

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

**Численное исследование обобщённой синхронизации в двух
однонаправленно связанных системах с бистабильным типом аттрактора**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 2 курса 235 группы

Направления 09.04.02.«Информационные системы и технологии»

код и наименование направления

Факультета нелинейных процессов

наименование факультета

Никоновой Ксении Евгеньевны

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

профессор, д.ф.-м.н., доцент

должность, уч. ст., уч. зв.

личная подпись, дата

О.И. Москаленко

инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой

д.ф.-м.н., профессор

должность, уч. ст., уч. зв.

личная подпись, дата

А.А. Короновский

инициалы, фамилия

Саратов 2020

Характеристика работы

Работа посвящена разработке программы для численного моделирования двух однонаправленно связанных хаотических систем с бистабильным типом аттрактора и исследованию на ее основе особенностей режима обобщённой синхронизации и явлений, имеющих место вблизи ее границы, в таких системах.

Целью настоящей магистерской работы является установление наличия обобщённой синхронизации в системе двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов, характеризующихся бистабильным типом аттрактора, выявление механизмов возникновения этого режима с помощью метода вспомогательной системы, а также исследование характеристики перемежающегося поведения, которое имеет место вблизи границы обобщённой синхронизации в двух однонаправленно связанных осцилляторах Лоренца и генераторах Чуа.

В работе было использовано 30 литературных источников.

Содержание работы

Во Введении обосновывается актуальность работы, дается общее представление о явлении обобщённой синхронизации, методах диагностирования этого режима, описывается перемежающееся поведение, имеющее место на границе обобщённой синхронизации. Указывается новизна работы и научная значимость.

Синхронизация колебаний динамических систем является на данный момент одним из наиболее интересных нелинейных явлений. Интерес к синхронному поведению определён большим кругом задач, в которых оно может быть применено, например, при скрытой передаче информации¹, в физических, биологических, химических и других системах².

¹ Parlitz U., Chua L.O., Kocarev L., Halle K.S., Shang A. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1992. Vol. 2(4). P. 973–977

² И.И. Блехман: «Синхронизация динамических систем», изд. «Наука», Москва, 1971

Одним из типов синхронного поведения, представляющих наибольший интерес, является режим обобщённой синхронизации. Он предполагает, что состояния взаимодействующих систем становятся связанными между собой при помощи функционального соотношения. Для детектирования в нелинейных динамических системах режима обобщённой синхронизации применяют метод расчёта спектра показателей Ляпунова³, метод ближайших соседей⁴ или метод фазовых трубок, а также достаточно просто реализуемый на практике метод вспомогательной системы⁵.

Одной из важных составляющих в изучении явления синхронизации является анализ перемежающегося поведения, которое наблюдается в непосредственной близости к границе режима обобщённой синхронизации в системах с бистабильным типом аттрактора. Под перемежаемостью можно понимать вид сигнала, в котором происходит случайное чередование регулярных фаз и относительно коротких нерегулярных всплесков.

В настоящее время режим обобщённой синхронизации подвергается активному исследованию: созданы новые методы для обнаружения этого режима синхронного поведения, установлены механизмы его возникновения в системах с различным типом связи, а также проведён анализ особенности поведения границы возникновения синхронного поведения при изменении значений управляющих параметров. Несмотря на большое количество работ посвящённых этой теме, достаточно хорошо режим обобщённой синхронизации исследован только для систем с простой топологией аттрактора. Применительно к системам со сложной топологией аттрактора режим обобщённой синхронизации и перемежающееся поведение на его границе изучено значительно хуже. Научная новизна результатов, которые представлены работе, состоит в том, чтобы установить общие закономерности

³ Pyragas K. // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 56. N 5. P. 5183–5188.

⁴ Rulkov N. F., Sushchik M. M., Tsimring L. S., Abarbanel H. D.I. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. Phys. Rev. E. 51 (2) (1995) 980-994

⁵ А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов. Хаотическая синхронизация в открытых системах. М-во образования и науки Российской Федерации, ФГБОУ высш. проф. образования "Саратовский гос. ун-т им. Н. Г. Чернышевского". - [Саратов]: Новый ветер, 2012. - 107 с.

