

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

**Влияние топологии межэлементных связей  
на процессы синхронизации в сети фазовых осцилляторов Курамото:  
разработка программного кода и численное моделирование**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 235 группы

направления 09.04.02 «Информационные системы и технологии»

Факультета нелинейных процессов

Десятова Игоря Владимировича

Научный руководитель

профессор, д.ф.-м.н., доцент

\_\_\_\_\_

подпись, дата

О.И. Москаленко

Зав. кафедрой физики открытых систем

д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_

подпись, дата

А.А. Короновский

Саратов 2020

## ВВЕДЕНИЕ

Феномен синхронизации довольно широко распространён в природных и социальных явлениях. Примерами могут служить осцилляции светлячков, лазеров, нейронов и клеток сердца. Одной из получивших популярность моделей является модель фазовых осцилляторов Курамото. Она определяется как система самоподдерживающихся фазовых осцилляторов, колеблющихся с определенной внутренней частотой, связанных через разность синусов их фаз. Эта модель демонстрирует при критическом значении параметра связи переход к коллективному поведению.

Параллельно этому развивалась наука о сетях, которая принесла с собой новые взгляды на описание реальных сетей, а также улучшила понимание сложных процессов в динамических системах. Исследователи изучали то, как разные топологии сети могут влиять на параметры динамических процессов, таких как: распространение эпидемий, синхронизация, лавинообразные информационно-социальные явления. Эти интересные темы мотивировали многих исследователей на научные изыскания в данных областях.

Целью магистерской работы является изучение явления глобальной синхронизации в сетях различных топологий при помощи программного моделирования.

В магистерской работе было выполнено написание программы на языке программирования Python для анализа влияния топологии межэлементных связей на процессы синхронизации в сети. Особое внимание было уделено топологическому параметру, от которого напрямую зависит объем вычислений – количеству осцилляторов. Было показано, что необходимые вычисления можно выполнить на персональном компьютере при достаточном уровне оптимизации. Был выполнен обзор литературы, посвященной использованию теории сетей со сложной топологией и изучению процессов синхронизации для описания прикладных задач.

Данная работа состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы.

# ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

## 1. Методы и модели

Модель Курамото состоит из популяции  $N$  осцилляторов, подчиняющихся уравнению

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где  $\theta_i$  обозначает фазу  $i$ -го осциллятора,  $\lambda$  – силу связи, а  $\omega_i$  – собственные частоты, которые распределены в соответствии с заданной плотностью вероятности  $g(\omega)$ .

В своем первоначальном подходе Курамото считал  $g(\omega)$  унимодальным и симметричным распределением с центром в точке  $\omega = \underline{\omega}$ . В дальнейшем в данной работе будем считать среднюю частоту  $\underline{\omega} = 0$ . Курамото дополнительно ввел параметр порядка

$$r e^{i\psi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)}, \quad (2)$$

который нужен для того, чтобы количественно оценить общую синхронность популяции осцилляторов. Эта величина интерпретируется как центр множества  $N$  точек соответствующих, фазам  $\theta_j$ , распределенным на единичной окружности на комплексной плоскости. Если фазы имеют равномерный разброс в диапазоне  $[0, 2\pi]$ , то  $r \approx 0$ , означая, что осцилляторы несинхронны. С другой стороны, когда фазы всех осцилляторов сгруппированы в синхронный кластер, соответствующий некоторой средней фазе  $\psi(t)$ , тогда  $R \approx 1$ .

В данной магистерской работе использовалось модифицированное уравнение (1) в виде:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \lambda \sum_{j=1}^N A_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3)$$

где  $A_{ij}$  – матрица связи, определяющая топологию сети.

## 2. Примеры практического использования сложных сетей

Если опустить тему синхронизации и остановиться на сложных сетях, то можно привести множество примеров практического использования теории сложных сетей в прикладных задачах.

