МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

Базисы типа Хаара и их приложения к обработке информации

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 248 группы

направление 09.04.03 — Прикладная информатика

механико-математического факультета

Мыльцина Владимира Викторовича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент ____________ С. С. Волосивец

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., доцент ____________ С. П. Сидоров

Саратов 2020

Введение. Дискретный гармонический анализ – это математическая дисциплина, ориентированная на прикладные задачи цифровой обработки сигналов. Понятие сигнал требует уточнения. В дискретном гармоническом анализе сигнал определяется как комплекснозначная периодическая функция целочисленного аргумента.

Изучаются преобразования сигналов. Одним из основных является дискретное преобразование Фурье (ДПФ). В 1965 г. в работе Кули и Тьюки предложили быстрое преобразование Фурье (БПФ) – быстрый метод вычисления ДПФ. По существу, это открытие послужило началом развития дискретного гармонического анализа как самостоятельной дисциплины.

Формула обращения для ДПФ порождает разложение сигнала по экспоненциальному базису. Разложение сигнала по различным базисам является основным приемом цифровой обработки сигналов. Свойства коэффициентов таких разложений позволяют выявить структуру сигнала. Для определения частотно-временных характеристик сигнала используются вейвлетные базисы.

Круг практических задач, в которых применяется преобразование Фурье, достаточно широк: распознавание, сжатие, фильтрация, аппроксимация и т.д. В качестве относительно новых интересных способов применения преобразования Фурье можно привести примеры: нанесение водяных знаков, то есть незаметное размещение какой-либо информации в изображении, и стегалография — шифрование послания таким образом, чтобы оно было понятно всем, кроме получателя.

Целью данной работы является изучение дискретных систем Виленкина-Крестенсона, у которых образующая последовательность состоит из одинаковых простых чисел.

Пространство сигналов. Пусть N – натуральное, фиксированное число. *Сигналом* называется N-периодическая комплекснозначная функция целочисленного аргумента
$x = x(j), j \in Z$. Множество сигналов обозначается через C_N. В C_N естественным образом вводятся две операции — операция сложения двух сигналов и операция умножения сигнала на комплексное число:

$$y = x_1 + x_2 \iff y(j) = x_1(j) + x_2(j),\ j \in Z;$$
$$y = cx \iff y(j) = cx(j),\ j \in Z.$$

В результате C_N становится линейным комплексным пространством. Нулевым элементом в C_N является сигнал O, такой, что $O(j) = 0$ при всех $j \in Z$.

Единичным N-периодическим импульсом называется сигнал δ_N, у которого $\delta_N(j) = 1$, когда j делится на N, и $\delta_N(j) = 0$ при остальных $j \in Z$. Очевидно, что $\delta_N(-j) = \delta_N(j)$.

Лемма 1.

Для $x \in C_N$ справедливо равенство

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\delta_N(j-k), \quad j \in Z. \tag{1}$$

Формула (1) дает аналитическое представление сигнала x по его значениям на основном периоде $J_n = 0 : N - 1$.

Вводится в рассмотрение система сдвигов единичного имупульса

$$\delta_N(j),\ \delta_N(j-1), \ldots, \delta_N(j-N+1). \tag{2}$$

Эта система линейно независима на Z.

Согласно лемме 1 любой сигнал x разлагается по линейно независимой системе (2). Значит, система (2) является базисом пространства C_N. При этом размерность C_N равна N.

Лемма 2.

Для любого сигнала x при всех $l \in Z$ выполняется равенство

$$\sum_{j=0}^{N-1} x(j+l) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j). \tag{3}$$

Следствие.

В условиях леммы 2 справедливо равенство

$$\sum_{j=0}^{N-1} x(l-j) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j). \tag{4}$$

В C_N скалярное произведение и норму можно представить в виде

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\overline{y(j)}, \quad ||x|| = \langle x, x\rangle^{1/2}.$$

Два сигнала x, y называются ортогональными, если $\langle x, y\rangle = 0$. Сигнал x называется нормированным, если $||x|| = 1$.

Сдвиг $x(j-k)$ сигнала $x(j)$ как элемент пространства C_N обозначается через $x(\cdot - k)$.

Лемма 3. *При всех $k, l \in Z$ имеет место равенство*

$$\langle \delta_N(\cdot - k), \delta_N(\cdot - l)\rangle = \delta_N(k-l).$$

Следствие.

Система сигналов (2) является ортонормированной, т.е. образует ортонормированный базис в пространстве C_N.