такого типа синхронизации для связанных динамических систем с однонаправленной связью и обнаружить механизмы их формирования в системах, характеризующихся бистабильным типом аттрактора. В настоящее время остаётся нерассмотренным ряд вопросов, связанных с исследованием режима обобщённой синхронизации в таких системах, которые требуют более детального рассмотрения.

Настоящая работа направлена на систематическое изучение поведения однонаправленно связанных систем на границе обобщённой синхронизации, где наблюдается перемежающееся поведение. В работе основное внимание уделено выявлению статистических закономерностей возникновения режима обобщённой синхронизации на примере систем Лоренца и Чуа, характеризующихся бистабильным типом аттрактора.

В **разделе 1** работы описывается теория обобщённой синхронизации и один из способов диагностирования этого режима в двух однонаправленно связанных системах с бистабильным типом аттрактора – метод вспомогательной системы. Этот метод используется также для определения характеристик перемежающегося поведения, имеющего место вблизи границы этого режима.

В рамках данного метода совместно с ведомой системой вводится вспомогательная система, которая идентична ей по управляющим параметрам, но имеет небольшое отклонение в начальных условиях. При наличии в исходной системе обобщённой синхронизации ведомая и вспомогательная системы будут иметь полностью одинаковые траектории, в то время как в отсутствие синхронного режима эти траектории будут достаточно сильно отличаться друг от друга. В режиме перемежающейся обобщённой синхронизации состояния ведомой и вспомогательной систем будут то совпадать, то различаться, попеременно сменяя друг друга.

В **разделе 2** работы проводится численное исследование обобщённой синхронизации в двух однонаправленно связанных системах со сложной топологией аттрактора. Получены и проанализированы характеристики

перемежающегося поведения, имеющего место вблизи границы этого режима синхронизации на примере однонаправленно связанных систем Лоренца и Чуа.

Динамика двух однонаправленно связанных систем Лоренца, одна из которых является ведущей, а другая – ведомой, описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= \sigma(y_d - x_d) & \dot{x}_r &= \sigma(y_r - x_r) + \varepsilon(x_d - x_r) \\ \dot{y}_d &= r_d x_d - y_d - x_d z_d & \dot{y}_r &= r_r x_r - y_r - x_r z_r \\ \dot{z}_d &= -b z_d + x_d y_d & \dot{z}_r &= -b z_r + x_r y_r \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{x}_d = (x_d, y_d, z_d)$, $\mathbf{x}_r = (x_r, y_r, z_r)$ – вектора состояний ведущей и ведомой систем, соответственно, параметр ε характеризует интенсивность связи, через которую ведущая система воздействует на ведомую систему. Управляющие параметры системы были выбраны следующими: $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r_d = 40$, $r_r = 35$.

Для диагностики режима обобщенной синхронизации в системе (1), как отмечалось выше, был использован метод вспомогательной системы.

Согласно этому методу, наряду с ведомой системой $\mathbf{x}_r(t)$ задаётся идентичная ей по управляющим параметрам, но отличная по начальным условиям вспомогательная система $\mathbf{x}_a(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_a &= \sigma(y_a - x_a) + \varepsilon(x_d - x_a) \\ \dot{y}_a &= r_a x_a - y_a - x_a z_a \\ \dot{z}_a &= -b z_a + x_a y_a \end{aligned} \quad (2)$$

где x_a, y_a, z_a – координаты вспомогательной системы.

Для интегрирования системы уравнений (1) – (2) использовался метод Эйлера⁶ с шагом по времени $h = 0.001$. В ходе численного моделирования изменялось значение параметра связи ε между осцилляторами и отслеживалось

⁶ Самарский А.А. Численные методы, М.:Наука,1989.

соотношение между состояниями ведомой и вспомогательной систем. Было установлено, что при параметре связи $\varepsilon = \varepsilon_{GS} = 11,5$ в исследуемой системе наблюдается эквивалентность состояний во времени ведомой и вспомогательной систем, что, в свою очередь, служит критерием наступления режима обобщённой синхронизации в исследуемой системе.

