

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

**Моделирование и анализ динамики неявного отображения,
ассоциирующегося с обобщением методов Ньютона и Эйлера на
комплексной плоскости**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 235 группы

направления 09.04.02 «Информационные системы и технологии»

Факультета нелинейных процессов

Елистратова Андрея Алексеевича

Научный руководитель

доцент кафедры ФОС, к.ф.-м.н.

подпись, дата

Д.В. Савин

Зав. кафедрой физики открытых систем

д.ф.-м.н., профессор

подпись, дата

А.А. Короновский

Саратов 2020

Введение. Численные методы решения нелинейных уравнений широко используются в науке и технике, поэтому их исследование представляет интерес. Одним из наиболее простых и широко распространённых методов является метод Ньютона. Как известно, метод Ньютона довольно быстро сходится, однако задача определения областей его глобальной сходимости является в большинстве случаев нетривиальной. Так, в применении к решению уравнений на комплексной плоскости области глобальной сходимости при решении квадратных уравнений определяются довольно просто, в то время как уже для уравнения 3-ей степени существует т. н. проблема Кэли [1]. Если рассматривать итеративный процесс метода Ньютона как дискретное отображение, проблеме Кэли можно рассматривать как задачу о поиске границ бассейнов притяжения сосуществующих в этом отображении устойчивых точек — корней решаемого уравнения. Известно, что для кубического уравнения эта граница является фрактальной, и представляет собой т. н. «фрактал Ньютона», являющийся одним из эталонных примеров фракталов, возникающих в теории динамических систем, и вошедший в многочисленные учебники и книги по теории фракталов [1, 2].

В то же время известно, что, наряду с обычным методом Ньютона при решении уравнений в ряде случаев уместно применять т. н. «ослабленный» метод Ньютона — модификацию исходного метода, состоящую в добавлении отличного от 1 постоянного множителя в слагаемое, определяющее расстояние между n -м и $(n+1)$ -м приближениями к корню. Если подходить к этой задаче с позиций теории динамических систем, такую модификацию метода Ньютона можно рассматривать как параметризацию исходного отображения неким дополнительным параметром.

В настоящее время существует довольно большое количество работ, имеющих дело с изучением глобальной сходимости итеративных методов

решения уравнений, в частности, полиномиальных, с позиций и в рамках подходов теории динамических систем. Не претендуя на полноту обзора, приведем здесь некоторые примеры, относящиеся к изучению сходимости модификаций метода Ньютона, как для одномерных [3, 4], так и для комплексных уравнений [5 — 8], не говоря уже про многочисленные более сложные итеративные методы [9 — 11]. Однако, как это ни удивительно, систематическому исследованию зависимости структуры фазового пространства получающегося отображения от параметров метода не уделяется должного внимания — авторы, как правило (если вести речь о работах, связанных с численным исследованием динамики системы), фокусируются на построении структуры фазовой плоскости (и, в ряде работ, расчетах фрактальной размерности границ) в каких-либо определенных частных случаях. Лишь в нескольких работах проводится изучение зависимости аттракторов отображения от параметра метода — например, в [4] для одномерного метода Ньютона и в [8] — при его применении к уравнению в комплексных числах, причем при комплексификации параметра метода. Дальнейшее расширение такого рода исследований кажется заслуживающим внимания.

Введение действительного дополнительного множителя при переходе к ослабленному методу Ньютона позволяет рассматривать его как итеративный процесс метода Эйлера для некоего дифференциального уравнения. Известно, однако, что наряду с явным методом Эйлера существует неявный метод, когда значение производной берётся в конечной точке, а также т. н. «полунеявный», когда используется полусумма значений производной искомой функции в стартовой и конечной точках шага интегрирования [12]. Если рассматривать возникающие при реализации такого рода методов дискретные отображения, можно заметить, что для явного метода отображение однозначно определено в прямом времени и неоднозначно (в случае, если рассматриваемая функция

нелинейная) — в обратном, в то время как для неявного метода ситуация противоположная. Для полунеявного же метода получаемое отображение оказывается неоднозначно определённым как в прямом, так и в обратном времени — что переводит его в класс т. н. неявных отображений (*implicit maps* в англоязычной литературе). Динамика такого рода отображений довольно слабо изучена. Представляется, что изучение трансформаций структуры фазовой плоскости при переходе от однозначно определённого в прямом времени отображения к неявному и далее — к отображению, однозначно определённому в обратном времени, является новой, интересной и актуальной задачей.

Другой актуальной задачей, возникающей при численном исследовании динамики нелинейных систем, является выбор удобной для пользователя (исследователя) реализации используемых при этом методов. Изучение экосистемы программных библиотек и алгоритмов, связанных с рассматриваемой задачей и задачей исследования динамических систем в целом, показало, что открытых фреймворков, предоставляющих простой доступ к набору наиболее часто используемых алгоритмов для исследования динамики отображений, практически нет. Среди наиболее известных фреймворков [13 — 15] содержится лишь малая толика реализаций нужных нам алгоритмов. Поэтому в рамках данной работы мы предпринимаем попытку систематизировать наш подход к изучению динамических систем и попытаемся собрать часто используемые нами алгоритмы в небольшую библиотеку на языке Python [16].

