МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической экономики

Оптимизация прибыли фирмы при ограничениях на ресурсы

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 441 группы

направления 09.03.03 Прикладная информатика

механико-математического факультета

Луковой Анны Андреевны

Научный руководитель
профессор, д.ф-м.н, профессор ______________________ Дудов С.И.

Зав. кафедрой
д.ф-м.н, профессор ______________________ Дудов С.И.

Саратов 2020 г.

Введение. Господствующая в настоящее время рыночная экономика есть экономическая система, которой управляет механизм стихийных рыночных транзакций в институциональной среде.

В условиях рыночной экономики приоритетной задачей для предприятия является удовлетворение потребностей народного хозяйства и граждан в собственной продукции при минимальных затратах, поддержание и повышение темпов роста социально-экономического развития государства. Одним из инструментов, позволяющих выполнить данную задачу, является увеличение прибыли — значительного стимула для создания и развития предприятий.

Данное направление было выбрано в связи с тем, что несмотря на довольно обширные исследования формирования прибыли предприятия, большое количество вопросов, связанных с выявлением резервов роста прибыли, все еще требует дополнительного изучения.

Кроме того, размер прибыли всегда зависит от большого количества факторов, имеющих непростую структуру взаимосвязей. Очевидно, что математическая модель не может включать в себя все нюансы конкретного предприятия и конкретного производства, вследствие чего актуальность данной темы обуславливается также проблемой необходимости выбора оптимального набора факторов при построении модели, что в конечном счете должно привести к получению оптимальной прибыли предприятием.

Цель выпускной квалификационной работы — исследование эффективности применения методов проекции градиента и условного градиента для приближенного решения задач оптимизации прибыли фирмы при заданных ограничениях на ресурсы на основе проведения вычислительных экспериментов.

Для полного раскрытия поставленной темы решаются следующие задачи:

1) рассматривается понятие производственной функции, ее характеристики, а также примеры производственных функций;

2) рассматривается неоклассическая задача теории фирмы, а именно: постановка задачи и свойства ее решения;
3) рассматривается аналитическое решение задач с производственными функциями классического вида, в частности, решается ряд модельных задач;
4) рассматриваются численные методы оптимизации прибыли: метод проекции градиента и метод условного градиента;
5) проводятся вычислительные эксперименты по модельным задачам.

Объект исследования – задача оптимизации прибыли производственной фирмы при наличии ограничений на используемые ресурсы.

Предмет исследования – эффективность применения численных методов оптимизации для приближенного решения задачи оптимизации прибыли фирмы.

Основное содержание работы. Работа состоит из четырех разделов:

1) Производственная функция и ее характеристики
2) Неоклассическая задача теории фирмы
3) Аналитическое решение задач с производственными функциями классического вида
4) Оптимизация прибыли фирмы численными методами.

В первом разделе описаны понятие производственной функции, ее характеристики, а также приведены примеры производственных функций, а именно: производственная функция Кобба-Дугласа, производственная функция «затраты-выпуск» и линейная производственная функция.

Второй раздел работы посвящен неоклассической задаче теории фирмы. В нем рассматриваются постановка задачи и свойства ее решения.

В третьем разделе рассматривается аналитическое решение задач с производственными функциями классического вида: случай с производственной функцией Кобба-Дугласа, случай с производственной функцией дезагрегированного вида, а также случай с производственной функцией типа «затраты-выпуск». Завершается данный раздел главой, где представлены модельные задачи, решения которых могут быть получены аналитическим путем без применения численных (итеративных) методов оптимизации, демонстрирующие алгоритмы определения характера отдачи от масштаба производства, комбинации факторов производства при условии максимизации выпуска, плана распределения бюджета с целью максимизации прибыли при ограничении на ресурс, которые могут быть применены для анализа методов оптимизации.

В четвертом разделе описывается оптимизация прибыли фирмы двумя численными методами: методом проекции градиента и методом условного градиента. Последняя глава данного раздела посвящена решению модельных задач рассмотренными численными методами и содержит выводы о целесообразности использования метода проекции градиента и метода условного градиента в условиях различных задач.

В рамках практической части четвертого раздела дипломной работы мной был написан программный код на языке С++ по методу проекции градиента, а также программный код на языке С++ по методу условного градиента. После этапа написания программ следовал этап проведения вычислительных экспериментов. Их суть состоит в решении модельных задач с использованием двух написанных программ и анализе результатов по итогам решения одних и тех же задач разными методами.

Задача 4.1.

Пусть x_1, x_2 — соответственно выражают расходы на рекламу в газете и на телевидении в неделю, причем $0 \le x_1 \le 30$, $0 \le x_2 \le 10$. Функция $F(x_1, x_2)$ имеет вид:

$$F(x_1, x_2) = -4x_1 x_2 + 5x_1^2 + x_2^2 - 20x_1 - 100000 .$$

Какую комбинацию x_1, x_2 следует использовать, чтобы минимизировать функцию $F(x_1, x_2)$?

