МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теории функций и стохастического анализа

ВЕРОЯТНОСТЬ НЕРАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 248 группы
направления 09.04.03 — Прикладная информатика

механико-математического факультета
Дивейкина Ивана Васильевича

Научный руководитель
профессор, д. ф.- м. н. ______________ А. Л. Лукашов

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2020

Введение

В современном мире возрастает количество факторов, способных навредить здоровью человека: стихийные бедствия, взрывы, пожары, аварии, эпидемии смертельных болезней, убийства. При увеличении риска жизни на передний план выходит обеспечение страховой защиты. Человек путем страхования может защитить свои имущественные интересы. Исходя из своих потребностей и реальной рисковой ситуации формирует для себя и своей семьи комплект договоров страхования. В свою очередь в интересах страховых компаний предоставить выгодные обеим сторонам условия страховой сделки. В связи с этим у страховых компаний возникают свои риски - риск разориться при предоставлении услуг. Возникает проблема вычисления вероятности разорения.

Стандартной задачей актуарной математики является задача о вычислении вероятности разорения страховой компании, то есть вероятности того, что страховая компания не может исполнять свои финансовые обязательства в виду отсутствия денежных средств. Основная сложность при решении данных задач состоит в нахождении явных решений. Большинство методов находят лишь оценочное решение. Увеличение точности подсчёта вероятности неразорения позволяет страховым компаниям скорректировать свои финансовые расходы.

Была поставлена цель работы: вывод явной формулы для определения вероятности неразорения страховой компании из теоремы Игнатова и Каишева, и её программная реализация. Для достижения поставленной цели были сформулированы задачи:

1. ознакомиться с основными сведениями актуарной математики;
2. рассмотреть и изучить основные понятия теории одномерных B-сплайнов, связанные с решением поставленной цели;
3. изучить теорему Игнатова и Каишева об оценке вероятности неразорения страховой компании;
4. получить явную формулу для подсчета вероятности неразорения страховой компании;
5. программная реализация полученной явной формулы для расчёта вероятности неразорения страховой компании;

6. получение численных результатов и их анализ.

Работа прошла апробацию на различных конференциях, в частности, на ежегодной студенческой конференции «Актуальные проблемы математики и механики», которую проводил механико-математический факультет СГУ в апреле 2019 года, в секции «Анализ данных».

Структура и объём работы. Выпускная квалификационная работа состоит из введения, 6 глав, заключения и списка использованных источников, состоящего из 17 именований. Работа изложена на 51 листе машинописного текста с 2 приложениями, содержит 6 рисунков и 5 таблиц.

Основное содержание работы

Во введении приводятся причины страхования жизни и обозначается главная проблема - проблема вычисления рисков страхования, как для страхующегося человека, так и для страховой компании. Описывается стандартная задача актуарной математике - задача вероятности разорения страховой компании. Ставится основная цель - вывод явной формулы для определения вероятности неразорения страховой компании и её программная реализация. И формулируются задачи для её достижения.

В первой главе описывается основная теория актуарной математики. Вводятся понятия функции выживания, остаточное время жизни. Описываются методы расчёта вероятности неразорения страховой компании.(основано на [1,2]).

Во второй главе рассматриваются одномерные B-сплайны [3]:

$$M(t|\theta) = n\sum_{i=0}^{n} \frac{(t_i - t)_+^{n-1}}{\prod_{\substack{0\le j\le n,\\ i\ne j}} (t_i - t_j)} = n\sum_{i=0}^{n} \frac{(t - t_i)_+^{n-1}}{\prod_{\substack{0\le j\le n,\\ i\ne j}} (t_i - t_j)}. \tag{1}$$

Вводятся основные термины теории B-сплайнов. Выводится геометрическая интерпретация для B-сплайнов:

$$M(t|\theta) = \frac{vol_{n-1}(y \in [y^0, \dots, y^n] \colon y|_{\mathbb{R}} = t)}{vol_n[y^0, \dots, y^n]}. \tag{2}$$

Соотношение (2) является геометрической интерпретацией соотношения (1). Иллюстрация соотношения для двумерного пространства:

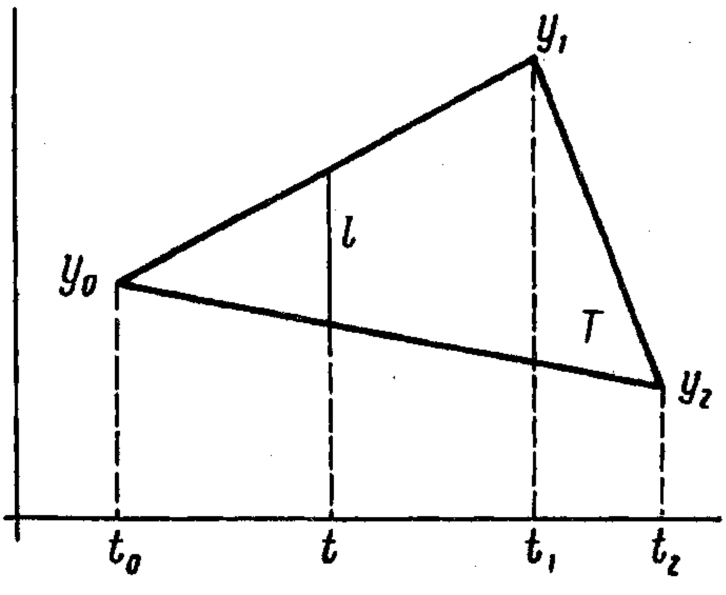

Рисунок 1 – Геометрическая интерпретация двумерного B-сплайна.

В третьей главе формулируется модель страхования (основано на тексте работы [5]).

Пусть $N_t = \#\{i\colon \tau_1 + \cdots + \tau_i\}$ - считающий процесс, который показывает количество произошедших событий до момента времени t, где $\tau_1, \ldots, \tau_i, \ldots$ - независимые экспоненциально распределённые случайные величины с математическим ожиданием $E\{\tau_i\} = 1/\lambda_i, \lambda_i > 0$, т.е., $P(\tau_i > y) = e^{-\lambda_i y}$, для $y > 0$ и $P(\tau_i > y) = 1$ для $y \leq 0, i = 1, 2, \ldots$.

Рассмотрим целочисленные случайные величины $W_1, W_2, W_3, \ldots$, независимые от считающего процесса, обозначающие страховые выплаты. Введём обозначение их совместного распределения: $P(W_1 = w_1, \ldots, W_i = w_i) = P_{w_1,\ldots,w_i}$, где $w_1 \geq 1, w_2 \geq 1, w_i \geq 1, i = 1, 2, \ldots$. Тогда общая сумма выплат в момент времени t будет:

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} W_i,$$

а функция суммы страховых премий - $h(t)$. Тогда процесс резервирования рисков страховой компании будет равен:

$$R_t = h(t) - S_t.$$

Предполагается, что $h(t)$ неотрицательная, возрастающая, действительная функция, определённая на $\mathbb{R}$ и $\lim_{t\to\infty} h(t) = +\infty$. Если функция разрывна, то будем считать, что: $h^{-1}(y) = inf\{z\colon h(z) \geq y\}$, и обозначим

$$v_i = h^{-1}(i), \quad \text{для} \quad i = 0, 1, \ldots. \tag{3}$$

Обозначим момент разорения компании через T, тогда:

$$T = inf\{t\colon t > 0, R_t \leq 0\}, \tag{4}$$

а вероятность неразорения определяется как: $P(T > x)$, в конечном временном интервале $[0, x]$.

Исследуя теорему Игнатова и Каишева выводится интеграл для расчёта вероятности неразорения страховой компании. Получаем два интеграла, один для случая когда все λ различны:

$$\begin{gathered}P\left(T > x | W_1 = w_1, \ldots, W_k = w_k\right) = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k \int\limits_{z_1}^{+\infty} e^{-(\lambda_1-\lambda_2)y_1} \times \\ \times \int\limits_{max(y_1,z_2)}^{+\infty} e^{-(\lambda_2-\lambda_3)y_2} \ldots \int\limits_{max(y_{k-2},z_{k-1})}^{+\infty} e^{-(\lambda_{k-1}-\lambda_k)y_{k-1}} \times \\ \times \int\limits_{max(y_{k-1},x)}^{+\infty} e^{-(\lambda_k-\lambda_{k+1})y_k} dy_k \ldots dy_1.\end{gathered} \tag{5}$$

Второй для случая, когда все λ одинаковые:

$$\begin{gathered}P\left(T > x | W_1 = w_1, \ldots, W_k = w_k\right) = \lambda^k \int\limits_{z_1}^{+\infty} \int\limits_{max(y_1,z_2)}^{+\infty} \ldots \int\limits_{max(y_{k-2},z_{k-1})}^{+\infty} \times \\ \times \int\limits_{max(y_{k-1},x)}^{+\infty} e^{-\lambda y_k} dy_k \ldots dy_1.\end{gathered} \tag{6}$$

