МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»
(СГУ)

Кафедра математического обеспечения вычислительных
комплексов и информационных систем

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОМБИНИРОВАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С СУЩЕСТВЕННЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПО ПРОСТРАНСТВУ ПАРАМЕТРАМИ

АВТОРЕФЕРАТ

НАУЧНО-КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ

аспиранта 4 курса
направления 09.06.01 –Информатика и вычислительная техника
направленности «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

МАХАНЬКОВА АЛЕКСЕЯ ВЛАДИМИРОВИЧА

Научный руководитель
д.ф-м.н., профессор ______________ Д. К. Андрейченко

Зав. кафедрой
д.ф-м.н., профессор ______________ Д. К. Андрейченко

Саратов 2020

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Современные технические системы содержат объекты управления с сосредоточенными по пространству параметрами и динамически связанные с ними через границы раздела объекты управления с распределенными по пространству параметрами. Математические модели подобных технических систем представляют собой связанные посредством граничных условий и условий связи системы обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных при соответствующих начальных условиях. В работе [1] данный класс математических моделей назван комбинированными динамическими системами, и там же сформулированы и доказаны основные теоремы об устойчивости КДС.

Типичным примером КДС являются широко используемые в гидродинамических гироскопах гидродинамические подвесы. В частности, в работе [2] подробно исследована устойчивость на кривой подвижного равновесия цилиндрического гидродинамического подвеса с вязкой несжимаемой жидкостью в поддерживающем слое. Для этого потребовалось решить нелинейную краевую задачу, моделирующую установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости в поддерживающем слое, а также линейные краевые задачи в изображениях Лапласа для возмущенного движения поддерживающего слоя. Коэффициенты линейных уравнений возмущенного движения существенно зависят от установившегося течения вязкой несжимаемой жидкости, и в этом смысле данная КДС характеризуется существенной пространственной неоднородностью объекта управления с распределенными по пространству параметрами.

Другим примером КДС с существенной пространственной неоднородностью объектов управления с распределенными по пространству параметрами может служить рассматриваемый в данной работе цилиндрический гидродинамический подвес со слабо сжимаемой жидкостью в поддерживающем слое.

Аналогично [2], устойчивость КДС с существенной пространственной неоднородностью объектов управления с распределенными по пространству параметрами может быть исследована на основе «быстрого» алгоритма проверки устойчивости, т.е. частотного критерия устойчивости, предложенного в [1]. Однако при анализе подобных систем требуется применять численного анализа в низкочастотной области и методы асимптотического интегрирования в области высоких частот. В свою очередь, применение методов асимптотического интегрирования в высокочастотной области значительно снижает трудоемкость алгоритмов компьютерного моделирования, т.к. позволяет непосредственно получить искомое решение либо понизить размерность модельных краевых задач.

Проблема неустойчивости центрального положения шипа в гидродинамическом подшипнике скольжения обсуждалась в работах [3, 4]. Тем не менее, в работе [5], было показано, что, если масса шипа достаточно велика, наступает неустойчивость подвеса. Обозначенная проблема связанна с учетом инерционных эффектов в поддерживающем слое жидкости. Указанный эффект становится тем более актуальным применительно к высокооборотным гидродинамическим подвесам и опорам в приборостроении [2, 6–13].

Как правило, при решении задач об устойчивости гидродинамических подвесов и опор в той или иной форме выполняется упрощение уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости, связанное с малостью безразмерного параметра, выражающего отношение характерного зазора цилиндрического подвеса (опоры) к характерному радиусу кривизны. Вместе с тем при анализе устойчивости гидродинамических подвесов и опор с приближенным учетом инерционных членов в слое жидкости через усредненную по сечению зазора скорость, пренебрежение некоторыми слагаемыми первого порядка малости по указанному параметру может привести к принципиально неправильным выводам об устойчивости или неустойчивости гидродинамических опор и подвесов [6, 9].