Решение.

Решение по методу проекции градиента: качестве ε зададим 0,01, решение начнем искать из точки (3; 5). Результаты работы программы представлены в следующей таблице:

Таблица 4.1 — Результат решения задачи 4.1 методом проекции градиента при $\varepsilon=0{,}01$

Итерация	α	$(x_1; x_2)$	Проекция $(y_1; y_2)$	Условие $F(y)<F(x)$	Условие $\|y-x\|\leq\varepsilon$	Решение $(\tilde{x}_1; \tilde{x}_2)$
1	1	(3; 5)	(13; 7)	false		
...	...	...	...	...	...	
40	0,125	(5,99619; 10)	(6,00095; 10)	true	true	(5,99619; 10)

Таким образом видим, что при $\varepsilon=0{,}01$ было получено решение $x_1\approx 6, x_2\approx 10$ при величине коэффициента $\alpha_{40}=0{,}125$.

Далее решим данную задачу методом условного градиента при тех же исходных данных. Результаты работы программы представлены в следующей таблице:

Таблица 4.2 — Результат решения задачи 4.1 методом условного градиента при $\varepsilon=0{,}01$

Итерация	α	$(x_1; x_2)$	$(z_1; z_2)$	Условие $F(z)<F(x)$	Условие $\|z-x\|\leq\varepsilon$	Решение $(\tilde{x}_1; \tilde{x}_2)$
1	1	(3; 5)				
...	...	...	...	...	...	
13848	0,000976562	(5,99179; 9,96987)	(5,98594; 9,9699)	true	true	(5,99179; 9,96987)

При $\varepsilon = 0,01$ было получено решение $x_1 \approx 6, x_2 \approx 10$ при величине коэффициента $\alpha_{13848} \approx 0,00098$.

Проверим работу численных методов, решив данную задачу при $\varepsilon = 0,00001$. Прочие исходные данные возьмем те же.

Таблица 4.3 — Результат решения задачи 4.1 методом проекции градиента при $\varepsilon = 0,00001$

Итерация	α	$(x_1; x_2)$	Проекция $(y_1; y_2)$	Условие $F(y) < F(x)$	Условие $\|y - x\| \leq \varepsilon$	Решение $(\tilde{x}_1; \tilde{x}_2)$
1	1	(3; 5)	(13; 7)	false		
...	...	...	...	...	...	
60	0,125	(6; 10)	(6; 10)	true	true	(6; 10)

То есть, при $\varepsilon = 0,00001$ было получено решение $x_1 \approx 6, x_2 \approx 10$ при величине коэффициента $\alpha_{60} = 0,125$.

Решение по методу условного градиента:

Таблица 4.4 — Результат решения задачи 4.1 методом условного градиента при $\varepsilon = 0,00001$

Итерация	α	$(x_1; x_2)$	$(z_1; z_2)$	Условие $F(z) < F(x)$	Условие $\|z - x\| \leq \varepsilon$	Решение $(\tilde{x}_1; \tilde{x}_2)$
1	1	(3; 5)	(30; 10)	false		
...	...	...	...	...	...	
300000	0,0625	(5,99868; 9б99785)	(7,49876; 9,99799)	false		
...	...	...	...	...	...	

Метод условного градиента при $\varepsilon = 0,00001$ не смог найти решение даже спустя 300000 итераций.

Несмотря на то, что решение было получено обоими методами, преимущество в вычислениях по методу проекции градиента очевидно: решение было получено спустя меньшее число итераций.

Задача 4.2.

Небольшая фирма производит два вида продукции и продает ее по цене 1000 д.ед. и 800 д.ед. соответственно. Издержки фирмы описываются уравнением

$$C(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 ,$$

где x_1, x_2 - объемы выпуска первого и второго видов продукции. Причем, $x_1 \le 1000, x_2 \le 1000$. Требуется найти такие значения x_1, x_2, при которых прибыль максимальна.

Решение.

Для начала необходимо записать функцию прибыли, которую необходимо максимизировать по условию задачи. В данном случае функция имеет вид:

$$\Pi(x_1, x_2) = 1000x_1 + 800x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 .$$

Однако, чтобы продолжить решение численными методами, нужно прийти к задаче минимизации функцию, чего мы добьемся сменой знаков в функции прибыли:

$$\Pi(x_1, x_2) = -1000x_1 - 800x_2 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 .$$

Решим данную задачу сначала методом проекции градиента, а затем методом условного градиента. В обоих случаях начнем поиск решения из точки $x_1 = 50, x_2 = 70$ и примем $\varepsilon = 0{,}01$.

