МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической экономики

Формирование портфеля ценных бумаг с ограничением на кардинальность

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 441 группы

направления 09.03.03 Прикладная информатика

механико-математического факультета

Прядко Елизавета Степановна

Научный руководитель
профессор д.ф-м.н, профессор ______________________ С.И.Дудов

Зав. кафедрой
профессор д.ф-м.н ________________________ С.И.Дудов

Саратов 2020 г.

Введение. В современном мире любая сфера деятельности человека тесно связана с принятием решений в условиях неполноты информации.

Экономическое решение с учетом невозможных факторов неопределенности принимаются в рамках теории принятий решений – аналитического подхода к выбору наилучшего действия, то есть альтернативы, или последовательности действий. В зависимости от степени определенности возможных исходов или последствий различных действий, с которыми сталкивается лицо, принимающее решение (ЛПР), в теории принятия решений рассматриваются различные типы моделей, но в этой работе используется только один – выбор решения при риске, если каждое действие приводит к одному из множества возможных частных исходов. При этом каждый исход имеет вычисляемую вероятность появления. Предполагается, что ЛПР эти вероятности известны или их можно определить путем экспертных оценок. Проблема риска в настоящее время – одна из ключевых в экономической деятельности, в частности в управлении производством и финансами. Под риском обычно подразумевают вероятность (угрозу) потери лицом или организацией части своих ресурсов, недополучения доходов или появления дополнительных расходов в результате осуществления определенной производственной и финансовой политики. Учет этого фактора напрямую отпечатывается на итоге финансового решения.

Оптимизация структуры портфеля ценных рисковых бумаг формируется с учетом потребностей, целей и требований выгодоприобритателя портфеля.

Основным характером любой ценной бумаги является доходность и показатель риска. Под риском понимается возможность неполучения ожидаемого дохода или утраты (полной или частичной) средств, размещенных в данную ценную бумагу. Как правило ценные бумаги, обладают низкими показателями риска, дают небольшую доходность и наоборот. Отсюда можно сделать вывод, что риск избежать невозможно и учитывать его нужно обязательно. Поэтому при составлении плана покупки ценных бумаг используют понятие индивидуального риска.

Цель работы - изучение основ теории портфельного инвестирования и проведение вычислительных экспериментов по формированию портфеля на реальных данных с ограничением на кардинальность.

Для осуществления поставленной цели служат следующие задачи:

1. Изложение необходимых понятий;
2. Формирование теоретической основы для дальнейшего решения поставленных задач;
3. Изучение постановки и решения задачи в рамках теории Г. Марковица.
4. Формирование портфеля на основе экспериментальных данных.

Объект исследования – портфель ценных бумаг.

Предмет исследования – экспериментальное исследование влияния кардинальности на доходность портфеля ценных бумаг.

Основное содержание работы. Работа состоит из четырех разделов:

1. Проблема портфельного инвестирования.
2. Задача Г. Марковица.
3. Задача оптимального портфельного инвестирования с ограничением на кардинальность.
4. Формирование портфеля с ограничением на кардинальность на реальных дынных.

В первом разделе дается краткий обзор основных проблем портфельного инвестирования. При этом возникают вопросы:

1. Чему уделить основное внимание: риску всего портфеля или отдельных активов, входящих в него?
2. Как количественно измерить риск портфеля?
3. Можно ли снизить риск портфеля, изменяя веса активов в нем?
4. Если да, то как добиться снижения риска, обеспечив доходность портфеля, сравнимую с доходностью составляющих его активов?

При формировании инвестиционного портфеля следует руководствоваться следующими соображениями:

1. Безопасность вложения (неуязвимость инвестиций от потрясений на рынке инвестиционного капитала);
2. Стабильность получения дохода;
3. Ликвидность вложений, то есть их способность участвовать в немедленном приобретении товара (работ, услуг), или быстро и без потерь в цене превращаться в наличные деньги.

Основную проблему, которую необходимо решать при формировании портфеля ценных бумаг, составляет задача распределения инвесторов определенной суммы денег по различным альтернативным вложениям (например, акции, облигации, наличные деньги и др.) так, чтобы наилучшим образом достичь своих целей. В первую очередь инвестор стремится к получению максимального дохода за счет:

- выигрыша от благоприятного изменения курса акций;
- дивидендов;
- получения твердых процентов и т.д.