Из этих результатов следует, что центральное положение подвеса с легким внутренним телом (приведенная плотность которого меньше плотности жидкости) асимптотически устойчиво, а центральное положение подвеса с тяжелым внутренним телом (приведенная плотность которого больше плотности поддерживающего слоя) неустойчиво.

Исследование устойчивости абсолютно твердого длинного цилиндрического тела в цилиндрическом гидродинамическом подвесе с полным учетом зависимости профиля распределения скоростей жидкости от радиальной координаты без априорного представления инерционных членов в слое жидкости через усредненную по сечению зазора скорость проведено в работе [2].

Использован частотный критерий устойчивости комбинированных динамических систем, предложенный в [1]. В результате установлено, что подвес с легким внутренним телом асимптотически устойчив в центральном положении, и остается устойчивым при смещении из центрального положения по кривой подвижного равновесия вплоть до относительных эксцентриситетов порядка 0,75. Центральное положение подвеса с тяжелым внутренним телом неустойчиво. Однако для подвеса с тяжелым внутренним телом возникает область устойчивости в диапазоне относительных эксцентриситетов примерно от 0.33 до 0.72.

Вместе с тем, все рассмотренные ранее математические модели использовали предположение о том, что жидкость в поддерживающем слое несжимаема, т.е. возмущения давления в поддерживающем слое распространяются мгновенно, т.е. с бесконечно большой скоростью. Вместе с тем, возмущения давления в поддерживающем слое распространяются с достаточно большой, но конечной звуковой скоростью, и нет исследований, как конечная скорость распространения возмущений давления влияет на устойчивость подвеса.

Характеристика целей исследования. Целью работы является моделирование устойчивости цилиндрического гидродинамического подвеса с полным учетом зависимости профиля распределения скоростей жидкости от радиальной координаты, а также с учетом конечной скорости распространения возмущений давления в поддерживающем слое на основе методов теории комбинированных динамических систем. Для достижения поставленной цели требуется решить следующие задачи:

1. Разработать комбинированную динамическую модель цилиндрического гидродинамического подвеса с полным учетом зависимости профиля распределения скоростей вязкой жидкости от радиальной координаты, а также с учетом конечной скорости распространения возмущений давления в поддерживающем слое.

2. Вывести нелинейную краевую задачу для моделирования равновесного состояния подвеса и установившегося течения жидкости в поддерживающем слое.

3. Получить характеристический квазимногочлен КДС и линейные краевые задачи для расчета передаточных функций поддерживающего слоя.

4. Разработать алгоритмы численного интегрирования нелинейной краевой задачи, а также линейных краевых задач в области низких и средних частот.

5. Выполнить асимптотическое интегрирование линейных краевых задач для расчета передаточных функций поддерживающего слоя в высокочастотной области.

6. Разработать алгоритмы численного интегрирования упрощенных на основе асимптотического интегрирования линейных краевых задач

7. Исследовать влияние сжимаемости жидкости и конечной скорости распространения возмущений давления на устойчивость подвеса.

Объектом исследования является гидродинамические подвесы высоко перегрузочных гидродинамических гироскопов и акселерометров.

Предметом исследования: являются математические модели комбинированных динамических систем с существенной неоднородностью объектов управления с распределенными по пространству параметрами и алгоритмы моделирования их устойчивости.

Методы исследования: В работе использованы методы теории дифференциальных уравнений, уравнений математической физики, динамики вязкой сжимаемой жидкости, теории автоматического управления, интегральных преобразований, а также асимптотического и численного анализа.

Научная новизна результатов, полученных в ходе исследования состоит:

1. Предложена математическая модель цилиндрического гидродинамического подвеса с учетом сжимаемости жидкости в поддерживающем слое.

2. Предложены методы и алгоритмы численного анализа и асимптотического интегрирования модельных краевых задач.

3. Показана асимптотическая устойчивость подвеса с легким внутренним телом в центральном положении и в достаточно большом диапазоне изменения эксцентриситетов.

