МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической экономики

Прогнозирование волатильности фондовых индексов

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 441 группы

направления 09.03.03 Прикладная информатика

Механико-математического факультета

Пресняковой Елены Сергеевны

Научный руководитель
доцент, к.ф-м.н, доцент ______________________ В.В.Новиков

Зав. кафедрой
д.ф-м.н, профессор ______________________ С.И.Дудов

Саратов 2020 г.

Введение. Волатильность (англ. volatility) — это статистический показатель, характеризующий изменчивость рыночной цены, дохода или фондового индекса, меняющихся со временем. Волатильность выражается в абсолютном или в относительном от начальной стоимости значении. Различают два вида волатильности: историческая волатильность (historical volatility) и ожидаемая волатильность или вмененная волатильность (implied volatility). Историческая волатильность обычно вычисляется как величина, равная стандартному отклонению стоимости финансового инструмента за заданный промежуток времени, рассчитанному на основе исторических данных о его стоимости. Ожидаемая волатильность вычисляется на основе текущей стоимости финансового инструмента в предположении, что его рыночная стоимость отражает ожидаемые риски.

Волатильность финансовых временных рядов играет ключевую роль при построении моделей для оценки стоимости производных финансовых инструментов, управления рисками, а также оптимизации инвестиционных портфелей. В ряде случаев динамика волатильности характеризуется значительной нелинейностью, что подразумевает, помимо кластеризации во времени и высоких значений коэффициента эксцесса, асимметрию отклика волатильности на шоки разных знаков (см., например, [1]-[5], [7]).

Настоящая работа посвящена изучению теоретических предпосылок и путей практической реализации методов предсказания значений волатильности фондовых индексов.

Основное содержание работы. Работа состоит из шести глав:

1. Различные аспекты понятия «волатильность»

2. AR модель

3. ARCH и GARCH (p, q) -модели временного ряда

4. Искусственные нейронные сети

5. Обучение нейронной сети

причем каждая глава содержит несколько разделов. В первой главе описаны методы вычисления волатильности.

Под волатильностью понимают изменчивость, вариацию во времени величины финансового или экономического показателя. В сущности, волатильность – статистический финансовый показатель, характеризующий изменчивость цены на что-либо. Волатильность на фондовом рынке используется как в качестве непосредственной меры риска, так и в качестве одной из важных величин, применяемых в более сложных методиках измерения риска (например, при измерении чувствительности цен облигаций и опционов).

Различают два типа волатильности: историческая волатильность и ожидаемая волатильность.

В некоторых случаях историческую волатильность различают с так называемой реализованной волатильностью, однако в настоящей работе эти понятия считаются синонимами. Таким образом, под реализованной волатильностью рынка мы понимаем оценку волатильности для некоторого горизонта, рассчитанную на основе изменений на меньших горизонтах. Пусть $P_{i,t}$ – равноотстоящие значения некоторого фондового индекса, соответствующие некоторому меньшему горизонту в пределах большего горизонта с номером t. Считаем, что внутри такого большего горизонта имеется T наблюдений $P_{i,t}$. Тогда соответствующие доходности определяются формулой

$$r_{i,t} = ln\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i-1,t}}\right),$$

а историческая (реализованная) волатильность определяется равенством

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{T}\left(r_{i,t} - \bar{r}_t\right)^2}{T-1}},$$

где

$$\bar{r}_t = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} r_{i,t}$$

– среднее значение доходности за соответствующий период времени. В дальнейшем, в практической части мы будем рассматривать еженедельные значения волатильности, вычисленные по ежедневным значениям доходности, т.е. в нашем случае *T*=7.

Следующая глава посвящена моделям авторегрессии.

Модели авторегрессии широко применяются в практике работы с временными рядами

Авторегрессионный процесс порядка p [AR(p)] – стохастический процесс $\mathrm{X_t}$:

$$X_t = \varphi_0 + \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \cdots + \varphi_p X_{t-p} + \alpha_t,$$

где α_t - белый шум $\mu_\alpha = 0$. Свободный член φ_0 часто приравнивается к нулю.

Используя функцию оператора лага

$$\varphi_p(L)X_t = \alpha_t$$

Авторегрессионный процесс первого порядка, AR(1)-процесс

$$X_{\,t} = c + \rho X_{\,t-1} + \varepsilon_{\,t},$$

где ρ — параметр модели (коэффициент авторегрессии),

c — постоянная (часто для упрощения предполагается равной нулю),

ε_t — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним и постоянной дисперсией.