Таким образом, целью настоящей работы является изучение динамики неявного отображения, имеющего своими предельным случаем отображения, задающие итеративные процессы методов Ньютона и Эйлера для уравнений на комплексной плоскости, а также создание библиотеки, пригодной как для

решения поставленной задачи, так и других задач численного исследования динамических систем.

Работа содержит 3 главы:

- Обобщенное неявное отображение. Представлена теория и вывод обобщенного неявного отображения, исследованного далее в работе.
- Комплекс программ для моделирования неявного отображения. Представлен концепт комплекса программ для исследования динамических систем.
- Динамика обобщённого отображения. Рассмотрено поведение выведенного ранее обобщенного неявного отображения при различных значениях параметров.

Обобщенное неявное отображение. Рассматривается простой известный случай возникновения фрактальных границ бассейнов притяжения — кубическое уравнение простейшего вида:

$$\phi(z) = z^3 + c = 0 \quad (1)$$

Для численного поиска корней этого уравнения можно применить метод Ньютона. Аттрактором итеративного процесса будут являться 3 точки на комплексной плоскости, а репеллером — искомые нами границы областей притяжения. Следовательно, обратив итерационный процесс метода Ньютона, мы можем прийти к множеству точек, являющемуся репеллером. Если заменить обычный метод Ньютона ослабленным [1, 7], введя параметр $h > 0$, получим отображение:

$$z_{n+1} = z_n - h \frac{\phi(z_n)}{\phi'(z_n)} \quad (4)$$

Обратимся теперь к другой задаче, численное решение которой приводит к появлению схожих отображений. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{z} = f(z) = \frac{\phi(z)}{\phi'(z)} \quad (6)$$

и будем решать его методом Эйлера с шагом по времени d . Итерационный процесс в этом случае можно записать как

$$z_{n+1} = z_n + df(z_n) \quad (7)$$

для явного метода и

$$z_{n+1} = z_n + df(z_{n+1}) \quad (8)$$

для неявного.

Отображения (4) и (7), очевидно, представляют собой одно и то же отображение с точностью до замены d на $-h$ или наоборот. Преобразуем теперь отображение (8), записав его как уравнение относительно z_n :

$$z_n = z_{n+1} - df(z_{n+1}) \quad (9)$$

Можно заметить, что в таком виде оно совпадает с отображением (4) при обращении времени, т. е. при замене $z_n \leftrightarrow z_{n+1}$. Следовательно, его динамика в обратном времени совпадает с динамикой отображения (4) в прямом времени, и наоборот. Попробуем теперь сконструировать такое отображение, которое допускало бы неоднозначную (необратимую) динамику как в прямом, так и в обратном времени, используя идею построения полуявного метода Эйлера. Получим обобщенное двухпараметрическое отображение, связывающее в себе случаи, рассмотренные выше:

$$z_{n+1} = z_n + h(\alpha f(z_n) + (1 - \alpha)f(z_{n+1})), \quad f(z) = \frac{z^3 - c}{3z^2} \quad (12)$$

Подставляя $f(z)$ в (12) и приводя полученное отображение к виду (10), получим обобщённое неявное отображение

$$z_{n+1}^3 - z_{n+1}^2 \frac{(z_n + \alpha h \frac{z_n^3 + c}{3z_n^2})}{1 + \xi} - \frac{c\xi}{1 + \xi} = 0, \quad \xi = -\frac{h(1 - \alpha)}{3} \quad (13)$$

объединяющее в себе рассмотренные ранее отображения. Действительно, нетрудно видеть, что «режим» отображения контролируется значением параметра α : при $\alpha = 1$ уравнение (13) обращается в (5), а при $\alpha = 0$ — в уравнение (8).

Методы работы с обобщенным отображением. Для получения следующей точки z_{n+1} либо — при рассмотрении динамики в обратном времени — предыдущей точки z_n итерационного процесса нам необходимо решить кубическое уравнение (13). Любое кубическое уравнение имеет три корня, но нам нужно выбрать лишь один из них. Если на каждом шаге мы будем выбирать какой-то один определенный корень, то придем в неустойчивую для исходного отображения точку на комплексной плоскости — репеллер, располагающийся в данном случае на границе бассейнов притяжения корней кубического уравнения. Границы бассейнов притяжения в данном случае представляют собой множество Жюлиа для нашего отображения. Известно, что множество Жюлиа состоит из бесконечного множества предельных циклов всевозможных периодов. Соответственно, для того чтобы не наблюдать лишь один из них, а заставить нашу траекторию отображения посетить окрестности других циклов, нужно выбирать корни кубического уравнения в соответствии с какими-то другими правилами. Например, в случае, если мы хотим локализовать местоположение множества Жюлиа в целом, т. е. всех циклов-репеллеров, его