4. Показана возможность возникновения области устойчивости, подвеса с тяжелым внутренним телом в некотором диапазоне изменения эксцентриситетов.

5. Показана возможность оптимизации быстрого алгоритма моделирования устойчивости КДС, на основе асимптотического интегрирования в высокочастотной области, соответствующих модельных краевых задач.

Личный вклад автора: вывод модельных уравнений, разработка и оптимизация алгоритмов, проведение компьютерного моделирования.

Выносимые на защиту результаты

1. Математическая модель комбинированной динамической системы цилиндрического гидродинамического подвеса с полным учетом зависимости профиля распределения скоростей от радиальной координаты и учетом конечной скорости распространения возмущений давления в поддерживающем слое.

2. Алгоритм для вычисления нелинейной краевой задачи и линейных краевых задач в различных областях частотного спектра:

a) Явные формулы вычисления краевых задач в области сверхвысоких частот.

b) В области высоких частот выполняется асимптотическое интегрирование.

c) В области выше средних частот произведено упрощение модельных задач и понижена размерность.

d) В области средних и низких частот задача решалась численно методом Бубнова-Галеркина.

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, пяти глав с выводами, заключения и списка использованной литературы; она содержит 103 страницы текста, 26 рисунков и список использованных источников из 30 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность выбранной темы диссертационного исследования, характеризуется степень ее разработанности, определяются цели и задачи, осуществляется выбор предмета и объекта исследования. Формулируются положения, выносимые на защиту. Приводятся методы исследования.

В **первой** главе вводится математическая модель комбинированной динамической системы, характеризующей цилиндрический гидродинамический подвес. Моделирующие уравнения, рассматриваемые, как дискретно-континуальная система, преобразуются к безразмерным переменным и параметрам.

Движение гидродинамического подвеса и переменная толщина зазора, характеризуется следующими уравнениями:

$$\pi\beta(\frac{\rho_2}{\rho})\ddot{y} = \pi(\frac{\rho_2}{\rho_0} - 1)\gamma(\mathbf{g} - a) + N - \frac{\pi\rho_2}{\rho_0}\gamma(a - a_0),$$
$$\pi\frac{\rho_2}{\rho}J\dot{\omega} = -\frac{\beta}{\delta}G,$$
$$\mathbf{g} = (0, -1)^T,$$
$$h(\phi, t) = \frac{1+\beta}{\beta}[1 = \frac{\beta^2}{(1+\beta)^2}(\vec{v}\vec{e}_\phi)]^{1/2} - \frac{1}{\beta} - \vec{y}\vec{e}_r.$$

Движение слабосжимаемой жидкости, описывается упрощенным уравнением неразрывности и уравнением Навье-Стокса:

$$\frac{1}{c^2_{\text{зв}}}\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{v} = 0,$$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \beta\frac{\partial v_r}{\partial\phi}\vec{e}_r + \frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi + 2\vec{e}_3\times\vec{v} + \frac{1}{2}\nabla(\vec{v}^2) - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}) =$$
$$-\nabla p - \frac{\beta^2}{\delta}\nabla(\nabla\vec{v}) - \frac{\beta^2}{\delta}\nabla\times(\nabla\times\vec{v}) - \gamma(\vec{a} - \vec{a}_0 - \beta\ddot{\vec{y}}).$$

Граничные условия для уравнения принимают следующий вид:

$$v_r|_{\xi=0} = 0,$$
$$v_\phi|_{\xi=0} = -\omega,$$
$$v_r|_{\xi=h} = -\dot{\vec{y}}\cdot\vec{e}_r - \vec{y}\cdot\vec{e}_\phi,$$
$$v_\phi|_{\xi=h} = \beta(-\dot{\vec{y}}\cdot\vec{e}_\phi + \vec{y}\cdot\vec{e}_r).$$