Данная ситуация проиллюстрирована на рис. 1, где показана зависимость координаты ведомой системы от координаты вспомогательной системы, демонстрирующая режим обобщённой синхронизации в системе двух однонаправленно связанных осцилляторов Лоренца.

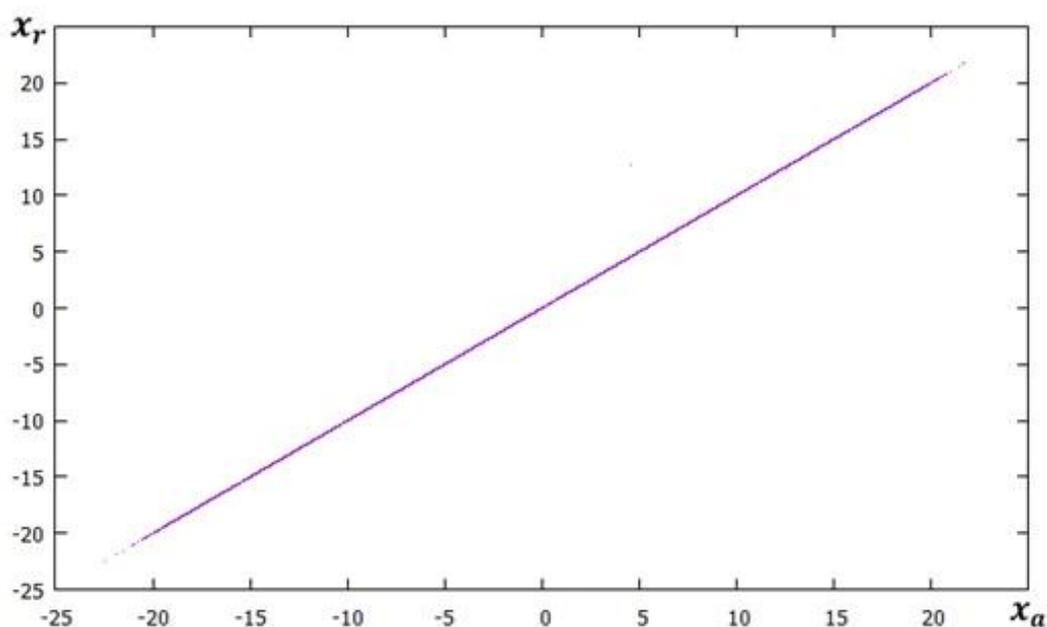


Рисунок 1 – Зависимость координаты ведомой системы от координаты вспомогательной системы, демонстрирующая режим обобщённой синхронизации в системе двух однонаправленно связанных осцилляторов Лоренца (1) – (2), параметр связи $\varepsilon = 11.5$.

При значении параметра связи $\varepsilon < \varepsilon_{GS}$ в исследуемой системе наблюдается перемежаемость, о наличии которой можно судить по присутствию чередования синхронных (ламинарных) и асинхронных (турбулентных) фаз (рис.2).

В рамках исследований любого типа перемежаемости важную роль играют статистические характеристики, такие как распределение

длительностей ламинарных фаз при различных значениях управляющих параметров изучаемой системы и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра связи.