образующих, нужно прибегнуть к методу систем итерируемых функций (СИФ) [17]. Очевидно, что при рассмотрении обобщённого отображения (13) аналогичным образом будет строиться итерационный процесс как в обратном, так и в прямом времени. При этом можно руководствоваться правилами «игры в хаос», а можно выбирать корни на каждом шаге в соответствии с некоей последовательностью из 3 символов, периодической либо непериодической. Также стоит отметить, что каждая получающаяся таким образом последовательность выборов корней задаёт отдельную динамическую систему, и таких систем наше обобщенное отображение может породить бесконечное множество.

Комплекс программ для моделирования неявного отображения.

Предпримем попытку систематизировать наш подход к изучению динамических систем путем разработки библиотеки, объединяющую в себе основные методы исследования динамических систем. В качестве главных целей библиотеки поставим следующие три пункта, в порядке приоритетов разработки:

- простота использования — будем требовать от пользователя лишь начальный уровень владения Python для базового использования готовых примитивов из нашей библиотеки.
- производительность — написанный код должен быть производителен. Для простых случаев использования это должно быть не в ущерб пункту (1)
- гибкость — библиотека должна быть легко расширяемой. Пользователю со знанием OpenCL и Python не должно составлять особого труда реализовать свои собственные алгоритмы и предоставить их в качестве расширения для библиотеки.

Библиотека использует три основные технологии — Python, OpenCL и Qt. Все используемые нами технологии являются кроссплатформенными и открытыми,

что делает нашу библиотеку также кроссплатформенной и легко поддерживаемой. Высокоуровневая архитектура библиотеки показана на рис. 1.