А условия связи или сила и момент силы, действующие на внутреннее тело со стороны жидкости:

$$\vec{N} = \int_0^{2\pi} [(-p|_{\xi=0} + \frac{\beta^2}{\sigma_1}\frac{\partial v_r}{\partial \xi}|_\xi)\vec{e}_r + \frac{\beta}{\sigma}\frac{\partial v_\phi}{\partial \xi}|_{\xi=0}\vec{p}_\phi]d\phi,$$

$$G = 2\pi\beta\omega + \int_0^{2\pi} \frac{\partial v_\phi}{\partial \xi}|_{\xi=0} d\phi.$$

Во **второй** главе вводится критерий устойчивости гидродинамического подвеса [1]:

$$\Delta(0 \leq \sigma < \infty) arg\mathcal{D}(i\sigma) = \frac{5\pi}{2}.$$

Происходит вывод краевых задач для $N_{kj}^{(y)}(\lambda), G_j^{(y)}(\lambda)$; $N_j^{(\omega)}(\lambda), G^{(\omega)}(\lambda)$; и $N_{kj}^{(a)}(\lambda), G_j^{(a)}(\lambda)$. Также производится преобразование уравнений равновесного состояния к новым независимым переменным.

Для краевой задачи $N_{kj}^{(y)}(\lambda), G_j^{(y)}(\lambda)$ уравнения для переменной тольщины зазора принимают вид:

$$h(\phi) = -\vec{b}_j\vec{e}_r - \frac{\beta}{1+\beta}[1 - \frac{\beta^2}{(1+\beta)^2}(\vec{y}_0\vec{e}_\phi)^2]^{1/2}(\vec{y}_0\vec{e}_\phi)(\vec{b}_j\vec{e}_\phi),$$

а уравнение неразрывности и скорость

$$\frac{\lambda}{c_{\text{зв}}^2}p + \nabla\vec{v} = 0, \qquad \vec{v} = \beta v_r\vec{e}_r + v_\phi\vec{e}_\phi.$$

Далее приводятся уравнение Навье-Стокса при тех же условиях:

$$\lambda\vec{v} + \beta\frac{\partial v_r}{\partial \phi}\vec{e}_r + \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\vec{e}_\phi + 2\vec{e}_3 \times \vec{v} + \nabla(\vec{v}^{(0)} \cdot \vec{v}) - \vec{v}^{(0)} \times (\nabla \times \vec{v}),$$

$$- \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}^{(0)}) = -\nabla p + \frac{\beta^2}{\sigma_1}\nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \frac{\beta^2}{\sigma}\nabla \times (\nabla \times \vec{v}) - \beta\lambda^2\vec{b}_j,$$

граничные условия и условия связи:

$$
\begin{aligned}
& v_r|_{x=0} = 0, \\
& v_\phi|_{x=0} = 0, \\
& v_r|_{x=1} = -\frac{\partial v_r^{(0)}}{\partial \xi}|_{\xi=h_0} h - (\lambda \vec{e}_r + \vec{e}_\phi) \cdot \vec{b}_j, \\
& v_\phi|_{x=1} = \frac{\partial v_\phi^{(0)}}{\partial \xi}|_{\xi=h_0} h + (\lambda \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\phi) \cdot \vec{y},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} N_{1j}^{(y)}(\lambda) \\ N_{2j}^{(y)}(\lambda) \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} [(-p|_{x=0} + \frac{\beta^2}{\sigma_1 h_0} \frac{\partial v_r}{\partial x}|_{x=0}) \vec{e}_r + \frac{\beta}{\sigma h_0} \frac{\partial v_\phi}{\partial x}|_{x=0} \vec{e}_\phi] d\phi, \\
& G_j^{(y)}(\lambda) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{h_0} \frac{\partial v_\phi}{\partial x}|_{x=0} d\phi.
\end{aligned}
$$

В **третьей** главе выполняется численное моделирование состояния подвижного равновесия при малых умеренных значениях колебательного числа Рейнолдаса σ. Производится преобразование задачи к системе нелинейных алгебраических уравнений, которую возможно решать численно.

В области высоких частот производится асимптотическое интегрирование.