Описывается метод для расчёта интегралов. Расчёт вероятности сводится к суммированию всевозможных k-буквенных «слов» алфавита из двух букв z, y, причём первая буква «слова» всегда z и все z имеют возрастающие индексы p из множества $1, \ldots, k$, причём «слова» с одинаковым набором букв, но с разными индексами p считаются разными «словами». Так же у z есть индекс i показывающий на каком месте она стоит. И должно выполняться условие $p \geq i+q$, где q количество стоящих подряд «букв» y после z_p^i. Каждое такое «слово» состоит из «слогов», имеющих в своём составе ровно одну (причём первую) букву z. Для случая различных лямбд: если «слог» начинается с «буквы» z_p^i, и имеет $q \geq 0$ «букв» y, то ему соответствует интеграл

$$\pi_s = \int\limits_{z_p}^{z_{p+1}} e^{-(\lambda_i - \lambda_{i+1})y_1} \int\limits_{y_1}^{z_{p+1}} e^{-(\lambda_{i+1} - \lambda_{i+2})y_2} \ldots \int\limits_{y_q}^{z_{p+1}} e^{-(\lambda_{i+q} - \lambda_{i+1+q})y_{q+1}} dy_{q+1} \ldots dy_1. \quad (7)$$

Следует отметить, что $z_k = x, z_{k+1} = +\infty, \lambda_{k+1} = 0$.

Для случая одинаковых лямбд: если «слог» начинается с «буквы» z_p^i,$p \neq k$ и имеет $q \geq 0$ «букв» y, то ему соответствует интеграл:

$$\pi_s = \int\limits_{z_p}^{z_{p+1}} \int\limits_{y_1}^{z_{p+1}} \ldots \int\limits_{y_q}^{z_{p+1}} dy_{q+1} \ldots dy_1. \quad (8)$$

Если «слог» начинается с «буквы» z_p^i,$p = k$ и имеет $q \geq 0$ «букв» y, то ему соответствует интеграл:

$$\pi_s = \int_x^{+\infty} \int_{y_1}^{+\infty} \cdots \int_{y_q}^{+\infty} e^{-\lambda y_{q+1}} dy_{q+1} \ldots dy_1. \quad (9)$$

Тогда вероятность будет рассчитываться по формуле:

$$P\left(T > x | W_1 = w_1, \ldots, W_k = w_k\right) = \lambda_1 \ldots \lambda_k \sum_w \prod_{s \in w} \pi_s. \quad (10)$$

В четвёртой главе рассчитываются полученные интегралы. Для случая различных лямбд рассматривается общий вид «слагаемого»:

$$1_{s_0}, 0, \ldots, 0, 1_{s_1}, 0, \ldots, 0, 1_{s_r}, 0 \ldots, 0, \tag{11}$$

где индекс у 1 показывает её положение в «слагаемом».

Количество 0 и 1 равно q. Так как интегрируя по верхнему пределу (по константе) мы получаем константу, которую можно вынести за все впереди идущие интегралы, то разобьем интеграл на интегралы от s_j и до s_{j+1}.

Получаем формулу для расчёта «слагаемого»:

$$(-1)^{r+1} \frac{\left(e^{-(\lambda_i - \lambda_{i+s_1}) z_{p+1}} - e^{-\left(\lambda_i - \lambda_{i+s_1}\right) z_p}\right) e^{-\left(\lambda_{i+s_1} - \lambda_{i+q+1}\right) z_{p+1}}}{\prod\limits_{j=0}^{r} \prod\limits_{m=s_j}^{s_{j+1}-1} \left(\lambda_{i+m} - \lambda_{i+s_{j+1}}\right)}. \tag{12}$$

Для случая одинаковых лямбд получаем:

$$\pi_s = \int\limits_{z_p}^{z_{p+1}} \int\limits_{y_1}^{z_{p+1}} \ldots \int\limits_{y_q}^{z_{p+1}} dy_{q+1} \ldots dy_1 = \frac{1}{(q+1)!} \left(z_{p+1} - z_p\right)^{(q+1)} \tag{13}$$

$$\pi_s = \int_x^{+\infty} \int_{y_1}^{+\infty} \cdots \int_{y_q}^{+\infty} e^{-\lambda y_{q+1}} dy_{q+1} \ldots dy_1 = \frac{1}{\lambda^{q+1}} e^{-\lambda x} \tag{14}$$

В пятой главе осуществляется программная реализация полученных формул - задача разбивается на несколько этапов и программируется поэтапно [15,16].