Одной из таких тем являются социальные сети. Социальные сети – это сети социальных взаимоотношений между людьми. Этот аспект привлекает внимание многих исследователей и важен для различных сфер. Одним из доступных примеров служит пост С. Вольфрама, где он наглядно разбирает некоторые из возможностей анализа социального поведения людей средствами *Wolfram Mathematica*. Графическим представлением сети является граф. Графы социальных сетей строятся на основании анализа графа связей одного конкретного пользователя. Он имеет вид, представленный на рисунке 1.

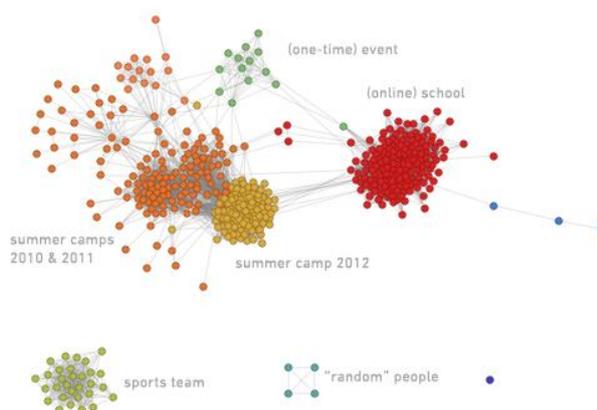


Рисунок 1 – Граф друзей дочери С Вольфрама.

Графы используются банками, крупными корпорациями и инвестиционными фондами для оценки уровня рисков при инвестициях в технологию или стек технологий. Этот анализ связан с изучением количества связей между: научными направлениями обеспечивающими данную технологию, промышленными факторами (подрядчиками), количеством инвестиций и анализом инвесторов проекта.

Использование графов подходит для маркетинговых исследований в

области оценки перспектив медийных проектов на рынках других стран. Образ героев и модели поведения новых медиа-рынков в значительной мере отличаются от тех, что были на изначальном рынке медиапродукта. Подобные исследования этнокультурного характера проводятся, к примеру, по маркерам одобрений при переписке пользователей Twitter в различных социальных группах.

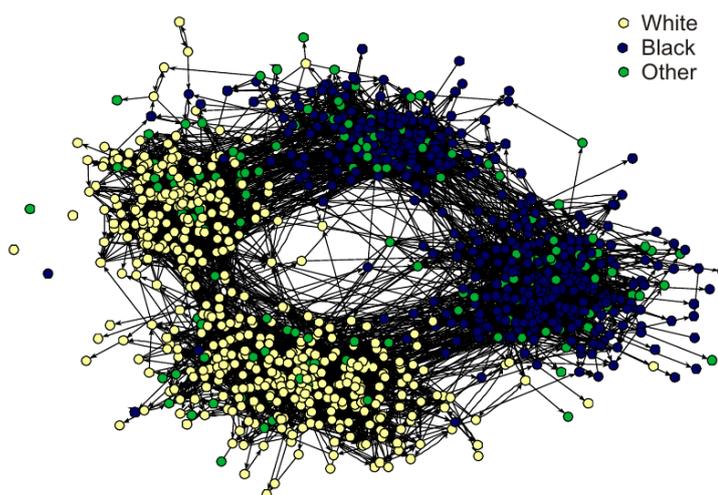


Рисунок 2 – Сеть дружбы в отдельно взятой американской школе как пример “структуры сообщества” социальной сети.

Занимательный пример можно привести из трудов по лекциям Юрия Лифшица. На рисунке 2 приведен граф дружеских связей, составленный по опросу, проведённому в одной из американских школ. При построении сети добавлялось ориентированное ребро из  $A$  в  $B$ , если школьник  $A$  говорил, что  $B$  – его друг (но не наоборот). Вершины в графе раскрашены в соответствии с расовой принадлежностью школьника. Явное разделение между верхней и нижней частью сети связано с тем, что в школе есть ученики малых и старших классов, которые мало общаются между собой.

В последнее время всё более актуальной становятся темы, связанные с медициной и биологией. Сложные сети используются для построения схем объектов из раздела молекулярной биологии. Молекулярная биология занимается изучением всех клеточных процессов с участием ДНК, РНК, белков

и метаболитов.