В принципе для создания портфеля ценных бумаг достаточно инвестировать деньги в какой-либо один вид финансовых активов. Но современная практика показывает, что такой однородный по содержанию портфель (или недиверсифицированный) встречается очень редко. Более распространённой формой является так называемый диверсифицированный портфель, то есть портфель с самыми разнообразными ценными бумагами.

Использование диверсифицированного портфеля элиминирует разброс в нормах доходности и различных финансовых активов. Иными словами, портфель состоящий из акций разноплановых компаний, обеспечивает стабильность и получение положительного результата.

Как известно, инвестиционный портфель можно рассматривать в качестве набора финансовых или реальных инвестиций. В узком понимании инвестиционный портфель – это совокупность ценных бумаг разного вида, степени ликвидности и срока действий, принадлежащая одному инвестору и управляемая как единое целое.

В 1952 г. Гарри Марковицем была опубликована фундаментальная работа, являющаяся основой подхода к инвестициям с точки зрения современной теории формирования инвестиционного портфеля. Подход Марковица основывается на предположении, что инвестор в данный момент времени имеет определенную сумму денег для инвестирования. Данная сумма будет инвестирована на конкретный промежуток времени, который назван периодом владения. В конце этого периода инвестор продает ценные бумаги, которые были изначально куплены, после чего:

1. Использует полученный в результате инвестирования доход на текущее потребление;
2. Реинвестирует полученный доход;
3. Делает все одновременно.

По сути инвестор не имеет сведений о будущей доходности большинства портфелей. Таким образом, он рассматривает уровень доходности, связанный с любым из портфелей, случайной переменной. Случайные переменные имеют ряд своих характеристик, некоторые из них – математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение. Марковиц утверждает, что решение инвестора должно основываться исключительно на этих характеристиках. То есть он должен оценивать ожидаемую доходность и стандартное отклонение каждого портфеля, а затем выбрать «наилучший» из них. В данном процессе определяющую роль играет интуиция. Математическое ожидание представляет собой меру потенциального вознаграждения, связанную с конкретным портфелем, а среднеквадратичное отклонение выступает в качестве меры риска. Далее проблема выбора инвестиционного портфеля рассматривается Г. Марковицем с помощью математической модели.

По сути инвестор не имеет сведений о будущей доходности большинства портфелей. Таким образом, он рассматривает уровень доходности, связанный с любым из портфелей, случайной переменной. Случайные переменные имеют ряд своих характеристик, некоторые из них – математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение. Марковиц утверждает, что решение инвестора

должно основываться исключительно на этих характеристиках. То есть он должен оценивать ожидаемую доходность и стандартное отклонение каждого портфеля, а затем выбрать «наилучший» из них. В данном процессе определяющую роль играет интуиция. Математическое ожидание представляет собой меру потенциального вознаграждения, связанную с конкретным портфелем, а среднеквадратичное отклонение выступает в качестве меры риска. Далее проблема выбора инвестиционного портфеля рассматривается Г. Марковицем с помощью математической модели.

Во втором разделе рассматривается структура задачи Г. Марковица и решение данной задачи.

Марковиц предложил теоретико-вероятностную формализацию понятий доходности и риска, что позволило перевести задачу выбора оптимального портфеля на язык математики. Именно он обратил внимание на общепринятую практику диверсификации и доказал, что инвесторы могут уменьшить стандартное отклонение доходности портфеля, выбирая акции, цены на которые меняются по-разному.

Теория портфельных инвестиций Марковица основывается на предложения:

1. Портфель является эффективным, если никакой другой портфель, не предлагает большую доходность при аналогичном или низшем уровне риска.
2. Инвесторы принимают среднее значение исторических или потенциальных значений ожидаемой доходности их инвестиций.
3. Показателями риска являются дисперсия и стандартное отклонение.
4. Все инвесторы принимают решения об инвестициях, исходя из ожидаемых показателей доходности и риска данных инвестиций.

Математическая формализация данной задачи звучит следующим образом: пусть инвестор формирует свой портфель сроком на один период владения из n различных рисковых ценных бумаг. Прогнозные значения ожидаемых доходностей ценных бумаг соответствующего вида задаются вектором $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)^T$. Считаем также, что известна матрица $V = (V_{ij})_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}}$, элементами которой являются ковариации

$V_{ij} = M[(R_i - m_i)(R_j - m_j)]$ случайных величин доходностей ценных бумаг *i-го и j-го* видов. Предполагается далее, что эта матрица является положительно определенной.

