницы, приведённый список литературы включает 15 наименований.

Основное содержание работы

В первом разделе рассмотрены основные понятие и методы исследования поведения систем, описывающихся дискретными отображениями. Поведение нелинейных дискретных отображений может демонстрировать сложную динамику. Одним из базовых модельных дискретных отображений является логистическое отображение. Это однопараметрическое отображение имеет несколько эквивалентных форм записи

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (1.a)$$

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 \quad (1.б)$$

В работе использовалась форма записи (1.б), которая имеет вид классического логистического отображения. В зависимости от величины параметра λ система может демонстрировать различное поведение: наличие неподвижной точки, удвоение периода и переход к динамическому хаосу.

Наглядным инструментом для представления поведения логистического отображения является бифуркационное дерево [6], также иногда называемое

деревом Фейгенбаума. В рамках этой работы с помощью компьютерного моделирования было построено бифуркационное дерево для отображения вида (1.2). В результате работы созданной программы была получена бифуркационная диаграмма, на которой хорошо видны удвоения периода (например, при значении параметра $\lambda = 0.75$).

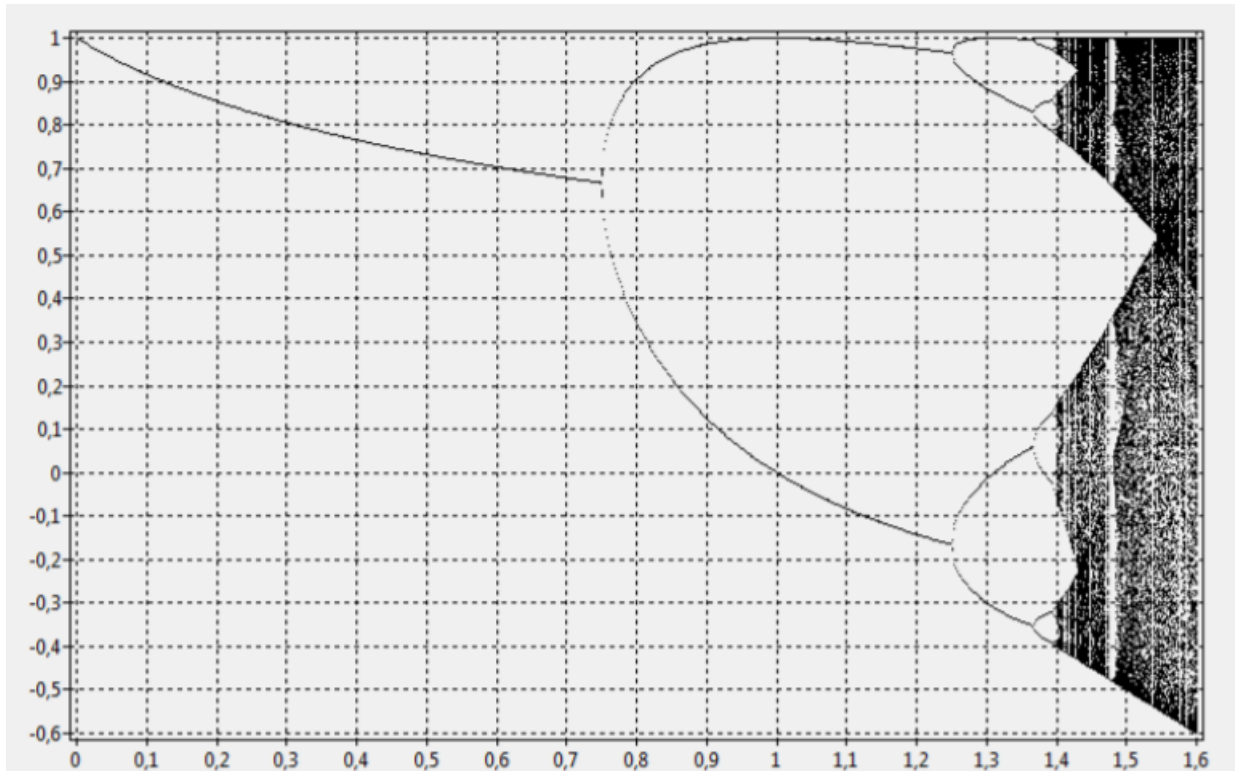


Рис. 1 Бифуркационное дерево для логистического отображения (2). По оси абсцисс отложен параметр λ , по оси ординат переменная x .