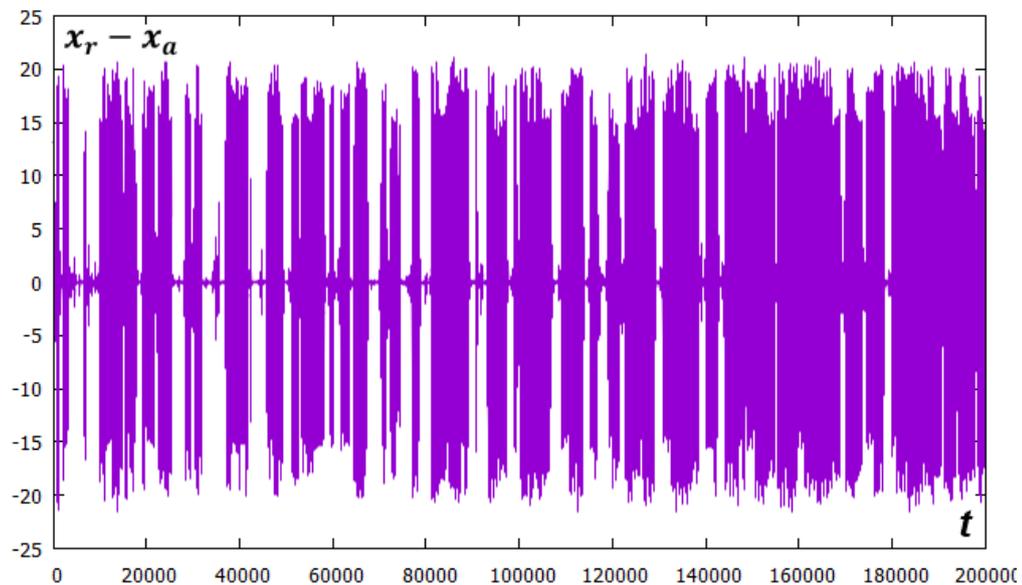


Рисунок 2 – Зависимость разности координат ведомой и вспомогательной систем Лоренца от времени t . Параметр связи $\varepsilon = 9.5$, в системе наблюдается перемежаемость

В работе⁷ было установлено, что при перемежающемся поведении в бистабильных системах распределение длительности ламинарных фаз подчиняется экспоненциальному закону

$$p(\tau) = \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right) \quad (3)$$

где T — средняя длительность ламинарных фаз при фиксированных значениях управляющих параметров.

Вторая статистическая характеристика, а именно зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра связи подчиняется экспоненциальной закономерности

$$T = K \exp(\alpha\varepsilon) \quad (4)$$

⁷ Журавлев М. О., Короновский А. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е. Статистические характеристики индуцированной шумом перемежаемости в мультистабильных системах. Известия вузов. «ПНД», 2018, т. 26, №1, с. 80-89.

где ε — параметр связи, K и α — некоторые положительные константы.

Стоит отметить, что в непосредственной близости от критического значения параметра связи, соответствующего границе обобщенной синхронизации, закономерность (4) может стать менее точной. Для более высокой точности учёта поведения системы в непосредственной близости от границы обобщённой синхронизации требуется провести более тщательный анализ системы. Для этого полученные численно значения необходимо аппроксимировать более полной закономерностью⁸:

$$T = C \exp(k\delta) \times \exp\left(\frac{1}{12} + \frac{\delta}{\sqrt{3}} + \frac{2(-\delta^2)^{\frac{3}{4}}}{3^{\frac{4}{3}}} + \frac{\delta^2}{12}\right) \quad (5)$$

где $\delta = \varepsilon - \varepsilon_c$, C и k — некоторые положительные константы.

На рис. 3а различными типами точек показаны распределения длительностей ламинарных фаз, полученные численно для системы (1) – (2) при различных значениях параметрах связи и их теоретические аппроксимации закономерностью (3). Зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра связи представлена на рис.3б, где результаты численного моделирования показаны точками, а теоретические аппроксимации закономерностями (4) и (5) – сплошной и пунктирной линиями, соответственно. Можно видеть достаточно хорошее соответствие между численно полученными данными и теоретическими закономерностями для обоих графиков.

Схожие закономерности наблюдаются для системы двух однонаправленно связанных генераторов Чуа⁹. Уравнения, описывающие динамику системы, записываются в виде:

⁸ O. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, M. O. Zhuravlev, and A. E. Hramov, *Chaos, Solitons & Fractals* 117, 269 (2018).