В шестой главе рассматривается модель:

W_i -независимые, логарифмически распределенные величины с параметром α [11], то есть

$$W_i \sim Log(\alpha = 0,5), P(W = i) = \frac{-1}{ln(1-\alpha)} \frac{\alpha^i}{i}; \tag{15}$$

Функция премиального дохода:$h(t) = u + ct$;

Времена между претензиями $\tau_i, i = 1, 2, \ldots$ имеют экспоненциальное распределение с параметром λ.

Получим некоторые численные значения для формулы (11) , при $u =$

$1, c = 1,25, \lambda = 1$. Для случая одинаковых лямбда, также необходимо задать этот параметр. В данной модели примем $\lambda = 1$.

Таблица 1 – Значение вероятности неразорения страховой компании для x=5.

$P(T > x)$	
$\lambda = 1$	$\lambda \in [0.5; 1.5]$
0.361881	0.122512
0.178795	0.552457
0.343682	0.535343
0.222489	0.472768
0.579337	0.485787
0.269415	0.122512
0.286185	0.552457
0.527927	0.535343
0.240533	0.472768
0.361881	0.485787
Усредненные результаты	
0.347954667	0.4337734

Из таблицы 1 видно, что в среднем вероятность неразорения выше при различных лямбда.

Рассмотрим зависимость вероятности неразорения от выбора x для рассматриваемой модели($u = 1, c = 1.25, \alpha = 0.5$). Будем рассматривать 5 значений вероятности для каждого значения x и приводить среднее значение шестой строчкой.

Таблица 2 – Значение вероятности неразорения страховой компании для различных x.

$P(T > x)$		
x	$\lambda = 1$	$\lambda \in [0.5; 1.5]$
1	0.735759	0.661503
	0.801977	0.661503
	0.801977	0.885111
	0.801977	0.798231
	0.801977	0.661503
1	0.788733	0.7335702
2	0.406006	0.526926
	0.503447	0.496418

Продолжение таблицы 2.

x	$\lambda = 1$	$\lambda \in [0.5; 1.5]$
2	0.704104	0.58195
2	0.503447	0.58195
2	0.524090	0.5538388
3	0.575007	0.671778
	0.430559	0.471339
	0.643305	0.528451
	0.643305	0.465313
	0.279803	0.514453
3	0.514396	0.5302668
4	0.600895	0.541409
	0.600895	0.541409
	0.536077	0.541409
	0.451991	0.707984
	0.185354	0.684813
4	0.475042	0.6034048
5	0.39336	0.541409
5	0.359769	0.541409
	0.200515	0.541409
	0.467977	0.707984
	0.343682	0.684813
5	0.353061	0.6034048

Для наглядности проиллюстрируем таблицу графиком, используя усредненные значения. На рисунке 2 и далее, график I - значения вероятности для одинаковых лямбд, а II - для различных лямбд.

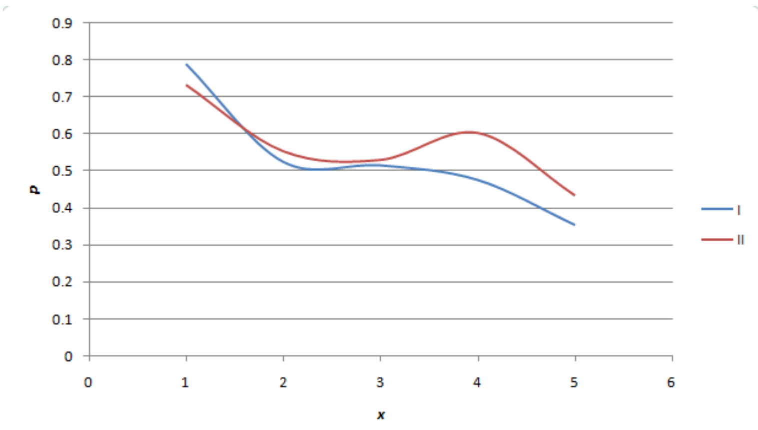

Рисунок 2 – Зависимость вероятности неразорения от x.