Решение задачи по методу проекции градиента:

Таблица 4.5 — Результат решения задачи 4.2 методом проекции градиента при $\varepsilon=0{,}01$

Итерация	α	$(x_1;x_2)$	Проекция $(y_1;y_2)$	Условие $F(y)<F(x)$	Условие $\|y-x\|\le\varepsilon$	Решение $(\tilde{x}_1;\tilde{x}_2)$
1	1	(50; 70)	(710; 630)	false		
...	...	...	...	...	...	
71	0,25	(100,014; 299,989)	(100,005; 299,987)	true	true	(100,014; 299,989)

Таким образом видим, что при $\varepsilon=0{,}01$ было получено решение $x_1\approx100, x_2\approx300$ при величине коэффициента $\alpha_{71}=0{,}25$.

Решение задачи по методу условного градиента:

Таблица 4.6 — Результат решения задачи 4.2 методом условного градиента при $\varepsilon=0{,}01$

Итерация	α	$(x_1;x_2)$	$(z_1;z_2)$	Условие $F(z)<F(x)$	Условие $\|z-x\|\le\varepsilon$	Решение $(\tilde{x}_1;\tilde{x}_2)$
1	1	(50; 70)	(1000; 1000)	false		
...	...	...	...	...	...	
174	0.000244141	(100,151; 299,877)	(100,127; 299,877)	true	true	(100,151; 299,877)

При решении данным методом было получено решение $x_1\approx100, x_2\approx300$ при величине коэффициента $\alpha_{174}=0{,}000244141$, $\varepsilon=0{,}01$.

Проверим работу численных методов, решив последнюю задачу при $\varepsilon=0{,}00001$. Оставшиеся исходные данные возьмем те же.

Решение по методу проекции градиента:

Таблица 4.7 — Результат решения задачи 4.2 методом проекции градиента при $\varepsilon = 0{,}00001$

Итерация	α	$(x_1; x_2)$	Проекция $(y_1; y_2)$	Условие $F(y) < F(x)$	Условие $\|y - x\| \le \varepsilon$	Решение $(\tilde{x}_1; \tilde{x}_2)$
1	1	(50; 70)	(710; 630)	false		
...	...	...	...	...	...	
121	0,25	(100; 300)	(100; 300)	true	true	(100; 300)

По методу проекции градиента решение $x_1 \approx 100, x_2 \approx 300$ было получено при величине коэффициента $\alpha_{121} = 0{,}25$, $\varepsilon = 0{,}00001$.

Решение по методу условного градиента:

Таблица 4.8 — Результат решения задачи 4.2 методом условного градиента при $\varepsilon = 0{,}00001$

Итерация	α	$(x_1; x_2)$	$(z_1; z_2)$	Условие $F(z) < F(x)$	Условие $\|z - x\| \le \varepsilon$	Решение $(\tilde{x}_1; \tilde{x}_2)$
1	1	(50; 70)	(1000; 1000)	false		
...	...	...	...	...	...	
1295	$2{,}98 \cdot 10^{-08}$	(100; 300)	(100; 300)	true	true	(100; 300)

По методу условного градиента решение $x_1 \approx 100, x_2 \approx 300$ было получено при величине коэффициента $\alpha_{1295} = 2{,}98 \cdot 10^{-08}$, $\varepsilon = 0{,}00001$.

Здесь можно сделать аналогичные выводы, что и после решения задачи 4.1: метод проекции градиента наиболее эффективен, так как для поиска решения требует меньшего числа итераций. Кроме того, по результатам работы можно увидеть, что уменьшение погрешности ε поспособствовало значительному увеличению числа итераций для каждого из рассмотренных методов. Однако, рост числа итераций для метода условного градиента произошел в разы, в то время как для метода проекции градиента этот показатель остался на приемлемом уровне.

Таким образом, метод проекции градиента превзошел метод условного градиента при решении задач минимизации функции с заданными ограничениями по следующему ряду показателей:

1) получение решения спустя меньшее число итераций для случая с высоким значением погрешности решения;
2) получение решения спустя меньшее число итераций для случая с низким значением погрешности решения.

Также, меньшее число итераций программы при получении решения методом проекции градиента свидетельствует о более быстром получении искомого результата, то есть о меньшем расходе временных ресурсов.

Заключение. В результате проведенной работы была раскрыта тема «Оптимизация прибыли фирмы при ограничениях на ресурсы», поставленная цель достигнута в полном объеме, все поставленные задачи решены.

Результатом работы является программная реализация метода проекции градиента и метода условного градиента и сравнение их эффективности на примерах решения модельных задач оптимизации прибыли фирмы при ограничениях на используемые ресурсы.