⁹ A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, *Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators. Europhysics Letters*. V.70. P. 169-175

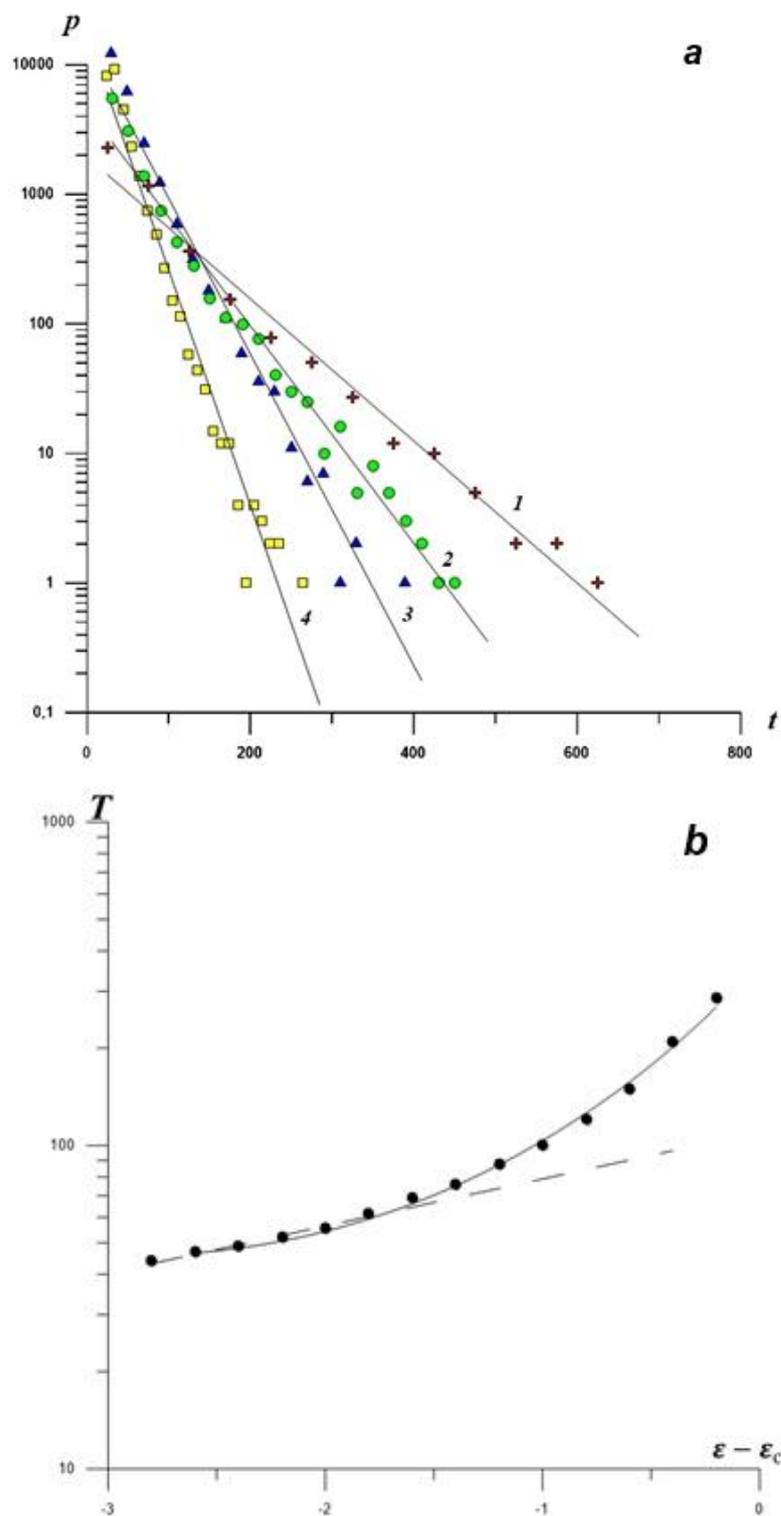


Рисунок 3 – Распределения длительностей ламинарных фаз (а) и зависимость средней длительности ламинарных фаз (б) от параметра связи ϵ , полученные численно для системы Лоренца (1), и их аппроксимации закономерностями (3) и (4), (5), соответственно. На графиках ось ординат представлена в логарифмическом масштабе

$$\begin{aligned}\dot{x}_d &= -\frac{\alpha_d}{\gamma} * f(y - x) & \dot{x}_r &= -\frac{\alpha_r}{\gamma} * f(y - x) \\ \dot{y}_d &= -\frac{1}{\gamma} * (f(y - x) + z) & \dot{y}_r &= -\frac{1}{\gamma} * (f(y - x) + z) + \frac{\varepsilon}{\gamma} * (y_d - y_r) \\ \dot{z}_d &= \gamma * y_d & \dot{z}_r &= \gamma * y_r\end{aligned}\quad (6)$$