Подводя итог по теме сложных сетей, можно отметить прикладную значимость данной темы. Представление объектов и связей между объектами в виде графов, и создание абстрактных моделей на их основе позволяет исследователям выделить интересующую особенность системы объектов, без погружения в большое количество деталей.

### **3. Моделирование**

Была поставлена задача: создание программы, позволяющей анализировать синхронизацию в сетях с разной топологией и различными начальными параметрами. Требования: скорость разработки, современные средства визуализации, практическая проверенность в исследуемой сфере, поддержка сообщества, наличие современных библиотек, возможность оптимизации, скорость вычислений. На основании сформулированных требований был проведён обзор доступных средств для моделирования сетей осцилляторов. В ходе него были изучены возможности программного пакета Wolfram Mathematica. От данного пакета было решено отказаться ввиду отсутствия возможности доработки кода данного продукта в случаях отсутствия необходимых встроенных функций. Решено было изучить возможности среды разработки Fortran, так как она использовалась и продолжает использоваться для разработки программ для научных вычислений. Учитывая ограниченные возможности разработчика, было решено отказаться от использования языка в силу трудоёмкого процесса разработки, проблем с отладкой, отсутствием расширяемых библиотек и затрудненным анализом ошибок кода. Далее было решено перейти к изучению последнего опыта исследователей и узнать возможности открытых продуктов на веб-сервисе для хостинга IT-проектов GitHub. Проанализировав программы, имеющиеся в наличии, был сделан вывод о том, что продуктов позволяющих решить поставленную задачу в полном объёме, обнаружить не удалось. Было решено создать собственную программу, отвечающую всем необходимым требованиям.

Для написания программы был выбран язык программирования Python в виду наличия широкой поддержки сообщества, минималистичного синтаксиса, отлаженной системы поиска ошибок, удобных и открытых сред разработки. Моделируя сети осцилляторов, необходимо создание сетевой структуры, являющейся графом. Работу с графами в Python способна обеспечить библиотека NetworkX, предоставляющая набор стандартных функций для создания графов. Созданный граф является объектом и может быть отредактирован пользователем. Возможно создание одного графа из нескольких, получение матрицы связности графа, списка вершин, списка границ и многое другое. Далее следует упомянуть библиотеку matplotlib, с помощью которой можно создавать графики по набору данных. Для получения достоверных результатов необходимо собрать данные от набора сетей одинаковой топологии. В описанных условиях наличие больших вычислительных ресурсов означает более точные выходные результаты. Для ускорения вычислений было решено перенести вычислительную нагрузку с CPU на GPU.

Для поставленной задачи была использована библиотека pyopencl, предоставляющая возможность запускать программы на GPU, используя технологию OpenCL. Данная технология поддерживается большинством вендоров видеокарт, и обеспечивает относительную независимость от внутренней архитектуры используемой видеокарты.

Таким образом, созданная программа позволяет моделировать сети осцилляторов нужной топологии и собирать статистические усредненные по набору данные.

#### **4. Детектирование синхронизации**

В настоящей работе для детектирования синхронизации в сети фазовых осцилляторов Курамото использовался метод, предполагающий нахождение параметра порядка  $r$ , определяемый согласно уравнению (2). Параметр порядка демонстрирует степень сплоченности фаз ансамбля осцилляторов, и может

изменяться в пределах  $[0, 1]$ , где 1 соответствует состоянию глобальной синхронизации системы.

В целях более наглядного представления связи параметра порядка и наличия, либо отсутствия состояния глобальной синхронизации в системе фазовых осцилляторов Курамото проведём следующие действия. Вычислим фазы осцилляторов по формуле (3) и получим значения фаз в радианах. Для более наглядного представления преобразуем фазы осцилляторов из радиан в безразмерную величину по формуле:

$$\theta_i = \sin(\theta_{rad_i} \bmod 2\pi), i = 1, 2, \dots, osc. \quad (4)$$

где  $\theta_{rad}$  – фаза  $i$ -го осциллятора,  $\theta$  – синус фазы  $i$ -го осциллятора,  $i$  – номер осциллятора,  $osc$  – число осцилляторов в системе.