На бифуркационном дереве видна точка на оси параметра, после перехода через которую возможно возникновение хаоса — её принято называть критической точкой перехода к хаосу [7].

Одномерные отображения позволяют получать интересные результаты для поведения динамических систем, но более интересно перейти к системам большей размерности. Чтобы сделать логистическое отображение двумерным, достаточно ввести условие, чтобы существовала зависимость $(n+1)$ шага и от $(n-1)$ шага. Для отображения (1.а) соответствующее двумерное отображение имеет вид:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - by_n, \\y_{n+1} &= x_n\end{aligned}\tag{2}$$

Для отображения Эно, как и для логистического отображения, удобно демонстрировать динамику на бифуркационном дереве. Качественно оно имеет такой же вид, как и бифуркационное дерево логистического отображения.

Для того, чтобы проследить за эволюцией переменных, нужно визуализировать фазовое пространство, по осям которого отложены переменные, описывающие систему. Состояние системы задается изображающей точкой, которая совершает прыжки в фазовом пространстве с течением времени.

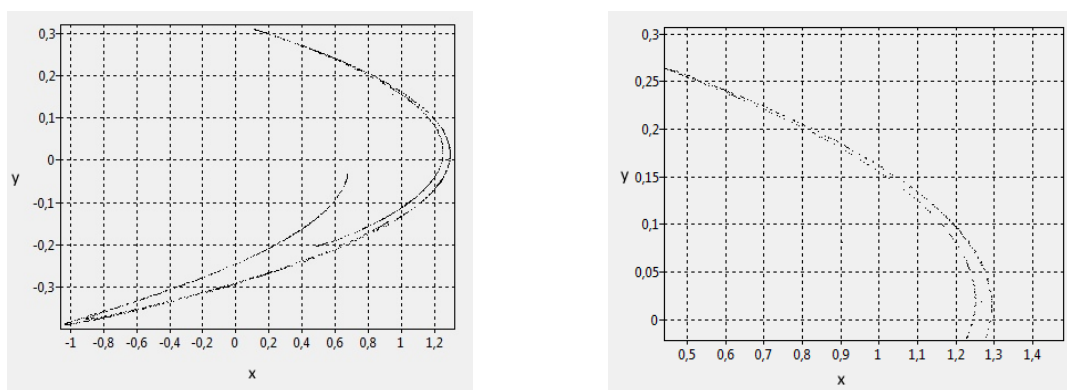


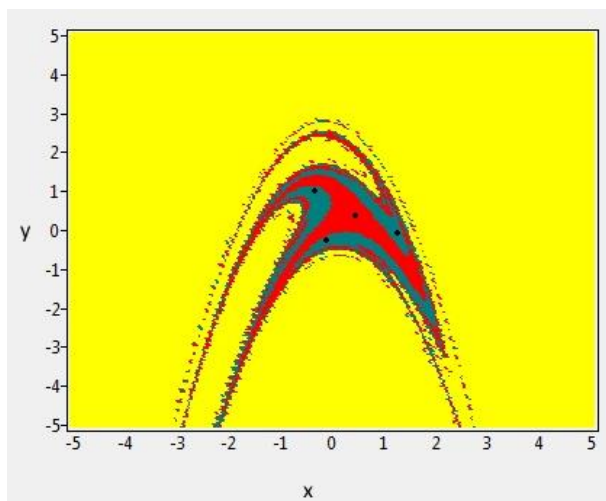
Рис.2 Аттрактор отображения Эно при значениях параметров $d=1.4$, $b=0.3$ и его увеличенный фрагмент.

На фазовых портретах отображения Эно видно, что «облако» изображающих точек конденсируется на конечные объекты – аттракторы. Размерность аттрактора всегда меньше размерности фазового пространства, поэтому фазовый объем уменьшается со «включением времени». Системы, для которых характерно это свойство, называются диссипативным. Если же одному начальному условию соответствует уникальная траектория, система консервативна [6].