где x_d, y_d, z_d – координаты ведомой системы, x_r, y_r, z_r – координаты ведущей системы, $\alpha_d = 2.78, \alpha_r = 2.99, \gamma = 3$ – управляющие параметры, ε – параметр связи. Также вспомогательная система описывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{x}_a &= -\frac{\alpha_a}{\gamma} * f(y - x) \\ \dot{y}_a &= -\frac{1}{\gamma} * (f(y - x) + z) + \frac{\varepsilon}{\gamma} * (y_d - y_a) \\ \dot{z}_a &= \gamma * y_a\end{aligned}\quad (7)$$

где x_a, y_a, z_a – координаты вспомогательной системы.

Исследование возникновения режима обобщённой синхронизации с помощью метода вспомогательной системы показало, что с ростом параметра $\varepsilon = \varepsilon_{GS}$ в системе (6) – (7) возникает режим обобщённой синхронизации. Это иллюстрирует рис.4, на котором показана зависимость координаты ведомой системы от координаты вспомогательной. Из рис.4 видно, что состояния ведомой и вспомогательной систем полностью синхронизированы друг с другом и на плоскости (x_r, x_a) наблюдается диагональ.

В системе Чуа, подобно системе Лоренца, если построить временную зависимость разницы одной из координат ведомой и вспомогательной систем (рис.5), то ниже значения параметра связи, при котором в системе диагностируется режим обобщённой синхронизации, наблюдается перемежаемость, проявляющая в чередовании нулевой разности (ламинарная фаза) и резких скачков (турбулентная фаза).

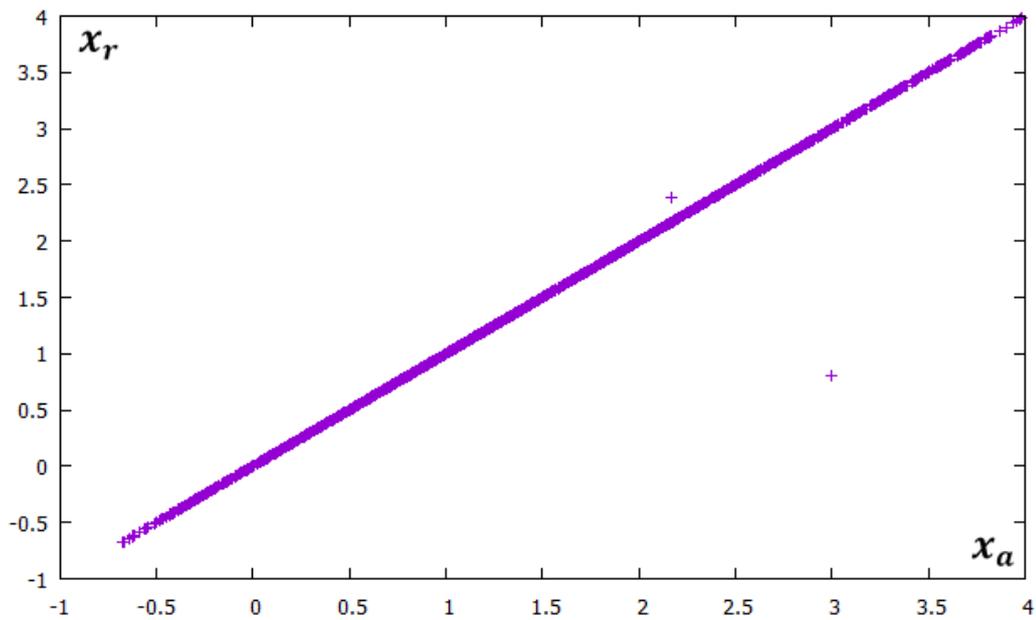


Рисунок 4 – Зависимость координаты ведомой системы от координаты вспомогательной системы, демонстрирующая режим обобщённой синхронизации, в системе двух однонаправленно связанных генераторов Чуа (6)-(7), $\varepsilon = 0.085$