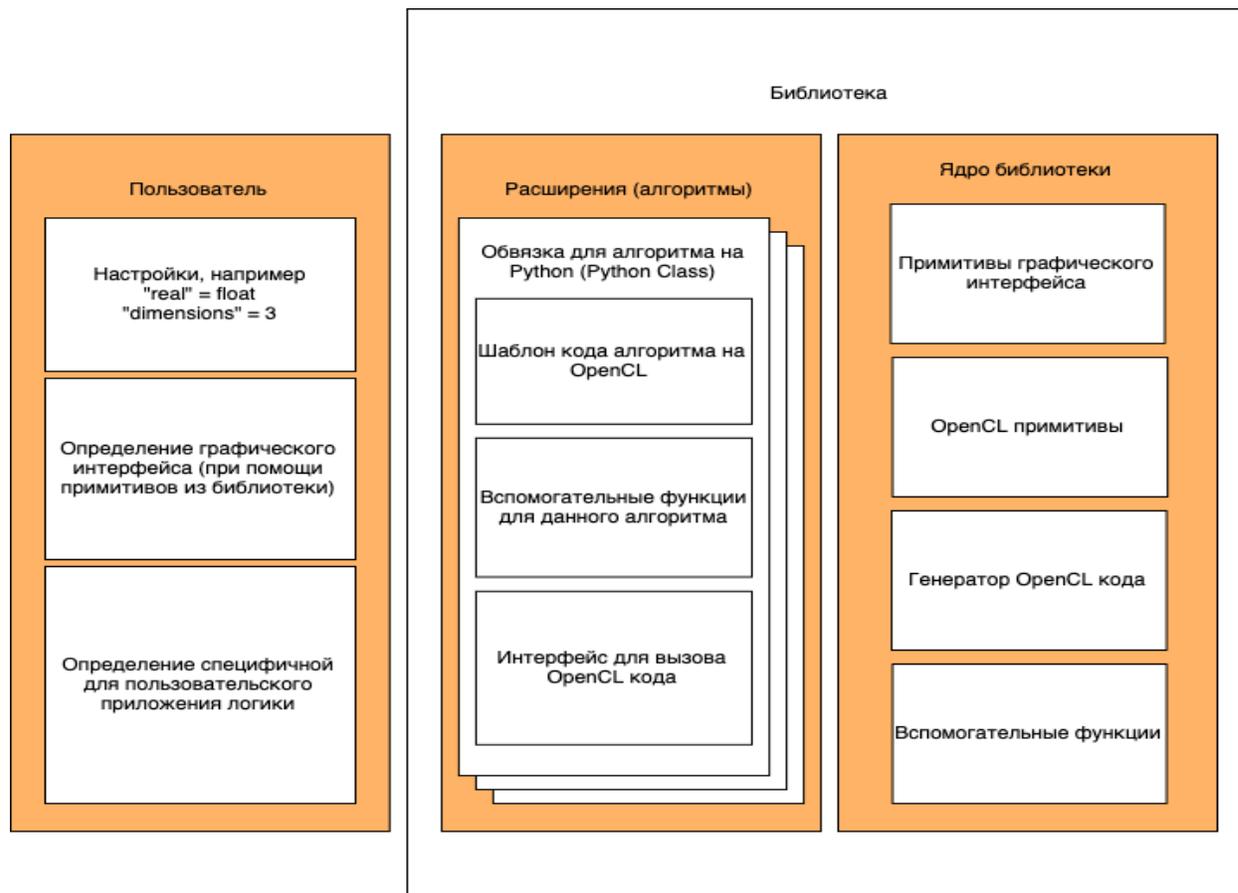


Рис. 1. Высокоуровневая архитектура библиотеки

Далее обсудим, как поставленные нами ранее цели (простота, производительность, гибкость) достигались при разработке библиотеки, и какие приемы были использованы.

- Простота использования: высокоуровневый интерфейс

```
from dynsys.app import SimpleApp

class MyApp(SimpleApp):
    def __init__(self):
        super(MyApp, self).__init__("My Application")

MyApp().run()
```

Листинг 1. Простейшее приложение с использованием нашей библиотеки

Приведенный в листинге 1 код покрывает многие связанные с запуском и началом работы с OpenCL трудности: он создает OpenCL контекст для одного из вычислительных устройств в системе, OpenCL очередь для выполнения команд на этом устройстве, и наконец создает и показывает пустое окно графического интерфейса с заголовком «My Application». Написание дальнейшего кода / пользовательской логики схоже с процессом разработки Qt-приложения. Созданные библиотекой контекст и очередь OpenCL доступны в теле класса как поля.

- Производительность

Высокая производительность библиотеки во многом достигается за счет параллелизации алгоритмов. Стоит отметить, что львиная доля алгоритмов используемых в сфере нелинейной динамики (фазовые портреты, бифуркационные диаграммы, карты динамических режимов, карты Ляпуновских показателей, и т.д.) не являются параллелизуемыми — если мы ведем речь о расчете для какой-то одной динамической системы — так как каждое последующее состояние зависит от предыдущего. Однако во многих задачах требуется рассчитывать множество независящих друг от друга систем, например, для фазового портрета зачастую бывает наиболее удобно и наглядно рассчитать несколько систем, отличающихся друг от друга только начальными условиями. Таким образом, параллелизация расчетов в нашем случае почти всегда означает одновременный расчет нескольких систем.

- Генерация OpenCL кода «на лету»

Помимо переносимости и универсальности кода, одним из наиболее привлекательных свойств OpenCL является форма представления исполняемого OpenCL кода в программе драйвере. По сути, для программы-драйвера

исходный код функции ядра — это просто строка. Данный факт дает простор для прямолинейной и удобной генерации OpenCL-кода непосредственно во время работы приложения. Чтобы сделать генерацию кода максимально простой и понятной, в нашей библиотеке мы используем Мако [18] — небольшой фреймворк-шаблонизатор для Python. Генерация и компиляция OpenCL кода во время работы драйвер-программы является чрезвычайно мощным инструментом в силу того, что OpenCL программа может быть тонко оптимизирована как генератором кода, так и компилятором OpenCL на конкретном устройстве.

Динамика обобщённого отображения. Вернёмся к рассмотрению динамики отображения (13). Это двухпараметрическое неявное отображение на комплексной плоскости, причём значения параметра α имеет смысл рассматривать в диапазоне от 0 до 1, а параметр h может теперь принимать как положительные, так и отрицательные значения. Прежде чем проводить численное моделирование динамики этого отображения, систематизируем наши знания о предельных случаях. Будем называть отображением в прямом времени разрешение уравнения относительно z_{n+1} , а в обратном — относительно z_n .

1. $\alpha = 1, h > 0$. В этом случае отображение в прямом времени представляет собой итерационный процесс явного метода Эйлера (7) и сходится к соответствующему решению.

2. $\alpha = 1, h < 0$. Отображение сводится к виду (5) — или (4), если разрешить его относительно z_{n+1} .

3. $\alpha = 0, h > 0$. Отображение сводится к виду (5) при замене $z_n \leftrightarrow z_{n+1}$.

4. $\alpha = 0, h < 0$. Отображение сводится к виду (7) при замене $z_n \leftrightarrow z_{n+1}$, итерационный процесс в обратном времени сходится к соответствующему решению явного метода Эйлера.

5. $\alpha = 0.5$. В этом случае отображение представляет собой решение уравнения (6) полуявным методом Эйлера и должно демонстрировать симплектическую (для двумерного отображения — консервативную) динамику.

Отметим также, что при $h = -3$ для случая $\alpha = 1$ и при $h = 3$ для случая $\alpha = 0$ структура отображения (13) существенно изменяется, т. к. в уравнении (12) обращается в 0 коэффициент при z_n и z_{n+1} соответственно. В этих точках плоскости параметров можно ожидать существенного упрощения динамики.