Третья глава работы посвящена моделям временного ряда и включает в себя два раздела**:** ARCH и GARCH (p, q) -модели временного ряда.

Авторегрессионная условная гетероскедастичность — применяемая в эконометрике модель для анализа временных рядов, у которых условная дисперсия ряда зависит от прошлых значений ряда, прошлых значений этих дисперсий и иных факторов. Данные модели предназначены для «объяснения» кластеризации волатильности на финансовых рынках, когда периоды высокой волатильности длятся некоторое время, сменяясь затем периодами низкой волатильности, причём среднюю (долгосрочную, безусловную) волатильность можно считать относительно стабильной.

ARCH-модель предполагает зависимость условной дисперсии только от квадратов прошлых значений временного ряда. Обобщить данную модель можно предположив, что условная дисперсия зависит также от прошлых значений самой условной дисперсии. Это так называемый обобщённый ARCH (Generalized ARCH — GARCH).

Обобщенная авторегрессионная условная гетероскедастичность - (англ. GARCH; Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity)

Модель предполагает зависимость условной дисперсии не только от квадратов прошлых значений временного ряда, но и от прошлых значений самой условной дисперсии.

Наиболее часто используемыми на практике моделями является GARCH(1,1), а также ее обобщение GARCH(p, q):

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \, \sigma_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2$$

Данная модель позволяет отразить кластеризацию, то есть волатильности во времени и частично объяснить эффект «тяжелых хвостов».

ε_{t-j}^2 – случайное возмущение в момент времени t

σ_t^2 – условная дисперсия на момент времени t

ω – базовый уровень волатильности

α – коэффициент определяющий степень влияния прошлой информации на текущее значение волатильности.

Спецификация модели GARCH(1,1), для текущего значения условной дисперсии доходности актива включает как скользящую среднюю, так и авторегрессию

$$Y = X_I' \, \theta + \varepsilon_I$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

Условная дисперсия представлена как:

1. функция от константы ω
2. Новостях о случайных возмущениях в прошлом ε_{t-1}^2
3. Значениях условной дисперсии в прошлом σ_{t-1}^2

Данная модель позволяет отразить кластеризацию волатильности во времени и частично объяснить эффект «тяжелых хвостов». Однако с помощью модели не удается получить объяснение несимметричности отклика на шоки разных знаков. Поэтому ряд исследователей предложили альтернативные модели, позволяющие учитывать и эти эффекты.

Четвертая глава посвящена искусственным нейронным сетям. В этой главе объясняется что такое нейронная сеть, её преимущества, модели нейронов, функции активации и процесс обучения нейронной сети.

Нейронная сеть – это громадный распределённый параллельный процессор, соотносящий из элементарных единиц обработки информации, накапливающих экспериментальные знания и представляющих их для последующей обработки.

Нейронная сеть схожа с мозгом с двух точек зрения:

1. Знания поступают в нейронную сеть из окружающей среды и используются в процессе обучения.
2. Для накопления знаний применяются связи между нейронами, называемые синаптическими весами.

Использование нейронных сетей обеспечивает следующие полезные свойства систем.

1. Нелинейность
2. Отображение входной информации в входную
3. Адаптивность
4. Очевидность ответа
5. Контекстная информация
6. Отказоустойчивость
7. Масштабируемость
8. Единообразие анализа и проектирования

Нейрон представляет собой единицу обработки информации в нейронной сети. В модели нейрона можно выделить три основных элемента:

1. Набор синапсов или связей, каждый из которых характеризуется своим весом или силой. В частности, сигнал x_j, на входе синапса

j, связанного с нейроном k, умножается на вес w_{kj}. Важно обратить внимание на то, в каком порядке указаны индексы синоптического веса w_{kj}. Первый индекс относится к рассматриваемому нейрону, а второй – ко второму окончанию синапса, с которым связан вес.

2. Сумматор складывает входные сигналы, взвешенные относительно соответствующих синапсов нейрона. Эту операцию можно описать как линейную комбинацию
3. Функция активации ограничивает амплитуду входного сигнала нейрона. Также эта функция называется функцией сжатия. Обычно нормализованный диапазон амплитуд выхода нейрона лежит в интервале [0, 1] или [-1, 1]

В модели нейрона, включен пороговый элемент, который обозначается b_k. Эта величина отражает увеличение или уменьшение входного сигнала, подаваемого на функцию активации.