Из рисунка 2 и таблицы 2 видно, что при увеличении x вероятность волнообразно уменьшается, причём в случае одинаковых лямбд скорость убывания больше.

Далее рассмотрим зависимость вероятности неразорения от начального капитала u. Проиллюстрируем таблицу 3 и рисунком 3.

Таблица 3 – Значение вероятности неразорения страховой компании для различных u.

$P(T > x)$		
u	$\lambda = 1$	$\lambda \in [0.5; 1.5]$
1	0.419383	0.465143
	0.527927	0.535343
	0.269119	0.457481
	0.402133	0.79511
	0.419383	0.465143
1	0.407589	0.543644
3	0.337573	0.862582
	0.897282	0.933112
	0.295026	0.885867
	0.867584	0.922366
	0.816262	0.771021
3	0.6427454	0.8749896
5	0.761946	0.749210
	0.787862	0.692174
	0.742106	0.772645
	0.628559	0.749342
	0.844411	0.994202
5	0.7529768	0.7915146
9	0.994359	0.994202
	0.988882	0.991853
	0.757142	0.998342
	0.998058	0.99425
	0.994566	0.994367
9	0.9466014	0.9946028
12	0.993839	0.998163
	0.999948	0.996919
	0.999812	0.998069
	0.995027	0.98535
	0.998046	0.994363
12	0.9973344	0.9945728

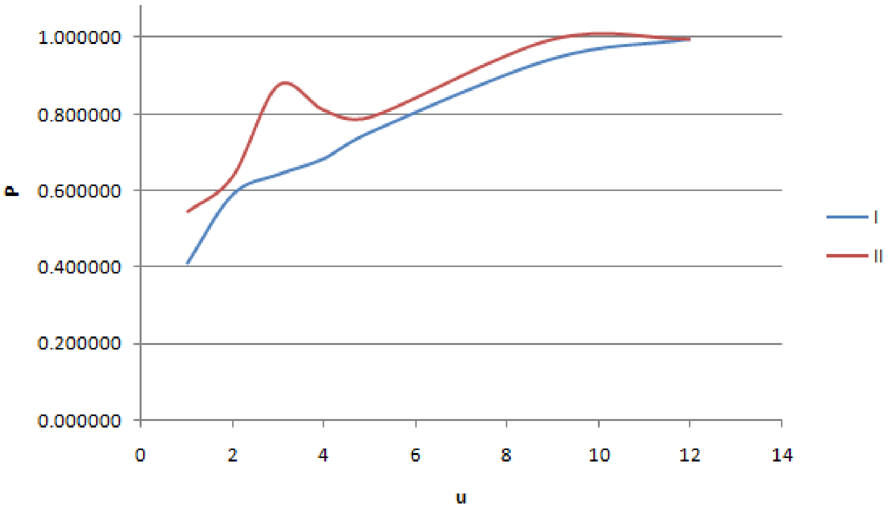

Рисунок 3 – Зависимость вероятности неразорения от u.

Из рисунка видно, что в случае одинаковых лямбда, вероятность не имеет скачков и возрастает монотонно, в отличие от II. Но вероятность неразорения во втором случае всегда больше.

Покажем зависимость вероятности неразорения от дохода c.

Таблица 4 – Значение вероятности неразорения страховой компании для различных c.

$P(T > x)$		
c	$\lambda = 1$	$\lambda \in [0.5; 1.5]$
1	0.436619	0.679084
	0.436619	0.224961
	0.436619	0.507452
	0.166203	0.282358
	0.166203	0.33934
1	0.3284526	0.406639
1.5	0.198811	0.583014
	0.50822	0.646221
	0.439898	0.667542
	0.618376	0.84578
	0.618376	0.536784
1.5	0.4767362	0.6558682
2	0.477788	0.902662
	0.724329	0.687847
	0.596984	0.901586
	0.269378	0.657829
2	0.822785	0.905012

Продолжение таблицы 4.

c	$\lambda = 1$	$\lambda \in [0.5; 1.5]$
2	0.5782528	0.8109872

Покажем тенденцию с помощью графика:

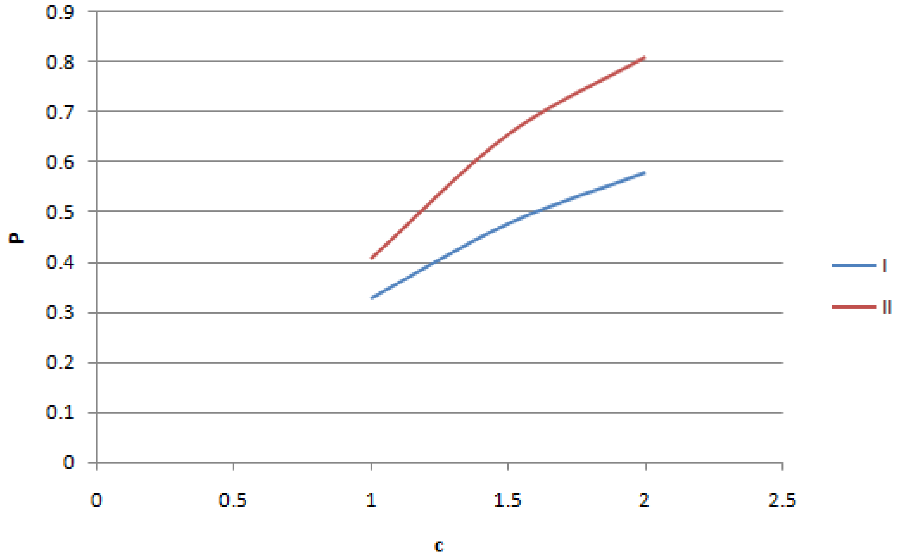

Рисунок 4 – Зависимость вероятности неразорения от c.

Видно,что при увеличение c вероятность неразорения резко возрастает. Так же видно, что вероятность неразорения для различных лямбда всегда выше.

Анализируем зависимость вероятности неразорения от параметра α и λ. Параметр α показывает претенциозную сумму, чем ближе этот параметр к 1, тем больше вероятность, что сумма будет высокая.Из этого следует, что среднее значение вероятности неразорения увеличивается при приближение α к 0, и уменьшается при приближение α к 1. Параметр λ показывает насколько часто поступают претензии страховой компании. При увеличение параметра λ увеличивается вероятность поступления претензии. Поэтому имеет смысл рассматривать случай с различными лямбда, рассмотреть зависимость вероятности неразорения от интервала выбора лямбд.

Из таблицы 5 видно, что при уменьшении интервала для лямбд вероятность неразорения уменьшается, и чем меньше интервал, тем быстрее уменьшается вероятность.

Таблица 5 – Значение вероятности неразорения страховой компании для различных интервалов λ.

$\lambda \in$	[0,5;1,5]	[0,6;1,4]	[0,8;1,2]	[0,9;1,1]
P	0.598511	0.749551	0.351026	0.585697
	0.76186	0.390738	0.661314	0.434317
	0.717576	0.684811	0.599904	0.487485
	0.577244	0.718262	0.661314	0.59915
	0.618389	0.749551	0.328298	0.54479
P	0.654716	0.6585826	0.520371	0.5302878

В общем случае получаем, что вероятность неразорения при различных λ выше, чем при фиксированном значении λ. Но график вероятности при фиксированном значении ведёт себя более плавно, не скачкообразно.

Заключение

В ходе работы были изучены основные сведения актуарной математики. Рассмотрены основные понятия теории одномерных B-сплайнов. Было разобрано доказательство теоремы Игнатова и Каишева об оценке вероятности неразорения страховой компании.

Были получены явные формулы для расчёта вероятности неразорения страховой компании для случаев одинаковых и различных значений обратных величин к математическим ожиданиям промежутков между выплатами. В случае, когда нам известны все эти ожидания и они все различны, то применяется первая формула. Вторая формула применяется в случае, когда все ожидания между собой равны, данный случай существенно чаще используется на практике. По полученным формулам были созданы программы и получены численные результаты.