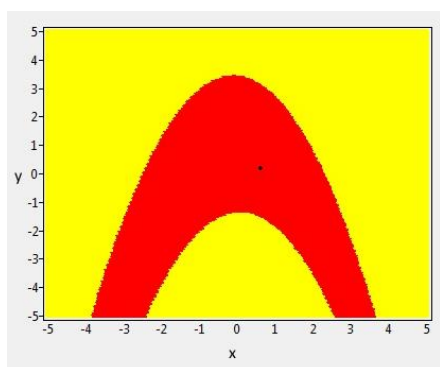
В фазовом пространстве существует некоторое множество, включающее в себя аттрактор и множество, точки из которого через некоторое число итераций попадут на аттрактор. Эту область называют бассейном притяжения

[6]. Для системы (2) были построены бассейны притяжений при разных значениях параметров λ и b .

а)



б)



в)

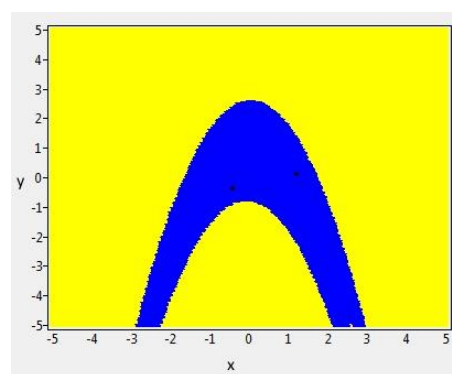


Рис.3 Бассейны притяжения при значениях параметров $d=1.2$ и $b=-0.3$ (а), $d=0.8$ и $b=0.4$ (б), $d=0.8$ и $b=-0.1$ (в). Красным цветом показан бассейн притяжения цикла периода 1, синим бассейн притяжения цикла 2, голубой цвет соответствует периоду 3. Желтым цветом закрашена область разбегания переменных.

На бассейнах притяжения Рис 3 количество черных точек соответствует номеру периода. На бассейнах притяжения на Рис 3.а видно, что при одних и тех же значениях параметров сосуществуют несколько аттракторов – их бассейны изображены разным цветом.

Для диссипативных систем с несколькими параметрами существует удобный инструмент для исследования зависимости их поведения от параметров – карта динамических режимов. Это плоскость, по осям которой отложены параметры отображения, раскрашенная в разные цвета в соответствии с разными периодами, наблюдаемыми в той или иной её точке.

На ней хорошо видны периодические режимы, линии бифуркаций и области непериодических режимов. Пример такой карты для отображения Эно приведён на рис. 4.