В математическом представлении функционирование нейрона k можно описать следующей парой уравнений:

$$u_k = \sum_{j=1}^{m} w_{kj} x_j$$

$$y_k = \varphi(u_k + b_k),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – входные сигналы; w_{k1}, $w_{k2}, \ldots, w_{km}$ – синаптические веса нейрона k; u_k – линейная комбинация входных воздействий; b_k- порог; $\varphi(\cdot)$ - функция активации; y_k – выходной сигнал нейрона. В модели показанной на рисунке постсинаптический потенциал вычисляется следующим образом:

$$v_k = u_k + b_k$$

Функции активации, представленные в формулах как $\varphi(v)$, определяют входной сигнал нейрона в зависимости от индуцированного локального поля v. Выделяют три основных типа функции активации.

1. Функция единичного скачка
2. Кусочно –линейная функция
3. Сигмоидальная функция

Рассмотрим сигмоидальную функцию. Она является самой распространённой функцией, используемой для создания искусственных нейронных сетей. Это быстро возрастающая функция, которая поддерживает баланс между линейным и нелинейным поведением. Примером сигмоидальной функции может служить логическая функция, задаваемая следующим выражением:

$$\varphi(v) = \frac{1}{1 + \exp(-av)},$$

где a – параметр наклона сигмоидальной функции.

Логическая функция, или, более точно, функция логического распределения описывает закон логического роста. Все процессы роста могут быть представлены функцией логического распределения

$$F(t) = \frac{1}{1 + \exp(\alpha t - \beta)},$$

где t – переменная времени; α и β – константы.

В следующей главе рассмотрен процесс обучения нейронной сети.

Самым важным свойством нейронных сетей является их способность обучаться на основе данных окружающей среды и в результате обучения повышать свою производительность.

Обучение – это процесс, в котором свободные параметры нейронной сети настраиваются посредством моделирования среды, в которую эта сеть встроена. Тип обучения определяется способом подстройки этих параметров.

Это определения процесса обучения предполагает следующую последовательность событий.

1. В нейронную сеть поступают стимулы из внешней среды.
2. В результате этого изменяются свободные параметры нейронной сети
3. После изменения внутренней структуры нейронная сеть отвечает на возбуждения уже иным образом.

Существуют три парадигмы обучения: "с учителем", "без учителя" (самообучение) и смешанная. В первом случае нейронная сеть располагает правильными ответами (выходами сети) на каждый входной пример. Веса настраиваются так, чтобы сеть производила ответы как можно более близкие к известным правильным ответам. Усиленный вариант обучения с учителем предполагает, что известна только критическая оценка правильности выхода нейронной сети, но не сами правильные значения выхода. Обучение без учителя не требует знания правильных ответов на каждый пример обучающей выборки. В этом случае раскрывается внутренняя структура данных или корреляции между образцами в системе данных, что позволяет распределить образцы по категориям. При смешанном обучении часть весов определяется посредством обучения с учителем, в то время как остальная получается с помощью самообучения.

Известны 4 основных типа правил обучения:

1. Правило коррекции по ошибке.
2. Обучение Больцмана.
3. Правило Хебба.
4. Обучение методом соревнования.

Практическая часть работы заключалась в прогнозировании волатильности фондового индекса S&P 500 и индекса МосБиржи с использованием нейросетевой и авторегрессионной моделей.

Для выполнения работы были использованы данные за каждый день проведения торгов. Данные взяты с сайта https://investfunds.ru

Что бы получить необходимый временной ряд еженедельных значений индекса для каждого дня (i) вычисляем доходности.

Далее для каждой недели (t) вычислили волатильность, где $\bar{r} = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{T} r_j$ и

$T = 7$

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{T}\left(r_j - \bar{r}\right)^2}{T-1}}$$

В работе использовались модель авторегрессии временного ряда, AR(p), модель искусственных многослойных нейронных сетей прямого распространения и пакет Neural Network Wizard для их эмуляции.

Использовались программы:

1. Microsoft Excel;
2. Gretl;
3. Neural Network Emulator (Neural Network Wizard).

В работе рассмотрена AR(1) модель. Исходными данными являются волатильности для каждой недели.

Аналогичный анализ был проведен и средствами модели искусственных многослойных нейронных сетей прямого распространения Neural Network Emulator и пакетом Neural Network Wizard. Для обучения был использован полученный ряд волатильности.

Построим авторегрессионную модель AR(1).