Обратим внимание на симметрию предложенной модели. Динамика отображения в предельных случаях 1 и 4, а также 2 и 3 эквивалентна с точностью до обращения времени. Более того, проанализировав структуру отображения (12), можно заметить, что оно является инвариантным относительно замен $h \rightarrow -h$, $\alpha \rightarrow 1 - \alpha$, $z_n \leftrightarrow z_{n+1}$. Аттракторы отображения (13) в точке плоскости параметров (α, h) , получающиеся при выборе различных символических последовательностей для определения корня на каждой итерации, должны принадлежать его же множеству Жюлиа в точке плоскости параметров $(1 - \alpha, -h)$.

Сконструированное таким образом отображение (13), однако, представляет определённые неудобства при численном исследовании, т. к. предполагаемое свойство сохранения площади на линии $\alpha = 0.5$ должно приводить к отсутствию на этой линии аттракторов, а также к существенному замедлению процесса сходимости на аттрактор в её окрестности. Поэтому кажется разумным для изучения особенностей устройства пространства параметров такого рода неявных отображений рассмотреть сначала модификацию исходного отображения, сохраняющую — хотя бы частично — его свойства в предельных случаях, но лишённую недостатков, связанных с наличием в рассматриваемой области сохраняющей площадь динамики. Для

этого можно, например, в отображении (12) функцию $f(z_{n+1})$ заменить на функцию $g(z_{n+1}) = (z^3 + c)/3z^2$. В этом случае отображение (13) примет вид

$$z_{n+1}^3 - z_{n+1}^2 \frac{(z_n + \alpha h \frac{z_n^3 + c}{3z_n^2})}{1 + \xi} + \frac{c\xi}{1 + \xi} = 0, \quad \xi = -\frac{h(1 - \alpha)}{3} \quad (18)$$

Поведение такого отображения на линии $\alpha = 1$ будет идентично рассмотренному ранее (пп. 1 и 2), на линии же $\alpha = 0$ качественно динамика останется такой же, как описано в пп. 3 и 4, изменится только параметр исходного кубического уравнения. На рис. 2 схематично изображены области на плоскости параметров, соответствующие описанным предельным случаям.

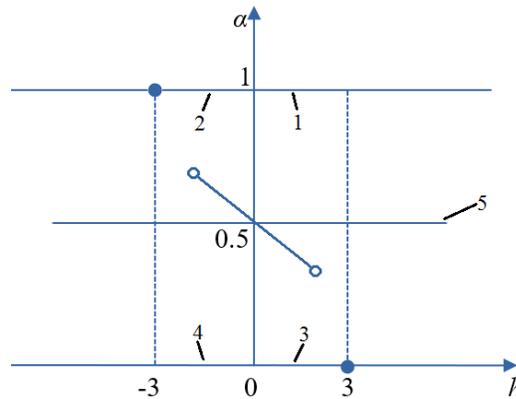


Рис. 2. Схематичное изображение устройства плоскости параметров отображений (13) и (18). Отмечены линии, на которых реализуется динамика типов 1 — 5, сплошными кружками — точки, в которых следует ожидать упрощения динамики отображения. Полые кружки иллюстрируют пример точек, в которых динамика отображения (13) симметрична относительно обращения времени.

Структура плоскости параметров. Обозначим корни соответственно 0, 1 и 2 и попытаемся построить карты динамических режимов для различных последовательностей корней. Самые простые последовательности корней — это, как упоминалось ранее, постоянный выбор какого-то одного корня. На рисунке 3 представлена карта динамических режимов для бесконечной

последовательности 0 (карты для 1 и 2 корня идентичны представленной).
 Границы параметра h — $[-6; 0]$.