Лемма 4.

Для произвольных сигналов x, y выполняется неравенство Коши–Буняковского

$$|\langle x, y\rangle| \le ||x|| \cdot ||y||. \tag{5}$$

При $x \neq O$ неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $y = cx$ при некотором $c \in C$.

В линейном комплексном пространстве C_N можно ввести операцию умножения сигналов:

$$y = x_1 x_2 \iff y(j) = x_1(j)x_2(j),\ j \in Z.$$

В этом случае C_N становится коммутативной алгеброй с единицей. Единицей является сигнал I, у которого $I(j) = 1$ при всех $j \in Z$.

Обратный сигнал x^{-1} к сигналу x определяется из условия $xx^{-1} = x^{-1}x = I$. Он существует тогда и только тогда, когда все значения $x(j)$ отличны от нуля. При этом $x^{-1}(j) = [x(j)]^{-1}, j \in Z$.

Наряду с сигналом x рассматриваются сигналы $\overline{x}, Rex, Imx, |x|$ со значениями $\overline{x}(j) = \overline{x(j)}, [Rex](j) = Rex(j), [Imx](j) = Imx(j), |x|(j) = |x(j)|$. Отмечается, что $x\overline{x} = |x|^2$.

Сигнал x называется четным, если $x(-j) = \overline{x}(j)$, и нечетным, если $x(-j) = -\overline{x}(j)$ при всех $j \in Z$. Сигнал x называется вещественным, если $Imx = O$, и чисто мнимым, если $Rex = O$.

В дальнейшем рассматривается пространство C_N при $N \geq 2$. Однако и при $N = 1$ это пространство имеет смысл: C_1 состоит из сигналов x, у которых $x(j) \equiv c$, где c — комплексное число. При этом $\delta_1 = I$.

Дискретное преобразование Фурье. Пусть корень N-ой степени из единицы $\omega_N = exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right)$.

Лемма 5. *Справедливо равенство*

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(\omega_N^{kj}) = \delta_N(j), j \in Z. \tag{6}$$

Дискретное преобразование Фурье – это отображение $F_N : C_N \to C_N$, сопоставляющее сигналу x сигнал $X = F_N(x)$ со значениями

$$X(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\omega_N^{-kj},\ k \in Z. \tag{7}$$

Сигнал X называется спектром Фурье сигнала x или просто спектром, а величины $X(k)$ – компонентами спектра.

Теорема 1.

Справедлива формула обращения

$$x(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \omega_N^{kj}, \; j \in Z. \tag{8}$$

Пусть $u_k(j) = \omega_N^{kj}$. Тогда формула обращения для ДПФ примет вид

$$x(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) u_k(j) \tag{9}$$

Это значит, что сигнал $x(j)$ разлагается по системе сигналов

$$u_0(j), u_1(j), \ldots, u_{N-1}(j). \tag{10}$$

Коэффициентами в этом разложении являются компоненты спектра.

Лемма 6.

Система сигналов (10) ортогональна. При этом $||u_k||^2 = N$ при всех $k \in 0 : N-1$.

Система (10) образует ортогональный базис в пространстве C_N . Этот базис называется экспоненциальным.

Умножив обе части равенства (9) скалярно на u_l и используя лемму 6 получим $\langle u_k, u_l \rangle = X(l)$. Таким образом коэффициенты в разложении (9) определяются однозначно.

Тогда формула (6) примет вид

$$\delta_N(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (u_k(j)).$$

Данное разложение единичного импульса по экспоненциальному базису, в котором все коэффициенты равны единице. В силу единственности разложения $F_N(\delta_N) = I$.

Теорема 2.

Необходимым и достаточным условием вещественности сигнала x является четность его спектра X.

Теорема 3.

Необходимым и достаточным условием четности сигнала x является вещественность его спектра X.

Как следствие из теорем 2 и 3 получаем результат: *критерием вещественности и четности сигнала x является вещественность и четность его спектра X.*

В примерах, представленных ниже, рассматривается вычисление ДПФ. Сигналы из C_N достаточно задавать на основном периоде $0 : N-1$.

Пример 1. Пусть m - натуральное число, $2m \le N$, и

$$x(j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j \in 0 : m-1 \text{ и } j \in N-m+1 : N-1; \\ 0 & \text{при } j \in m : N-m. \end{cases}$$

(При $m = 1$ сигнал $x(j)$ совпадает с $\delta_N(j)$.)