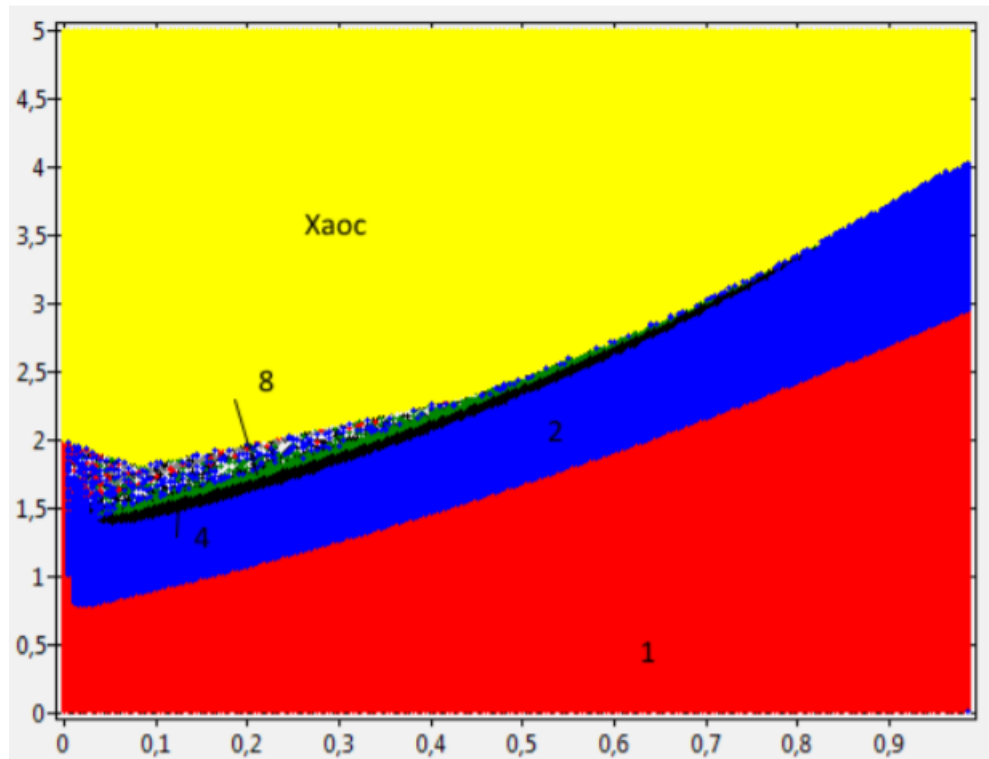


Рис.4 Карта динамических режимов для отображения Эно. На плоскости параметров по оси абсцисс отложен параметр λ , по оси ординат параметр b . Разным цветам соответствуют разные периоды. В нижней части рисунка красным цветом отмечена область существования устойчивой неподвижной точки, синим цветом — удвоение периода и т.д.

Во второй главе рассмотрено поведение системы осциллятора Ван дер Поля под импульсным внешним воздействием

$$\ddot{x} - (\varepsilon - \mu x^2)\dot{x} + x = \sum_m F(x)\delta(t - m\tau) \quad (3)$$

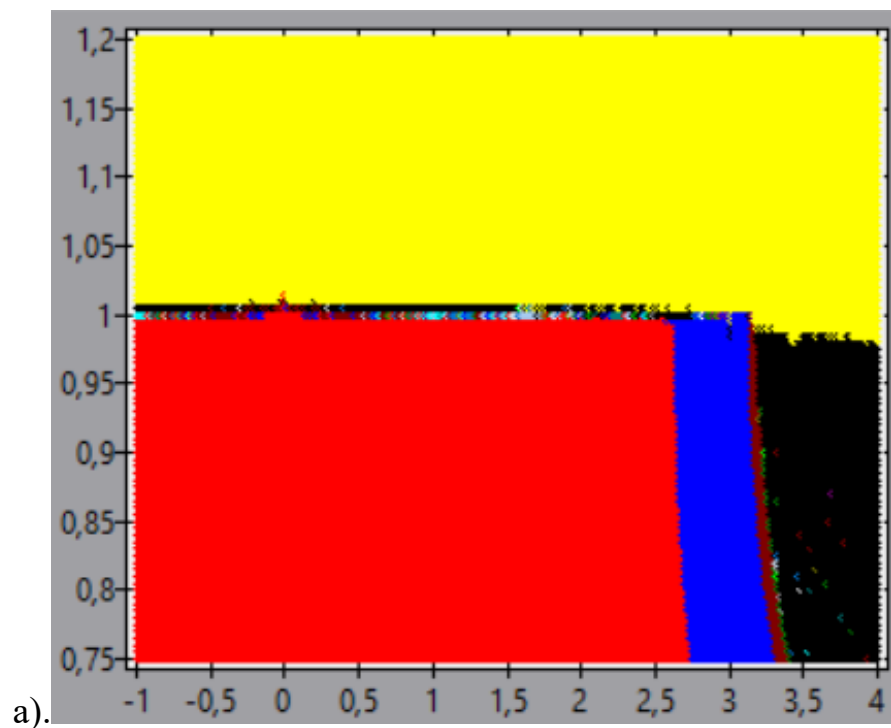
Нелинейные системы с малым уровнем диссипации обладают важным свойством — при приближении параметра диссипации к нулю мультистабильность заметно растет [8]. Для системы (3) можно получить соответствующее дискретное отображение

$$x_{n+1} = B \frac{F(x_n) + y_n}{\sqrt{1 + C[x_n^2 + (F(x_n) + y_n)^2]}}$$

$$y_{n+1} = -B \frac{x_n}{\sqrt{1 + C[x_n^2 + (F(x_n) + y_n)^2]}} \quad (4)$$

Здесь внешнее воздействие имеет вид $F(x) = \lambda \cos(x)$. При $B < 1$ в автономной системе существует устойчивая неподвижная точка, при $B > 1$ – предельный цикл. Если параметры нелинейной диссипации $\mu = 0 (C = 0)$, то в системе отсутствует нелинейная диссипация.