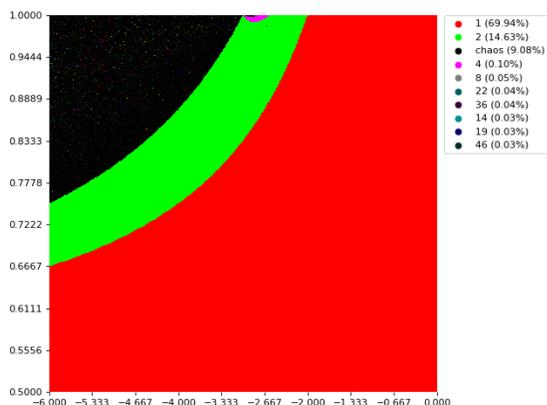


Рис. 3. Карта дин. режимов для постоянного выбора какого-либо одного корня

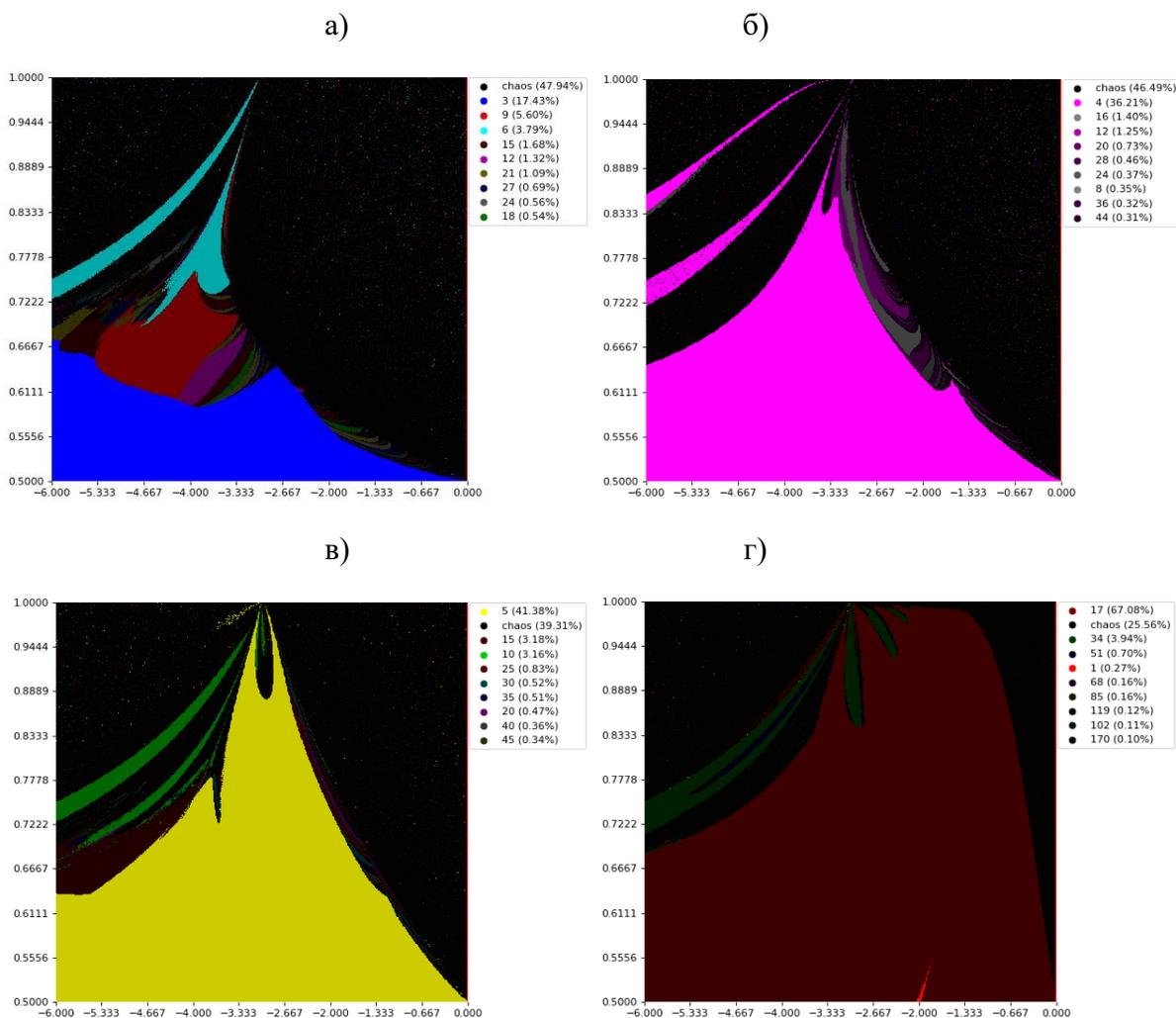


Рис. 4. Карты динамических режимов для последовательностей корней: а) 001

б) 0001 в) 00001 г) 0(x16)1 (последовательности периодические). На легенде к каждому рисунку представлены обнаруженные периоды, и занимаемая ими область плоскости параметров (в процентах).

На рисунке 4 представлены карты динамических режимов, для последовательностей корней следующего вида: сначала идет последовательность нулей, затем другой корень (в данном случае корень 1).

Бассейны притяжения. Для области $h \in [-6; 0]$, $\alpha \in [0.5; 1.0]$ рассмотрим, как ведут себя бассейны притяжения при изменении (увеличении) последовательности корней, состоящей из N нулей и одной единицы. Рассматривать будем последовательности $S1 = (0, 0, 1)$ и $S2 = (0, 0, 0, 1)$. Для этого построим бассейны притяжения для разных точек на плоскости параметров. Точки будем брать двух видов: лежащую внутри периодической области — $h = -5.06$, $\alpha = 0.654$ (обозначим ее T1) и лежащую вблизи границы между двумя периодическими областями — $h = -5.14$, $\alpha = 0.629$ (обозначим ее T2).