## 5. Сети, рассматриваемые в работе

Существует множество работ, посвященных процессам синхронизации в сетях сложных топологий. Для использования в настоящей работе, было выбрано несколько наиболее актуальных примеров.

### 5.1. Регулярные сети

Это сети, которые устроены одинаково. Они имеют чёткую структуру. Формы и виды данной топологии могут быть различны. К примеру, это могут быть кольца, решётки или более сложные структуры, например тор. Но различие форм и видов сохраняет их главное качество: они имеют четкую структуру в своей основе.

### 5.2 Случайные сети

Сети данной топологии создаются при помощи различных алгоритмов. Главной отличительной особенностью сетей данного типа является отсутствие каких-либо закономерностей, кроме вероятностных. Наиболее часто

используемый алгоритм генерации таких сетей – это модель Эрдеша-Реньи.

### 5.3 Сети топологии «малый мир»

Сеть «мир тесен», именуемая также «малый мир» – это тип математического графа, в котором большинство узлов не является соседями друг друга, но при этом добраться от одного узла до другого можно за небольшое количество шагов. В частности, сеть малого мира характеризуется как сеть, в которой типичное расстояние  $L$  между двумя случайно выбранными узлами (требуемое количество шагов) увеличивается пропорционально логарифму числа узлов  $N$  в сети, то есть  $L \sim \log N$ . При этом, коэффициент кластеризации  $C$  не мал. В контексте социальной сети это приводит к тому, что многие незнакомцы связаны короткой цепочкой знакомств. Многие эмпирические графики показывают эффект малого мира, что характерно для социальных сетей, таких как, например, Википедия, геномных сетей и даже основной архитектуры Интернета.

Построение модели сети “малый мир” основано на процедуре переподключений для того, чтобы сделать плавный переход между регулярным графом и случайным графом. Начиная с регулярной кольцевой решётки с  $v$  вершинами и  $k$  рёбрами на каждую вершину, каждое ребро случайно переподключают с вероятностью  $p$ . Подобный подход позволяет в случае  $p=0$  наблюдать регулярный граф, в случае  $p=1$  – случайный граф, а при  $0 < p < 1$  – переход между ними.

### 5.4 Свободно масштабируемые сети

Безмасштабная сеть – это сеть, распределение степеней которой асимптотически подчиняется степенному закону. Вероятность  $P_i$  того, что  $i$ -ый узел будет иметь  $k$  связей, для больших значений  $k$  подчиняется степенному закону  $P(k) \sim k^{-\gamma}$ , где  $\gamma$  – это параметр, значение которого находится в диапазоне  $2 < \gamma < 3$ .

Безмасштабные сети строятся путём прикрепления новых узлов, каждый с  $k$  гранями. В процессе соединения предпочтение отдаётся узлам с высшими степенями.

Известны попытки присвоить многим реальным сетям статус безмасштабных. Некоторые из них являются спорными. Также существует ряд методов для объяснения законов распределения степеней в реальных сетях.

Наиболее заметной характеристикой в безмасштабной сети является относительная общность вершин со степенью, значительно превышающей среднее значение. Узлы наивысшей степени часто называют “концентраторами” и считается, что они служат определённым целям в своих сетях, хотя это сильно зависит от предназначения самой сети.

Свойство безмасштабности тесно связано с устойчивостью сети к сбоям. Оказывается, что за крупными хабами следуют более мелкие. За этими меньшими концентраторами, в свою очередь, следуют ещё более меньшие и так далее. Эта иерархия создаёт отказоустойчивое поведение. Если сбой происходит случайным образом и подавляющее большинство узлов – это узлы с небольшой степенью, вероятность того, что хаб будет затронут, практически ничтожна. Даже если произойдёт сбой концентратора, сеть, как правило, не потеряет связность из-за оставшихся концентраторов. С другой стороны, если выбрать несколько крупных концентраторов и вывести их из сети, сеть превратится в набор довольно изолированных графов.

Таким образом, концентраторы являются как сильной, так и слабой стороной безмасштабных сетей.