Внешнее импульсное воздействие, зависящее от координаты x и определяющееся параметром λ , приводит к наличию в системе удвоений периода. Для изучения поведения системы были построены карты динамических режимов, при этом параметр C оставался фиксированным.



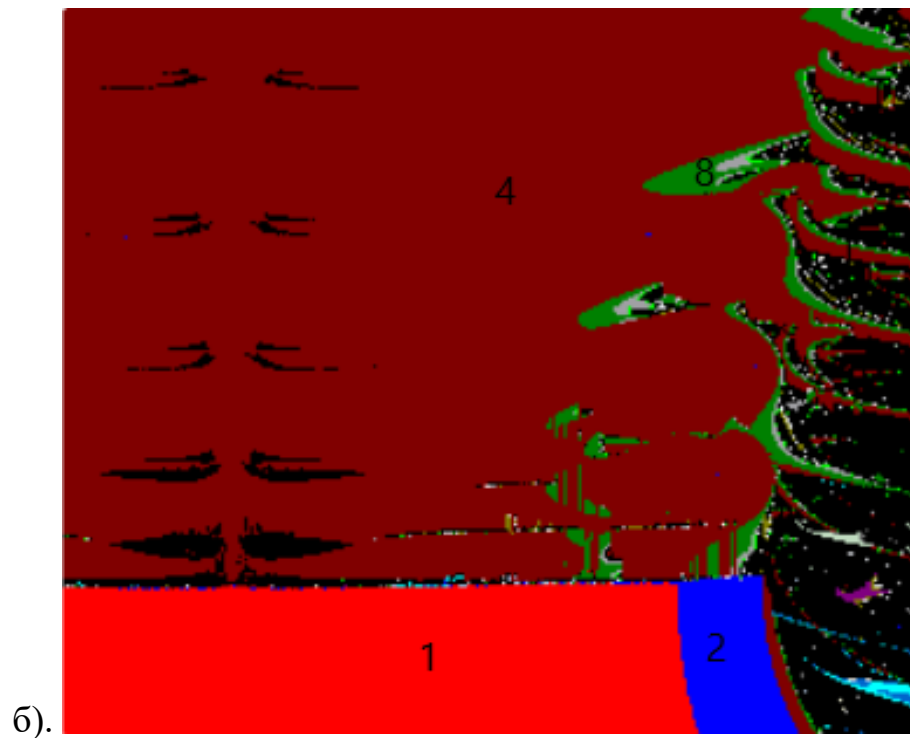
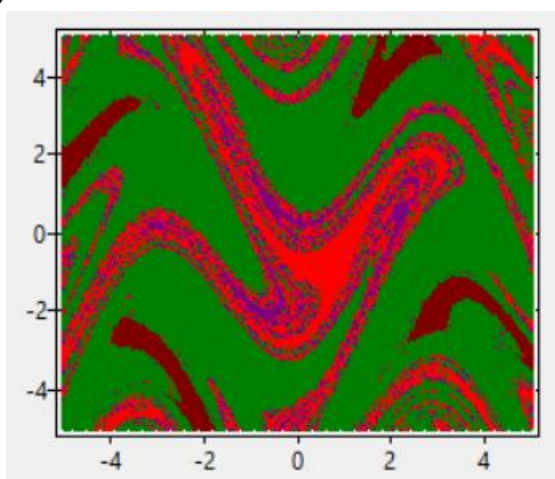


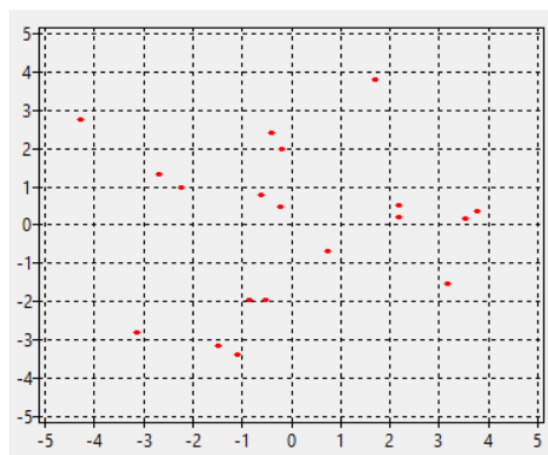
Рис.5 Карты динамических режимов для отображения (4). Плоскость параметров (λ, B) в диапазоне значений $[-1;4]$ по оси абсцисс и $[0,75;2]$ по оси ординат. Цифрами обозначены соответствующие периоды. Область черного цвета соответствует непериодическим режимам. Параметр $C=0$ (10.a) и $C=0.01$ (10.б).