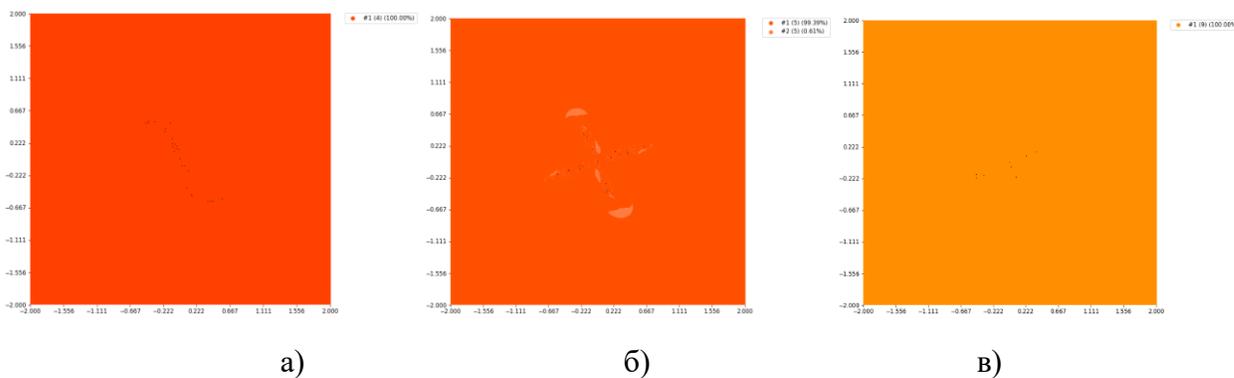


Рис. 5. Бассейны притяжения для первого набора параметров (периодическая область). а) последовательность корней S1; б) S2; в); S3

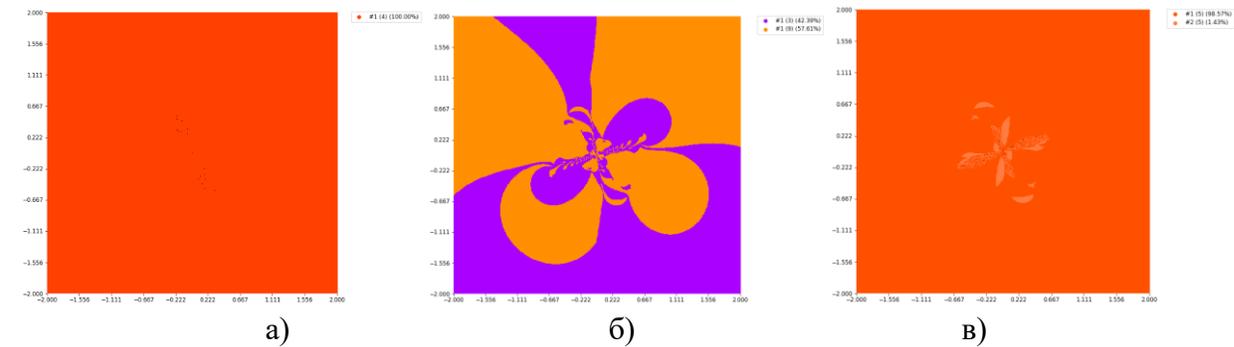


Рис. 6. Бассейны притяжения для второго набора параметров (вблизи границы двух периодических областей). а) последовательность корней $S1$; б) $S2$; в) $S3$

На рис. 5 видно, что вдали от границ периодической области динамика, наблюдаемая на фазовой плоскости, изменяется незначительно — меняется лишь период аттрактора. Для второго набора параметров динамика меняется похожим образом — на рис. 5.а видно, что вблизи границ меж двух периодических областей незначительное изменение начальных условий может привести итерационный процесс к аттрактору того или иного периода. При отдалении от границы (рис. 6.б) поведение системы становится аналогичным наблюдаемому на рис. 5.

В целом в устройстве структуры плоскости параметров можно выделить следующие основные закономерности. Типы областей динамических режимов, которые наблюдаются на плоскости — область «основного» периода (т. е. периода, совпадающего с периодом выбранной кодирующей последовательности), как правило, узкие области кратных периодов — назовём их языками — и область, в которой практически отсутствует периодическая динамика. При этом области существования циклов разных периодов на плоскости параметров перекрываются, что приводит к существованию вдоль границ основной периодической области и языков кратных периодов узких областей мультистабильности. Внутри областей мультистабильности на комплексной плоскости наблюдается сложно устроенная структура бассейнов притяжения с фрактальной границей, при этом одновременно возможно сосуществование как двух аттракторов (см, например, бассейны в точке $T2$ ($S2$), рис. 6б), так и нескольких. При продвижении в направлении от границы внутрь языка происходит увеличение площади, занимаемой бассейном «основного» для этого языка аттрактора, с одновременным упрощением фрактальной структуры границы (см. бассейны на рисунках 5а и 6а). Заканчивается этот процесс исчезновением сосуществующих с «основным» аттракторов.