Нужно показать, что

$$X(k) = \begin{cases} 2m-1 & \text{при } k = 0; \\ \frac{\sin((2m-1)k\pi/N)}{\sin(k\pi/N)} & \text{при } k \in 1 : N-1. \end{cases}$$

Действительно, по определению ДПФ

$$X(k) = \sum_{j=0}^{m-1} \omega_N^{-kj} + \sum_{j=N-m+1}^{N-1} \omega_N^{k(N-j)} = \sum_{j=-(m-1)}^{m-1} \omega_N^{kj}.$$

В частности, $X(0) = 2m - 1$. Далее, при $k \in 1 : N-1$ по формуле для суммы членов геометрической прогрессии

$$
\begin{aligned}
X(k) = \frac{\omega_N^{-k(m-1)} - \omega_N^{km}}{1-\omega_N^k} \cdot \frac{1-\omega_N^{-k}}{1-\omega_N^{-k}} = \\
= \frac{\omega_N^{-k(m-1)} - \omega_N^{km} - \omega_N^{-km} + \omega_N^{k(m-1)}}{2 - -\omega_N^k - \omega_N^{-k}} = \\
= \frac{\sin(2(m-1)k\pi/N) - \sin(2mk\pi/N)}{1-\cos(2k\pi/N)} = \\
= \frac{\sin(2(m-1)k\pi/N)\sin(k\pi/N)}{\sin^2(k\pi/N)} = \frac{\sin((2m-1)k\pi/N)}{\sin(k\pi/N)}.
\end{aligned}
$$

Пример 2. Пусть $N = 2n$ и

$$
x(j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j \in 0 : n-1; \\ -1 & \text{при } j \in n : N-1. \end{cases}
$$

Нужно показать, что

$$
X(k) = \begin{cases} 0 & \text{при четных } k, \\ 2(1 - i\operatorname{ctg}\frac{\pi k}{N}) & \text{при нечетных } k. \end{cases}
$$

По определению ДПФ

$$
X(k) = \sum_{j=0}^{n-1} \omega_N^{-kj} - \sum_{j=n}^{2n-1} \omega_N^{-k(j-n)-kn} = (1 - \omega_N^{-kn}) \sum_{j=0}^{n-1} \omega_N^{-kj}.
$$

Поскольку $\omega_2 = -1$, то $\omega_N^{-kn} = \omega_{2n}^{-kn} = \omega_2^{-k} = (-1)^{-k}$, так что

$$
X(k) = \begin{cases} 0 & \text{при четных } k, \\ \frac{2(1-\omega_N^{-kn})}{1-\omega_N^{-k}} = \frac{4}{1-\omega_N^{-k}} & \text{при нечетных } k. \end{cases}
$$

Система Хаара. Введем стандартные обозначения двоичных нитервалов. Двоичным интервалом называется интервал вида

$$\left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right), \text{ где } i = 1, 2, \ldots, 2^k, k = 0, 1, \ldots.$$

Для $n = 2^k + i, i = 1, 2, \ldots, 2^k, k = 0, 1, \ldots$ обозначим

$$\Delta_n = \Delta_k^i = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right); \overline{\Delta}_n = \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right]; \qquad \Delta_1 = \Delta_0^0 = (0,1); \overline{\Delta}_1 = [0,1]. \tag{11}$$

Если $\delta \subset (0,1)$ - какой-либо интервал, то через δ^+ и δ^- обозначается стоотвественно левая и правая половины интервала δ (без включениея средней точки). В частности ($n = 2^k + i$),

$$\Delta_n^+ = (\Delta_k^i)^+ = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) = \Delta_{k+1}^{2i-1}, \qquad \Delta_n^- = (\Delta_k^i)^- = \left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}\right) = \Delta_{k+1}^{2i}. \tag{12}$$

Интервалы $\Delta_{k\,i-1}^{i\,2^k}$ мы будем называть интервалами k-й пачки, $k = 0, 1, \ldots$. Отметим для дальнейшего следующие простые свойства двоичных интервалов:

1) $\Delta_k^i \cap \Delta_k^j = \oslash$ при $i \neq j$, i, j = 1,2,$\ldots, 2^k, k = 1, 2, \ldots$.

2) Если Δ_n и Δ_m - двоичные интервалы и $\Delta_n \cap \Delta_m \neq \oslash$, то либо $\Delta_n \subset \Delta_m$, либо $\Delta_m \subset \Delta_n$.