Производится численное интегрирование линейных вспомогательных краевых задач в области низких и средних частот.

Также в данной главе получен явный вид выражений для краевых задач в области сверхвысоких частот.

Для краевой задачи $N_{1j}^{(1)}(\lambda), N_{2j}^{(1)}(\lambda), G_j^{(1)}(\lambda)$ система уравнений КДС принимает следующий вид:

$$
\frac{dv_r}{d\eta}|_{\eta=0} = \frac{1}{\lambda} \frac{dv_{r_0}^{(\text{ß}_0)}}{d\eta}|_{\eta=0} + \cdots = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\beta} (\vec{b}_j \cdot \vec{e}_r) (\frac{1}{f_1} + \frac{1}{\sigma_1})^{-1/2},
$$

$$
\frac{dv_\phi}{d\eta}|_{\eta=0} = \frac{1}{\lambda} \frac{dv_{\phi_0}^{(\text{ß}_0)}}{d\eta}|_{\eta=0} + \cdots = \frac{1}{\lambda} (\vec{b}_j \cdot \vec{e}_r) \sqrt{\sigma},
$$

$$
p|_{\eta=0} = \frac{\beta^2}{f} \sqrt{\lambda} \frac{1}{\lambda} \frac{dv_{r_0}^{(\text{ß}_0)}}{d\eta}|_{\eta=0} + \cdots = -\frac{\beta}{f} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (\vec{b}_j \cdot \vec{e}_r) (\frac{1}{f_1} + \frac{1}{\sigma_1})^{-1/2},
$$

$$(N_{1j}^{(1)}(\lambda), N_{2j}^{(1)}(\lambda))^T = \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{2\pi} [(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{\sigma_1})^{-1/2} (\vec{b}_j \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r + \frac{1}{\sqrt{\sigma}} (\vec{b}_j \cdot \vec{e}_\phi)\vec{e}_\phi] d\phi + \dots,$$

$$\int_0^{2\pi} (\vec{b}_j, \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r d\phi = \int_0^{2\pi} (b_{j_1} \cos\phi + b_{j_2} \sin\phi))(\cos\phi, \sin\phi)^T d\phi = \pi \vec{b}_j,$$

$$\int_0^{2\pi} (\vec{b}_j \cdot \vec{e}_\phi)\vec{e}_\phi d\phi = \int_0^{2\pi} (-b_{j_1} \sin\phi + b_{j_2} \cos\phi))(-\sin\phi, \cos\phi)^T d\phi = \pi \vec{b}_j,$$

$$(N_{1j}^{(1)}(\lambda), N_{2j}^{(1)}(\lambda))^T = \frac{\pi\beta}{\sqrt{\lambda}} [(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{\sigma_1})^{-1/2} + \frac{1}{\sqrt{\sigma}}] + \dots,$$

$$f = \frac{c^2}{\beta^2 \lambda},$$

$$G_{1j}^{(1)}(\lambda) = O(1/\lambda).$$

В **четвертой** главе рассматривается область выше средних частот. Производится упрощение модельных задач и понижение размерности.

В **пятой** главе представлены годографы для нескольких видов цилиндрических подвесов и выполнен анализ устойчивости данных устройств при различных значениях колебательного числа Рейнольдса.

Заключение

При исследовании влияния конечной скорости распространения давления в поддерживающем слое на устойчивость цилиндрического гидродинамического подвеса требуется учитывать как сдвиговую, так и объемную вязкость жидкости.

Результаты моделирования устойчивости цилиндрического гидродинамического подвеса на основе строгого решения уравнений гидродинамики с учетом сжимаемости жидкости в поддерживающем слое подтвердили ряд полученных ранее выводов, имеющих существенное значение для проектирования гидродинамических подвесов и опор. Центральное положение легкого внутреннего тела в цилиндрическом гидродинамическом подвесе асимптотически устойчиво. При смещении легкого внутреннего тела из центрального положения по кривой подвижного равновесия подвес достаточно долго остается асимптотически устойчивым, а границе области устойчивости соответствует значительная величина относительного эксцентриситета. Центральное положение тяжелого внутреннего тела неустойчиво, но при его смещении из этого положения по кривой подвижного равновесия под действием постоянной внешней децентрирующей силы возникает область устойчивости.