Далее уже будет рассмотрено построение самой задачи, которая основана на нахождение структуры портфеля$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, которая обеспечила бы достижение заданной ожидаемой доходности портфеля m_p с минимальным риском.

Математическая формулировка задачи Марковица имеет следующий вид:

$$D_p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j V_{ij} \to min_x,$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1,$$

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n = m_p.$$

Если примем обозначение $I = (1,1,\dots,1)^T \in R^n$, то математическую задачу можно переписать в матричной форме:

$$D_p = x^T V x \to min_x,$$

$$I^T x = 1,$$

$$m^T x = m_p.$$

Проведя некоторые математические выкладки, мы получим в результате следующую формулу для нахождения структуры нашего портфеля, которая и будет решением нашей задачи:

$$x^* = b + cm_p,$$

где векторы b и c находятся через V, I и m по определенным формулам.

Также будут рассмотрены свойства эффективных решений:

1. Структура оптимального портфеля, то есть доли вложения капитала x_i меняются линейно, а именно $x_i = b_i + c_i m_p$

$(i = 1, 2, \dots, n)$. Уменьшение или увеличение этих долей зависит от знаков компонент вектора $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$. Поскольку сумма долей ровна единице, то с ростом значения уровня доходности m_p, начиная с некоторых, часть долей будет отрицательной, а остальные положительными. Возникает естественное предположение, что положительные значения долей соответствуют более высокодоходным ценным бумагам, а отрицательные – менее доходным.

2. Риск оптимального портфеля возрастает с ростом ожидаемой доходности. При возможности операции «короткая продажа» достижима сколь угодно высокая доходность при соответственно растущем риске. При невозможности данной операции максимальной доходностью обладает портфель, образованный из актива с максимальной ожидаемой доходностью. Функция $\sigma_p = f_1(m_p)$, выражающая зависимость риска от ожидаемой доходности, является выпуклой, поскольку $f_1''(m_p) > 0$. При этом, если функция $f_2(m_p)$ выражает зависимость риска от ожидаемой доходности при невозможности операции «короткая продажа», то имеет место соотношение $f_2(m_p) \geq f_1(m_p)$.
3. Получим структуру и характеристики эффективного портфеля, который обладает наименьшим из всех оптимальных по Марковицу портфелей риском.

$$(\sigma_p^*)^2 = \frac{a_{11}}{d} \left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)^2 - \frac{2a_{12}}{d}\frac{a_{12}}{a_{11}} + \frac{a_{22}}{d} = \frac{1}{d}\left(\frac{{a_{12}}^2}{a_{11}} - \frac{2{a_{12}}^2}{a_{11}} + a_{22}\right)$$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{a_{22}a_{11} - {a_{12}}^2}{a_{11}}\right) = \frac{1}{a_{11}},$$

то есть $\sigma_p^* = (a_{11})^{-\frac{1}{2}}$, где d и a_{ij} – следующие числовые значения:

$$a_{11} = I^T V^{-1} I,$$
$$a_{12} = I^T V^{-1} m,$$
$$a_{22} = \frac{\lambda_1}{2} m^T V^{-1},$$
$$d = a_{11} a_{22} - a_{12}^2$$

В третьем разделе рассматривается модель Марковица, дополненная ограничениями на размер долей, инвестируемых в активы, и ограничением на кардинальность, то есть на максимальное количество активов в портфеле.

Стандартная модель Марковица предполагает, что совершенный рынок – это рынок без транзакционных издержек и налогов, где короткие продажи не допускаются, а активы могут дробиться бесконечно и поэтому могут продаваться в любых неотрицательных пропорциях. Красота этой упрощенной модели риск-доходность (без ограничений) заключается в том, что она способна быть расширена для учета реалий рынка.

Решение задачи Марковица предполагает, что портфель может содержать любое количество активов из предложенного набора в сколь угодно малых или больших долях. Однако это не соответствует реальности. Обычно на рынке предлагается огромное количество активов, а на число активов портфеля накладывается ограничение – кардинальность числа активов.