Рисунок 1 – авторегрессионная модель для индекса S&P 500

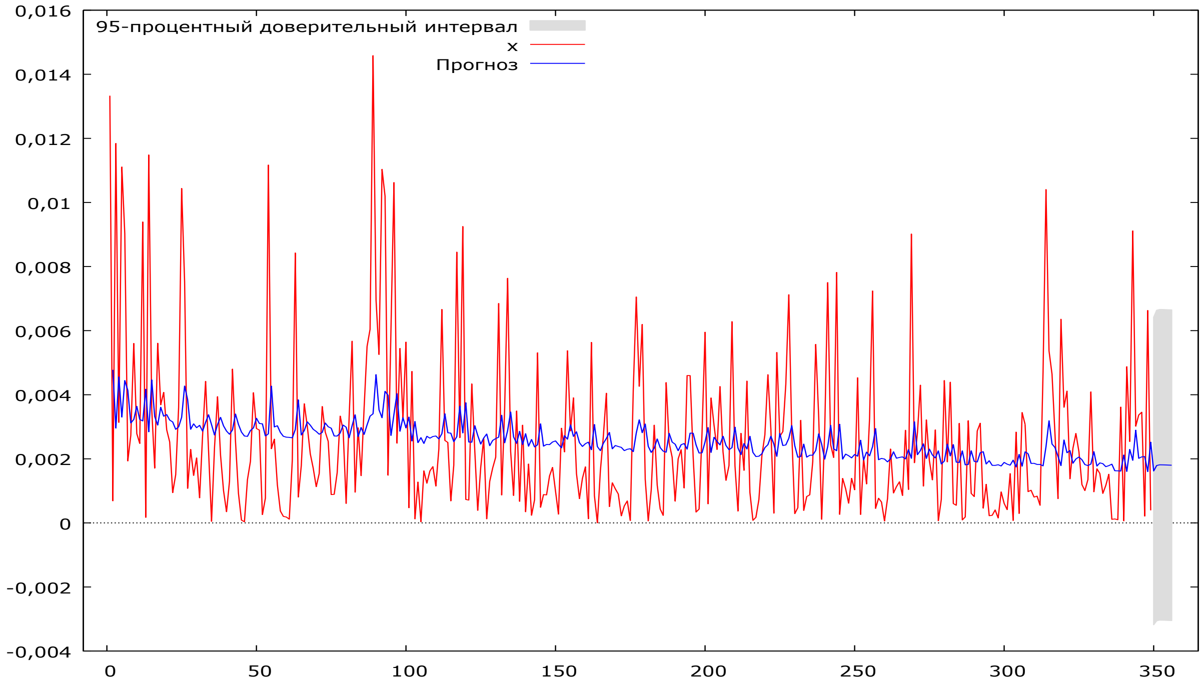

Таблица 1 – Прогнозные значения волатильности

Номер недели	**Реальные данные**	**AR(1) метод**	**Нейросетевая модель**
339	0,00361440	0,001618	0.00203558
340	0,00006333	0,002119	0.00203262
341	0,00487531	0,001605	0.00202966
342	0,00253801	0,002293	0.00202670
344	0,00301811	0,002894	0.00202075
345	0,00336888	0,002015	0.00201777
346	0,00345494	0,002061	0.00201479
347	0,00021191	0,002070	0.00201180
348	0,00662976	0,001601	0.00200881
349		0,002518	0.00203221
350		0,001619	0.00202922
351		0,001791	0.00202922
352		0,001812	0.00202323
353		0,001812	0.00202023
354		0,001808	0.00199737
355		0,001804	0.00199421
356		0,001799	0.00199421

Полученные результаты свительствуют о том, что с помощью нейросетевой модели можно прогнозировать волатильность не хуже, чем с использованием регрессионной модели.

Заключение. В работе рассмотрены две широко применяемые модели: авторегрессионная модель AR(p) и нейросетевая в целях предсказания условной волатильности фондовых индексов. В качестве примера был взят временной ряд еженедельных значений индекса S&P 500 и МосБиржи за последние десять лет. Модели сравнивались в терминах предсказательной силы вне обучающей выборки. Для аппроксимации истинной условной волатильности применялась реализовавшаяся (историческая) волатильность, вычисленная по ежедневным данным в пределах недели. Полученные результаты свидетельствуют о том, что аппроксимативные возможности нейросетевой модели в целом сопоставимы возможностям авторегрессионной модели.