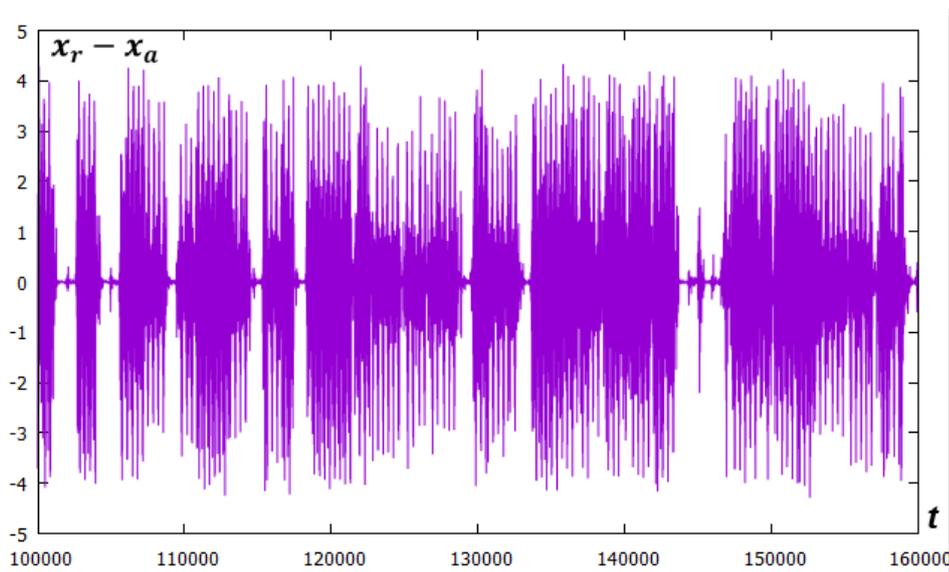


Рисунок 5 – Зависимость разности координат ведомой и вспомогательной систем Чуа от времени t . Параметр связи $\varepsilon=0.065$, система демонстрирует перемежаемость

Как и для систем Лоренца, проанализированы статистические характеристики перемежающегося поведения на границе обобщённой синхронизации в системе (6) – (7). На рис. 6a приведены численно полученные распределения длительностей ламинарных фаз для трех различных значений параметра связи и их аналитические аппроксимации закономерностью (2), а на рис. 6b – зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра связи и ее аппроксимация закономерностью (3). Видно, что во всех рассмотренных случаях наблюдается хорошее соответствие данных теории и численного моделирования, что говорит о применимости теории перемежаемости для систем, характеризующихся двулистной структурой хаотического аттрактора.

В заключении подводятся итоги исследования, излагаются его основные результаты.

В настоящей магистерской работе проанализирована возможность возникновения обобщённой синхронизации в двух однонаправленно связанных системах, характеризующихся бистабильным типом аттрактора на примере однонаправленно связанных систем Лоренца и генераторов Чуа. Исследование показало, что с ростом параметра связи, при некотором значении $\varepsilon = \varepsilon_{GS}$ в системе возникает режим обобщённой синхронизации. В однонаправленно связанных системах Лоренца режим обобщённой синхронизации был диагностирован при значении параметра связи $\varepsilon = 11.5$, в однонаправленно связанных генераторах Чуа при параметре связи $\varepsilon = 0.085$ наблюдается эквивалентность состояний во времени взаимодействующих систем, что, в свою очередь, служит условием наступления режима обобщённой синхронизации.