Численное моделирование нелинейных краевых задач для установившегося течения жидкости в поддерживающем слое и численное интегрирование линейных краевых задач для расчета передаточных функций поддерживающего слоя в области низких и средних частот целесообразно проводить на основе проекционного метода Галеркина.

Во всех рассмотренных случаях исследование устойчивости подвеса на основе использованного частотного критерия устойчивости КДС требовало вычисления не более чем нескольких десятков точек частотного годографа. Применение методов асимптотического интегрирования к линейным краевым задачам в высокочастотной области позволяет снизить их размерность и тем самым на порядок сократить трудоемкость алгоритмов моделирования устойчивости.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Андрейченко, Д. К. К теории комбинированных динамических систем / Д. К. Андрейченко, К. П. Андрейченко // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2000. — № 3. — С. 54–69.

2. Андрейченко, Д. К. Устойчивость цилиндрического гидродинамического подвеса / Д. К. Андрейченко, К. П. Андрейченко // К теории устойчивости цилиндрического гидродинамического подвеса. — 2009. — № 1. — С. 13–26.

3. Крылов, А. Л. Об устойчивости центрального положения шипа в гидродинамическом подшипнике / А. Л. Крылов, В. Г. Шустер // Докл. АН СССР. — 1966. — Т. 169, № 5. — С. 1030–1033.

4. Бурков, М. С. Вибрация валов в подшипниках скольжения высокооборотных машин. Развитие гидродинамической теории смазки подшипников быстроходных машин. / М. С. Бурков // М.: Изд-во АН СССР. — 1962. — С. 5–128.

5. Уринцев, А. Л. Об устойчивости равномерного вращения ненагруженного шипа в гидродинамическом подшипнике / А. Л. Уринцев // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1974. — № 1. — С. 149–155.

6. Андрейченко, К. П. Устойчивость цилиндрического гидродинамического подвеса / К. П. Андрейченко // Изв. АН СССР. МТТ. — 1975. — № 6. — С. 32–39.

7. Андрейченко, К. П. К теории жидкостного демпфирования в поплавковых приборах / К. П. Андрейченко // Изв АН СССР. МТТ,. — 1977. — № 5. — С. 13–23.

8. Андрейченко, К. П. Влияние гидромеханических сил инерции на устойчивость цилиндрической гидродинамической опоры / К. П. Андрейченко // Машиноведение. — 1983. — № 5. — С. 96–102.

9. Андрейченко, К. П. Динамика поплавковых гироскопов и акселерометров. / К. П. Андрейченко // М.: Машиностроение. — 1987. — С. 125.

10. Портенко, М.С. Условия аналитичности характеристического и возмущающих квазимногочленов комбинированных динамических систем. / М.С. Портенко, Д. В. Мельничук, Д. К. Андрейченко // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2016. — Т. 16, № 2. — С. 208–217.

11. Портенко, М. С. Об условиях аналитичности характеристического и возмущающих квазимногочленов комбинированных динамических систем. / М. С. Портенко, Д. В. Мельничук, Д. К. Андрейченко // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 18-й междунар. Сарат. Зимней школы. – Саратов: ООО Издательство «Научная книга». — 2016. — С. 360.

12. Велиев, В. М. О влиянии сжимаемости на передаточные функции поддерживающего слоя жидкости в высокочастотной области. / В. М. Велиев, К. П. Андрейченко // Доклады Академии военных наук. — 2015. — № 2. — С. 30–36.

13. Андрейченко, К. П. К устойчивости цилиндрического гидродинамического подвеса с учетом сжимаемости поддерживающего слоя. / К. П. Андрейченко, В. М. Велиев // Доклады Академии военных наук. — 2013. — № 2. — С. 25–32.