Введение единственного ограничения на кардинальность числа активов в задаче Марковица, присутствующих в портфеле, меняет классическую модель квадратичной оптимизации на смешанно-целочисленную задачу квадратичного программирования (СЦЗКП), которая является NP-сложной.

Вводим необходимые обозначения и рассматриваем следующую модель Марковица с дискретными ограничениями на размер доли, инвестируемой в актив, и ограничениями на кардинальность: найти минимум квадратичной формы

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = \rho,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$

$$l_i\,\delta_i \le x_i \le u_i\,\delta_i, \qquad i = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i = K,$$

$$\delta_i = 0 \text{ и } 1, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Введение ограничения на кардинальность числа активов, присутствующих в портфеле, меняет классическую модель квадратичной оптимизации на смешанно-целочисленную задачу квадратичного программирования (СЦЗКП), которая является NP-полной. Поскольку для СЦЗКП трудно найти оптимальное решение, многие исследователи и трейдеры используют эвристики, т.е. неточные методы решения задач в этой области. В следующем параграфе, развивая идеи статьи, для нахождения эффективной границы для портфелей с ограничением на кардинальность мы предлагаем алгоритм, основанный на использовании метаэвристических подходов, в частности генетического алгоритма.

В четвертом разделе будем строить портфель на реальных данных. Для того, чтобы провести анализ рынка ценных бумаг и составить портфель, нам необходимо рассмотреть несколько компаний. Рассмотрим четыре акции: Аэрофлот, Лукойл, Сбербанк, Магнит. Для создания оптимального портфеля будем брать максимальную цену акций за определенный период, а именно с сентября по декабрь 2019 года.

Для того чтобы узнать стоимость акций, воспользуемся сайтом *finam.ru*, разделом «экспорт данных». Удобство данного сайта заключатся в том, что мы можем получить любые данные о любой компании за определенный период времени.

Необходимые данные мы будем подсчитывать с помощью функций Excel и на основе полученных данных будем создавать портфель.

Рассмотрим четыре вида актива: акции Аэрофлота, акции Лукойла, акции Сбербанка, акции Магнита. Построим ковариационную матрицу для четырех портфелей.

V	Ковариационная матрица		
	АЭРОФЛОТ	ЛУКОЙЛ	СБЕРБАНК
АЭРОФЛОТ	0,00053	0,00001	0,00019
ЛУКОЙЛ	0,00001	0,00072	0,00025
СБЕРБАНК	0,00019	0,00025	0,00031

V	Ковариационная матрица		
	АЭРОФЛОТ	СБЕРБАНК	МАГНИТ
АЭРОФЛОТ	0,00053	0,00019	0,00020
СБЕРБАНК	0,00019	0,00031	-0,00003
МАГНИТ	0,00020	-0,00003	0,00050

V	Ковариационная матрица		
	АЭРОФЛОТ	ЛУКОЙЛ	МАГНИТ
АЭРОФЛОТ	0,00053	0,00001	0,00020
ЛУКОЙЛ	0,00001	0,00072	-0,00003
МАГНИТ	0,00020	-0,00003	0,00050

V	Ковариационная матрица		
	ЛУКОЙЛ	СБЕРБАНК	МАГНИТ
ЛУКОЙЛ	0,00072	0,00025	-0,00003
СБЕРБАНК	0,00025	0,00031	-0,00003
МАГНИТ	-0,00003	-0,00003	0,00050

Рисунок 1 – Матрицы ковариации для составленных портфелей.

Проведенные вычислительные эксперименты состояли в следующем:

1. Для каждого из вариантов портфеля (по включаемым видам активов) решена задача Марковица для диапазона значений ожидаемой доходности от 0.1 до 1 (или от 10% до 100%) с шагом 0.005;
2. Для каждого варианта портфеля построен соответствующий фронт Марковица;
3. Проведен сравнительный анализ результатов экспериментов.

Заключение. Задача работы состояла в том, чтобы изучить понятие портфельного инвестирования и рассмотреть решение задачи Марковица по оптимизации портфеля. Далее нам предстояло рассмотреть формирование портфеля в реальных условиях и выявить некие тенденции.

Для оптимизации работы были созданы программные продукты на языке PHP и описаны в разделе приложения. Там же и приведена инструкция пользования.

Не стоит забывать тот факт, что конечный выбор портфеля зависит от личных интересов инвестора.