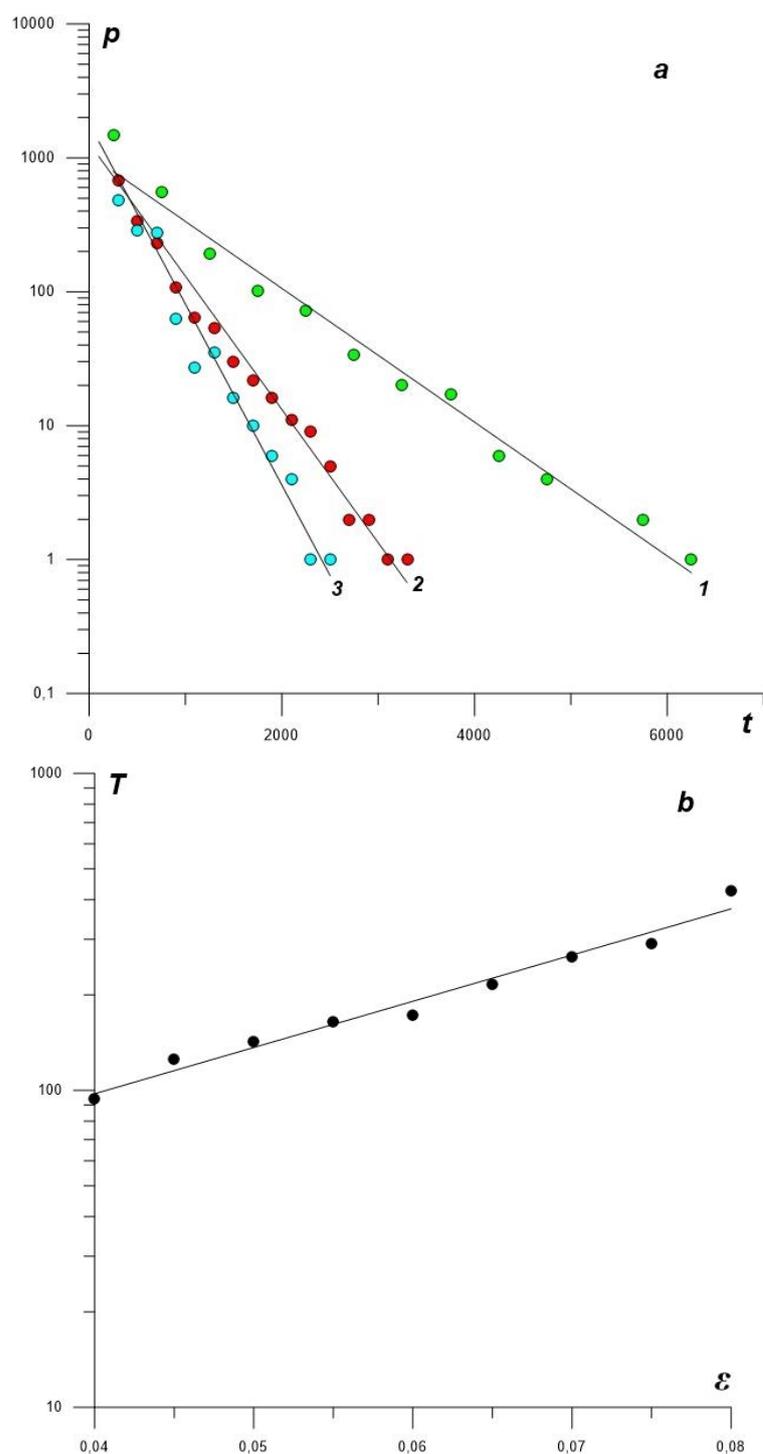


Рисунок 6 – Распределения длительностей ламинарных фаз (а) для трёх различных значений параметра связи (1 – $\epsilon=0.075$, 2 – $\epsilon=0.065$, 3 – $\epsilon=0.055$) и зависимость средней длительности ламинарных фаз (б) от параметра связи ϵ , полученные численно для системы (6)–(7), и их аппроксимации закономерностями (2) и (3), соответственно. На графиках ось ординат представлена в логарифмическом масштабе.

В работе установлено, что на границе обобщённой синхронизации в обеих системах действительно присутствует перемежающееся поведение, о котором можно говорить по наличию чередующихся ламинарных и турбулентных фаз. Используя метод вспомогательной системы, были построены распределения длительностей ламинарных фаз и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра связи. Полученные численные данные были успешно аппроксимированы экспоненциальными зависимостями, характерными при перемежающемся поведении в бистабильных системах. Аналитически доказано, что полученные численные результаты имеют хорошее соответствие с теоретическими закономерностями.