В рамках данной работы были также построены фазовые портреты и бассейны притяжений при фиксированных значениях параметра диссипации C .

а)



б)



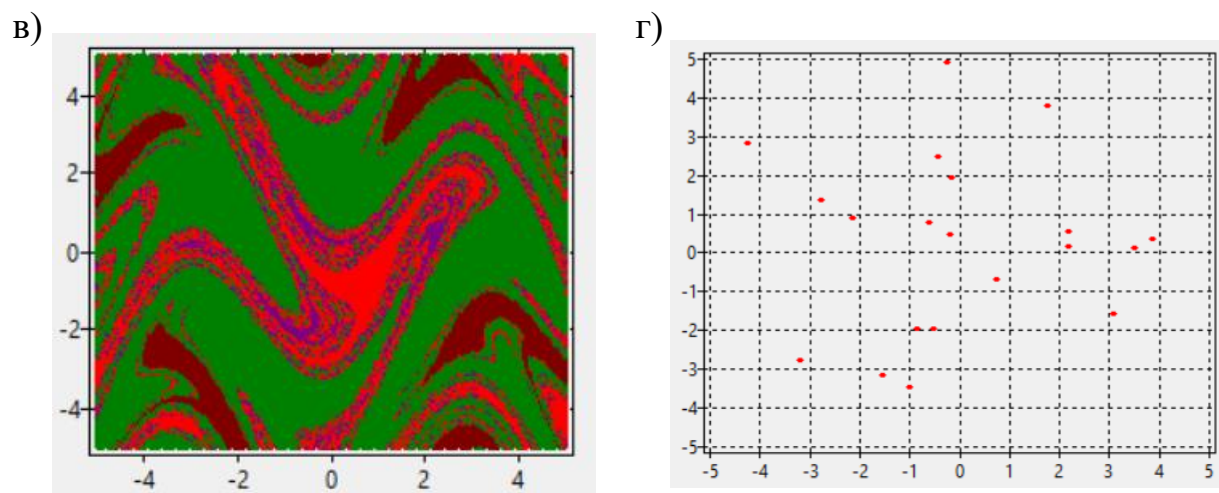


Рис.6 Бассейны притяжений и портреты аттракторов при значениях $B=0,9$ и $\lambda=2$. Параметр $C=0,001$ на а) и б), $C=0,0005$ на в) и г).

Портреты аттракторов строились для набора начальных значений переменных из интервала $[-5;5]$. На бассейнах притяжения рисунка 6 видно сосуществование периодов 1, 4, 6 и 8.

Рассмотренные выше результаты были получены при значениях параметра B меньше единицы. Далее было рассмотрено поведение системы (4) при увеличении B , для чего также были построены бассейны притяжений и портреты аттракторов.