Описанные структуры комплексной фазовой плоскости, плоскости параметров, а также закономерности изменения структуры комплексной плоскости при движении по плоскости параметров в целом универсальны для всех рассмотренных кодирующих последовательностей. При увеличении периода последовательности количество и размер языков кратных периодов уменьшаются, одновременно с увеличением в размере основной периодической области. В случае, когда точка на плоскости параметров при смене кодирующей последовательности оказывается в области другого динамического режима, изменение структуры бассейнов притяжения качественно соответствует перемещению в соответствующую область на плоскости параметров для исходной последовательности.

Заключение. В работе была подробно рассмотрена проблема Кэли для обобщенного («ослабленного») метода Ньютона в контексте кубического уравнения в комплексных числах. Был произведен переход к системе итерируемых функций и построение бассейнов притяжения корней. Сконструировано обобщенное отображение, объединяющее в себе отображения для прямого и обратного итерационного процесса, а также его модифицированная версия. Исследована динамика предложенных отображений; построены карты динамических режимов, бассейны притяжения и аттракторы. Выявлены закономерности устройства пространства параметров, рассмотрена динамика отображения в предельных случаях. Также разработан прототип высокопроизводительной библиотеки для анализа динамических систем. Результат можно найти здесь — <https://github.com/modelflat/dynsys>. Разработка все еще ведется и на данный момент API библиотеки еще не стабилизирован. Описаны возможности библиотеки, представлены некоторые из алгоритмов.

Список источников.

1. Красота фракталов: Образы комплекс. динам. систем / Х.-О. Пайтген, П.

- Х. Рихтер / ISBN 5-03-001296-6;
2. Фракталы и мультифракталы / Божокин С. В., Паршин Д. А. / Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 128 с.;
 3. Convergence of a Relaxed Newton's Method for Cubic Equations / J. B. McLaughlin / Computers Chem. Engng, Vol. 17, No. 10, pp. 97-983, 1993;
 4. Real Dynamics for Damped Newton's Method Applied to Cubic Polynomials / Ángel Alberto Magreñán, José Manuel Gutiérrez / Journal of Computational and Applied Mathematics 275, 527-538 (2015);
 5. On the Iteration of a Rational Function: Computer Experiments with Newton's Method. / James H. Curry, Lucy Garnett, and Dennis Sullivan / Commun. Math. Phys. 91, 267-277 (1983);
 6. Fractal Basins of Attraction Associated with a Damped Newton's Method / Bogdan I. Epureanu, Henry S. Greenside / SIAM Review Vol. 40, No. 1 (Mar., 1998), pp. 102-109;
 7. Attracting Cycles for the Relaxed Newton's Method / Sergio Plaza, Natalia Romero / Journal of Computational and Applied Mathematics 235 (2011) 3238—3244;
 8. Measures of the Basins of Attracting n-Cycles for the Relaxed Newton's Method / J.M. Gutiérrez, L.J. Hernández, Á.A. Magreñán, and M.T. Rivas. / S. Amat, S. Busquier (eds.), Advances in Iterative Methods for Nonlinear Equations, SEMA SIMAI Springer Series 10 (2016);
 9. Generalization of Newton's Methods / William J. Gilbert. / Fractals, v. 9, No. 3, 2001, pp. 251-262;
 10. Julia Sets of Generalized Newton's Method / Xingyuan Wang, Tingting Wang / Fractals, Vol. 15, No. 4 (2007) 323—336;
 11. Approximations Of Continuous Newton's Method: An Extension Of Cayley's Problem / Jon Jacobsen, Owen Lewis / Sixth Mississippi State Conference on

- Differential Equations and Computational Simulations, Electronic Journal of Differential Equations, Conference 15 (2007), pp. 163—173. ISSN: 1072-6691;
12. Численные методы: учебное пособие / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков / М.: БИНОМ. Лаб. знаний, 2006 - 636 с.
 13. Репозиторий библиотеки SimuPy [Электронный ресурс] <https://github.com/simupy/simupy> — дата обращения 29.03.2019
 14. Официальный сайт библиотеки Nolds [Электронный ресурс] <https://pypi.org/project/nolds/> — дата обращения 29.03.2019
 15. Официальный сайт библиотеки PySD [Электронный ресурс] <https://pypi.org/project/pysd/> — дата обращения 29.03.2019
 16. Официальный сайт ЯП Python [Электронный ресурс] <https://www.python.org/> — дата обращения 29.03.2019
 17. The Chaos Game on a General Iterated Function System. / Michael Barnsley, Andrew Vince / Ergodic Theory Dynam. Systems, 2011, 31(4): 1073-1079;
 18. Официальный сайт библиотеки Мако [Электронный ресурс] <https://www.makotemplates.org/> — дата обращения 31.06.2019