## **5.5. Полносвязные сети**

Главным критерием полносвязной сети является наличие главной характеристики: каждый узел сети связан со всеми остальными, число связей в такой сети  $n(n-1)/2$ , где  $n$  – это количество узлов. Модель с топологией полносвязной сети была описана в предыдущей главе, посвященной детектированию синхронизации.

## 6. Практические исследования

Описав интересные топологии сетей и методы исследования систем связанных осцилляторов Курамото, перейдем к практической части исследования.

Рассмотрим классическое изучение влияния коэффициента связи на параметр порядка системы. Как отмечалось выше, значение  $r$  может лежать в диапазоне  $[0, 1]$ . Минимальное значение соответствует отсутствию синхронизации в сети, максимальное – полной синхронизации в системе. На рисунке 3 представлены результаты для наиболее общего случая – случайной топологии. Количество осцилляторов  $n=100$ . На графике показано плавное увеличение параметра  $r$  до единицы при увеличении коэффициента связи, что соответствует ожидаемому поведению системы осцилляторов Курамото.

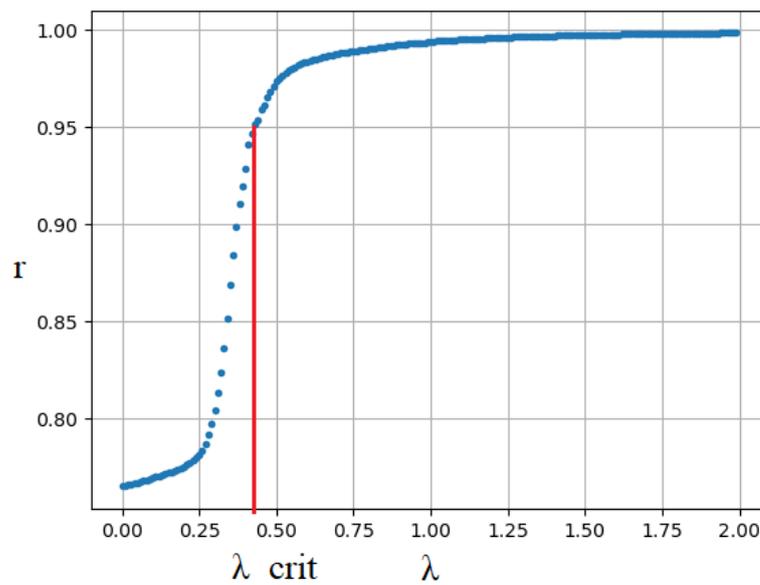


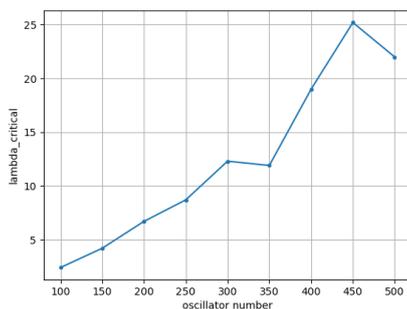
Рисунок 3 – Зависимость параметра порядка  $r$  от коэффициента связи  $\lambda$ . На графике отмечено, как при достижении определенного порогового значения  $\lambda_{crit}$  система переходит в режим глобальной синхронизации. Это значит, что можно исследовать зависимость данного показателя от топологических параметров

Для графика на рисунке 3 и всех последующих построенных графиков

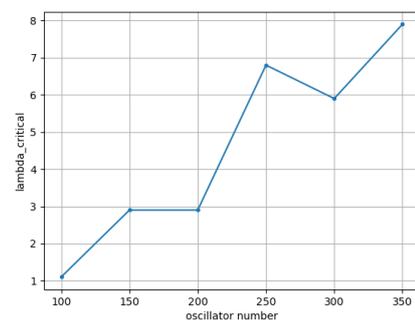
усреднение было проведено по двадцати системам с различными начальными условиями. Стоит отметить, что каждая система не имеет наследования начальных условий.

Перейдем к исследованию влияния топологии сети на установление синхронизации. Данные наблюдения можно провести, построив зависимости  $r(\lambda)$  для различных значений выбранного параметра. В данной работе таким параметром является количество осцилляторов. Далее, для каждого вида топологии рассмотрим влияние изменения количества осцилляторов на поведение системы.