Свойство 1) очевидно, а 2) вытекает из того, что при $n = 2^k + i, m = 2^l + j, k \geq l$, в силу равенства

$$\Delta_i^j = \left(\frac{j-1}{2^l}, \frac{j}{2^l}\right) = \left(\frac{2^{k-l(j-1)}}{2^k}, \frac{2^{k-l}j}{2^k}\right),$$

либо $\Delta_m \subset \Delta_n$ (если $2^{k-l}(j-1) < i \leq 2^{k-l}j$), либо $\Delta_m \cap \Delta_n \neq \oslash$ (если $i \leq 2^{k-l}(j-1)$ или $2^{k-l}j$).

Определение 1.

Система Хаара - это система функций

$$\chi = \chi_n(x)_{n=1}^{\infty}, x \in [0,1],$$

в которой $\chi_1(x) \equiv 1$*, а функция* $\chi_n(x)$ *с* $2^k < n \leq 2^{k+1}, k = 0,1,\dots,$ *определяется так:*

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq \overline{\Delta}_n, \\ 2^{k/2} & \text{при } x \in \Delta_n^+, \\ -2^{k/2} & \text{при } x \in \Delta_n^-. \end{cases} \tag{13}$$

Значения $\chi_n(x)$ в точках разрыва и в концах отрезка $[0,1]$ выбираются так, чтобы $\chi_n(x) \in D_{2^k}$, т.е. чтобы выполнялись равенства

$$\begin{gathered} \chi_n(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2}[\chi_n(x+\delta) + \chi_n(x-\delta)],\ x \in (0,1), \\ \chi_n(0) = \lim_{\delta \to +0} \chi_n(\delta),\ \chi_n(1) = \lim_{\delta \to +0} \chi_n(1-\delta). \end{gathered} \tag{14}$$

Группу функций $\{\chi_n(x)\}_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}$, $k = 0,1,\dots,$ будем называть k-й пачкой. Часто удобнее вместо обычной, „одинарной“ нумерации системы Хаара употреблять нумерацию, примо указывающую в какой пачке лежит данная функция, точнее, полагают при $k = 0,1,\dots, i = 1,2,\dots,2^k, n = 2^k + i$

$$\chi_k^{(i)}(x) = \chi_n(x),\ \chi_0^{(0)}(x) = 1,\ x \in [0,1]. \tag{15}$$

Тогда ясно, что система Хаара состоит из объединения пачек $\{\chi_k^{(i)}(x)\}_{i=1}^{2^k}$, $k = 0,1,\dots,$ и функции $\chi_0^{(0)}(x)$.

Из свойств 1) и 2) двоичных интервалов непосредсвенно вытекает, что система Хаара - ортонормированння система. Для того чтобы доказать ее полноту, отметим следующее

Утверждение 1. *Для* $N = 2^k$, $k = 0,1,\dots,$ *линейная оболочка* $G_N(\chi)$ *функций* $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^N$ *совпадает с* D_N*, т.е. при* $N = 2^k$, $k = 0,1,\dots,$

$$G_N(\chi) := \{f(x) : f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_n(x)\} = D_N. \tag{16}$$

Действительно, функции Хаара линейно независимы (так как система Хаара - О.Н.С.), поэтому равенство (6) вытекает из того факта, что $G_N(\chi)$ и $D_N - N$-мерные линейные пространства, причем $G_N(\chi) \subset D_N$.

Так как множество функций $f \in \bigcup_{k=0}^{\infty} D_{2^k}$ всюду плотно в пространствах $L^p(0,1), 1 \leq p < \infty$, из утверждения 1 следует полнота системы Хаара в $L^p(0,1), 1 \leq p < \infty$.

Найдем выражение для частных сумм $S_N(f,x)$ ряда Фурье-Хаара функции $f \in L^1(0,1)$:

$$f(x) \ \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\chi_n(x),$$

где $c_n(f) = c_n(f,\chi)$ - коэффициенты Фурье-Хаара функции $f(x)$, по определенаю функции Хаара

$$\begin{aligned} c_1(f) &= \int_0^1 f(x)dx, \\ c_n(f) &= 2^{\frac{k}{2}} \left[\int_{\Delta_n^+} f(x)dx - \int_{\Delta_n^-} f(x)dx \right], \ n = 2, 3, \ldots . \end{aligned} \tag{17}$$

Заключение. Изучены необходимые сведения из теории гармонического анализа: основные понятия, теоремы, леммы необхадимые для работы с сигналами. Рассмотрено дискретное преобразование Фурье и примеры на его вычисление. Также уделено внимание изучению системы Хаара.