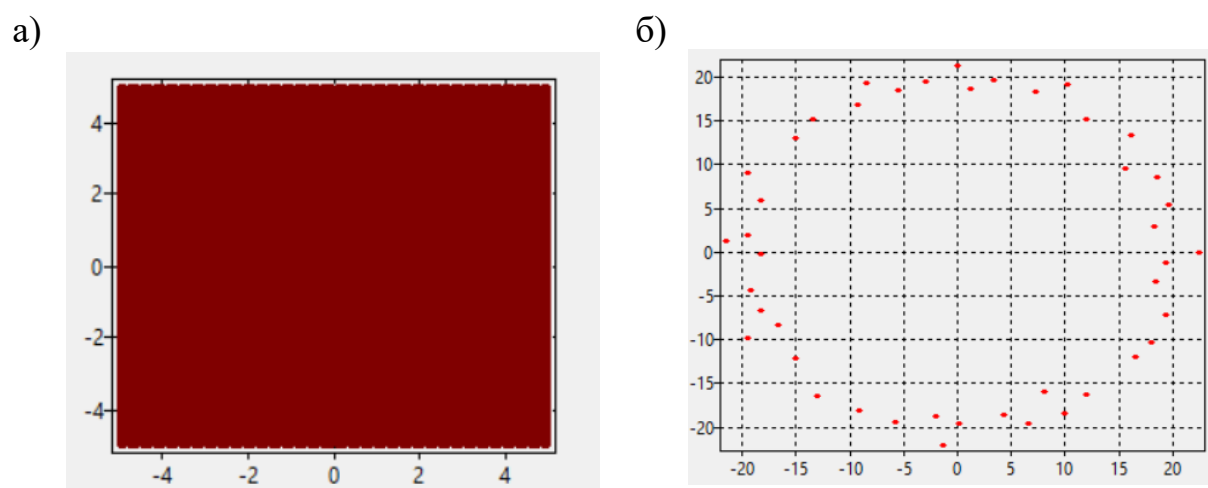


Рис.7 Бассейн притяжений и портрет аттракторов для набора начальных условий при значениях параметров $\lambda=1,6$, $B=1,1$. Параметр $C=0,0005$.

На бассейне притяжений видна область только одного периода, в данном случае — периода 4, но аттракторов этого периода сосуществует множество.

Заключение

В ходе выполнения бакалаврской работы были изучены методы численного анализа поведения нелинейных дискретных отображений, составлены соответствующие программы. Проведено численное исследование поведения системы осциллятора Ван дер Поля под импульсным внешним воздействием. Для соответствующего ей дискретного отображения были построены карты динамических режимов при разных значениях параметра диссипации. Затем для достаточно большого значения параметра C был проведен поиск областей мультистабильности. Для этого были построены бассейны притяжений и фазовые портреты при значениях параметра B , близкого, но меньше единицы.

При фиксированном значении параметра диссипации были построены бассейны притяжений и портреты аттракторов для значений параметра $B < 1$ и $B > 1$. При $B < 1$ в системе наблюдается мультистабильность: наряду с основным существуют побочные аттракторы различных периодов, их количество увеличивается при уменьшении диссипации. При $B > 1$ при выходе из основной области периодического режима в системе наблюдается сосуществование большого числа различных аттракторов одинакового периода.

Список литературы

1. Kapitaniak, T. Chaos for Engineers: Theory, Applications, and Control / T. Kapitaniak - Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000. - 142 p.
2. Lau, F.C.M. Chaos-Based Digital Communication Systems: Operating Principles, Analysis Methods, and Performance Evaluation / F.C.M. Lau, C.K. Tse. - Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2003. - 228 p.
3. Дмитриев, А.С. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи / А.С. Дмитриев, А.И. Панас. - М.: Издательство Физико-математической литературы, 2002. – 252 с.
4. Короновский, А.А. О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации. / А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов // УФН. - 2009. – Т. 179, №12, - С. 1281-1310.
5. Безручко, Б.П. Математическое моделирование и хаотические временные ряды / Б.П. Безручко, Д.А. Смирнов. - Саратов: ГосУНЦ «Колледж», 2005. – 320 с.
6. Кузнецов, А.П. Введение в физику нелинейных отображений. / А.П. Кузнецов, А.В. Савин, Л.В. Тюрюкина – Саратов: Научная книга, 2010. – 134 с.
7. Кузнецов, С.П. Динамический хаос: курс лекций. / С.П. Кузнецов – М.: Физматлит, 2001. – 355 с.
8. Feudel U. Complex dynamics in multistable systems. / Feudel U. // International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2008. - 18, № 6, - 1607–1626 p.
9. Кузнецов А. П. Нелинейные колебания / А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Н.М. Рыскин - Физматлит, 2002. - 292 с.

10. Felk, E.V. Multistability and transition to chaos in the degenerate Hamiltonian system with weak nonlinear dissipative perturbation / E.V. Felk, A.P. Kuznetsov, A.V. Savin // *Physica A*. - 2014. - V. 410 - P. 561–572.

11. Голоколенов А.В. Динамика слабодиссипативной автоколебательной системы под внешним импульсным воздействием с амплитудой, полиномиально зависящей от динамической переменной / А.В. Голоколенов // *Известия вузов. ПНД*. - 2019. - Т. 27, № 3. - С. 86–98.

12. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. / Г.М. Заславский – Наука, 1984. – 272 с.