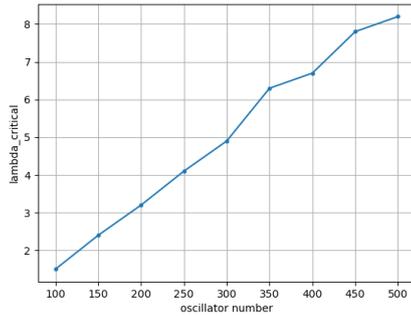
Были смоделированы системы с количеством осцилляторов из интервала  $[100, 500]$  и построены графики зависимости  $\lambda_{crit}$  от количества осцилляторов  $osc$ . Полученные результаты представлены на рисунке 4. Из рисунка виден близкий к линейному рост зависимости для сети малый мир, случайной сети, полученной из сети «малый мир», и безмасштабной сети. Регулярная сеть с топологией «кольцо», построенная на основе сети «малый мир» не отображает глобальной синхронизации. Полносвязная и случайная сети не демонстрируют рост порогового значения глобальной синхронизации  $\lambda_{crit}$  при росте числа осцилляторов в системе.



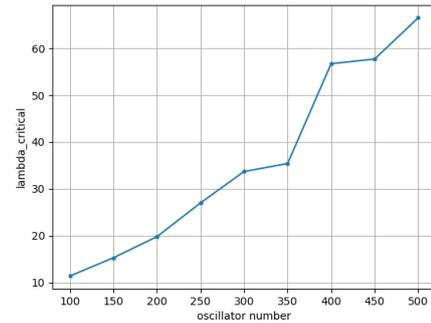
Сеть малый мир



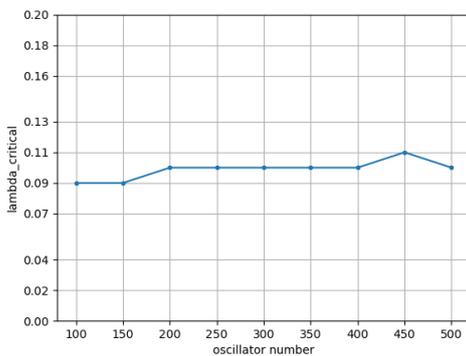
Регулярная-малый мир



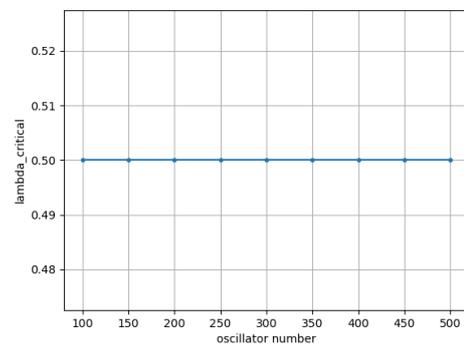
Случайная - малый мир



Безмасштабная сеть



Полносвязная сеть



Случайная сеть

Рисунок 4 – Зависимость  $\lambda_{crit}(osc)$  для 6 различных топологий

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной магистерской работе были смоделированы самые распространенные топологии сетей. Изучено влияние топологии межэлементных связей на процессы синхронизации, протекающие в сети.

Данная работа доказала возможность осуществлять численные эксперименты в данной научной области без использования высокопроизводительных кластеров в случае оптимизации программы под специфику поставленной задачи. Исходя из вышесказанного, можно подытожить: язык Python прекрасно подходит для решения задач, сходных задаче, решенной в данной работе. Наличие постоянно совершенствуемых библиотек и возможность глубокой оптимизации делают его желанным

помощником исследователя, интересующегося вопросами синхронизации в сетях.

В ходе работы был создан программный продукт, предназначенный для моделирования сети осцилляторов и сбора статистических данных смоделированной системы. Сети осцилляторов могут быть построены на основе матриц смежности графов, загружаемых со стороны предполагаемого пользователя. Проект был размещен на открытом хостинге IT проектов GitHub под MIT лицензией открытого программного обеспечения.