Список используемых источников

1. Фалин Г. И., Фалин А. И. Актуарная математика в задачах. — 2-е изд., перераб. и доп. — . : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 192 с. — ISBN 5-9221-0451-9.
2. Баскаков В.Н., Карташов Г.Д. Введение в актуарную математику: Учебное пособие. - М.: Изд-во МГТУ им. II.) Баумана. 1998. - 63 с.. ил.
3. А. А. Акопян, А. А. Саакян, Многомерные сплайны и полиномиальная интерполяция, УМН, 1993, том 48, выпуск 5(293), 3–76
4. Василенко В.А., Сплайн-функции: теория, ритмы, программы. - Новосибирск: Найука, 1983.
5. Ignatov, Z. G.; Kaishev, V. K. Two-sided bounds for the finite time probability of ruin. Scand. Actuar. J. 2000, no. 1, 46–62.
6. Википедия [Электронный ресурс] : свободная энциклопедия/ текст доступен по лицензии Creative Commons Attribution-ShareAlike ; Wikimedia Foundation, Inc, некоммерческой организации. - Электрон. дан. (1552166статей, 5924561 страниц, 218 594 загруженных файлов). - Wikipedia®, 2001- . - URL: http://ru.wikipedia.org/wiki/Теория вероятностей (дата обращения: 10.06.2019). - Загл. с экрана. - Последнее изменение страницы: 13.03, 9 июня 2019 года. - Яз. рус.
7. Ignatov, Z. G.; Kaishev, V. K.; Krachunov, R. S. An improved finite-time ruin probability formula and its Mathematica implementation. Insurance Math. Econom. 29 (2001), no. 3, 375–386.
8. Ignatov, Z.G., Kaishev, V.K. Some properries of generalized B-spline. In: Proceedings of the conference on constructixe theory of function. - Bulgaria Acadamy of Science Published Co. 1988. pp. 233-241.
9. Википедия [Электронный ресурс] : свободная энциклопедия/ текст доступен по лицензии Creative Commons Attribution-ShareAlike ; Wikimedia Foundation, Inc, некоммерческой организации. - Электрон. дан. (1552166статей, 5924561 страниц, 218 594 загруженных файлов). - Wikipedia®, 2001- . - URL: http://ru.wikipedia.org/wiki/Сплайн (дата обращения: 16.06.2019) - Загл. с экрана. - Последнее изменение страницы: 15:06, 14 июня 2019 года. - Яз. рус.
10. Dahmen, W. and Michelli, C. A. Statistical encounters with B-splines. Contemporar Mathematics. 1986. pp. 17- 48.

11. Википедия [Электронный ресурс] : свободная энциклопедия/ текст доступен по лицензии Creative Commons Attribution-ShareAlike ; Wikimedia Foundation, Inc, некоммерческой организации. - Электрон. дан. (1630566 статей, 6221696 страниц, 226424 загруженных файлов). - - Wikipedia®, 2001- . - URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Логарифмическое распределение (дата обращения 25.05.2020). - Загл. с экрана. - - Последнее изменение страницы: 14 декабря 2019 в 22:17. - Яз. рус.
12. Википедия [Электронный ресурс] : свободная энциклопедия/ текст доступен по лицензии Creative Commons Attribution-ShareAlike ; Wikimedia Foundation, Inc, некоммерческой организации. - Электрон. дан. (1630566 статей, 6221696 страниц, 226424 загруженных файлов). - - Wikipedia®, 2001 - URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Экспоненциальное распределение (дата обращения 25.05.2020). - Загл. с экрана. - Последнее изменение страницы: 21 мая 2020 в 23:30. - Яз. рус.
13. Самарин А. (The Freeman) Генераторы непрерывно распределенных случайных величин [Электронный ресурс]//Хабр [Электронный ресурс] : сообщество IT-специалистов. - URL:https://habr.com/ru/post/263993/ (дата обращения 23.05.2020). - Загл. с экрана. - Последнее изменение страницы: 2 августа 2015 в 19:29. - Яз. рус.
14. Самарин, А. (The Freeman) Генераторы дискретно распределенных случайных величин [Электронный ресурс]//Хабр [Электронный ресурс] : сообщество IT-специалистов. - URL:https://habr.com/ru/post/265321/ (дата обращения 24.05.2020). - Загл. с экрана. - Последнее изменение страницы: 16 января 2016 в 01:54. - Яз. рус.
15. Вставская, Е. Генерация перестановок [Электронный ресурс]//Программирова ресурс] - URL:https://prog-cpp.ru/permutation/ (дата обращения 12.05.2020). - Загл. с экрана. - Яз. рус.
16. Вставская, Е. Генерация сочетаний [Электронный ресурс]//Программирование ресурс] - URL:https://prog-cpp.ru/combinations/ (дата обращения 14.05.2020). - Загл. с экрана. - Яз. рус.
17. Виноградов, О.П. Вероятность разорения страховой компании в случае, когда интервалы между моментами выплат имеют неодинаковые показательные распределения, Теория вероятн. и ее примен. Т. 43 Ч. 2/ О.П.

Виноградов. - М. : МГУ,1998. - 352–357 с.