МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теоретических основ
компьютерной безопасности и криптографии

МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ РАЗРАБОТКИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ, УСТОЙЧИВЫХ К ОТКАЗАМ ЭЛЕМЕНТОВ, БЕЗ ПРОВЕРКИ НА ИЗОМОРФИЗМ

АВТОРЕФЕРАТ
НАУЧНО-КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ

аспиранта 4 курса
направления 09.06.01 – Информатика и вычислительная техника
направленности «Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ»

Камила Ихаба Абдулджаббара Камила

Научный руководитель
д.ф.-м.н., доцент Абросимов Михаил Борисович

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., доцент Абросимов Михаил Борисович

Саратов 2020

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень её проработанности. Одна из первых работ по отказоустойчивости принадлежит Джону фон Нейману, и в ней он рассматривает вопрос построения надёжной системы из ненадёжных элементов. С одной стороны, необходимо повышать надёжность элементов, с другой стороны, хотелось бы иметь возможность сохранить работу системы даже при выходе из строя надёжного элемента. В 1971 году A. Avižienis рассмотрел два подхода для повышения надёжности вычислительных систем: предотвращение ошибок и отказоустойчивость. Первое направление связано с уменьшением вероятности возникновения ошибки. Во втором направлении используется введение в систему избыточных структур для придания ей свойств отказоустойчивости. Понятие *отказоустойчивости* было введено A. Avižienis как обеспечение системы способностью противостоять ошибке и возможностью продолжать работу в присутствии этой ошибки. При *полной отказоустойчивости* система продолжает работать в присутствии ошибок без существенной потери функциональных свойств.

В 1976 году John Hayes предложил модель для исследования полной отказоустойчивости технических систем, основанную на графах. Построение отказоустойчивой реализации системы Σ можно представить себе как введение в неё определенного числа избыточных элементов и связей. При этом предполагается, что в нормальном режиме работы избыточные элементы и связи *маскируются*, а в случае отказа происходит *реконфигурация* системы до исходной структуры.

k-отказоустойчивая реализация Σ^* системы Σ называется *оптимальной*, если система Σ^* отличается от системы Σ на k элементов, и среди всех k-отказоустойчивых реализаций с тем же числом элементов система Σ^* имеет наименьшее число связей. На языке теории графов оптимальную k-отказоустойчивую реализацию системы Σ мы будем называть минимальным вершинным k-расширением (МВ-k-Р) её графа $G(\Sigma)$.

В своей работе J. Hayes предложил схемы построения минимальных вершинных 1-расширений для цепей и циклов, а также для частного случая помеченного дерева. Большое количество теоретических исследований посвящено аналитическому построению минимальных вершинных k-расширений для различных классов графов в работах А.В. Киреевой, М.Ф. Каравая, М.А. Кабанова, М.Б. Абросимова, С.Г. Курносовой, А.А. Долгова, О.В. Моденовой, А.В. Гаврикова, J.P. Hayes, F. Haray, A.A. Farrag и ряде других работ. Было доказано, что задача является вычислительно сложной. Поэтому большой интерес представляет задача разработки алгоритмов для построения всех минимальных вершинных k-расширений для заданного графа с возможностью создания параллельных реализаций. Для генерации сложных комбинаторных структур, в том числе графов, хорошо показывают себя методы без непосредственной проверки на изоморфизм. В основе таких методов лежит каноническая форма структуры или её канонический код. Основная идея состоит в оставлении структуры только в том случае, если её форма является канонической. Отметим некоторые известные работы и генераторы: И.А. Фараджев, С.А. Сухов, R.C. Read, B. McKay, G. Brinkmann, M. Meringer, R. Grund. Алгоритмы генерации без проверки на изоморфизм хорошо подходят для распараллеливания, так как нет необходимости в хранении построенных ранее объектов, чтобы определить, нужно ли оставлять очередного кандидата.

Это определяет актуальность настоящей работы, а также соответствующие цели и задачи.

Цели и задачи. Основная цель данной работы состоит в разработке методов математического моделирования для решения оптимизационной задачи определения минимального числа дополнительных связей системы, устойчивой к заданному числу отказов элементов, а также построения всех неизоморфных минимальных вершинных k-расширений заданного графа системы без проверки на изоморфизм с последующей реализацией в виде программного продукта. Основные задачи работы:

1. Разработать методы математического моделирования для решения оптимизационной задачи определения минимального числа дополнительных связей системы, устойчивой к заданному числу отказов элементов.
2. Разработать алгоритмы определения минимального числа дополнительных связей системы, устойчивой к заданному числу отказов элементов, и построения всех минимальных вершинных k-расширений, а также оценить адекватность математической модели комбинаторной оптимизации.
3. Провести исследование разработанных алгоритмов, оценить возможность их распараллеливания и эффективность.
4. Разработать программный комплекс, реализующий алгоритмы определения минимального числа дополнительных связей системы, устойчивой к заданному числу отказов элементов, и построения всех минимальных вершинных k-расширений.
5. Провести вычислительные эксперименты по построению минимальных вершинных k-расширений графов с заданным числом вершин, а также некоторых интересных с практической точки зрения графов: торов и решёток.

Объектом исследования является граф, представляющий модель вычислительной системы.

Предметом исследования являются модели и алгоритмы, позволяющие строить для заданного графа все неизоморфные минимальные вершинные k-расширения.

Научная новизна работы заключается в следующем:

1. Предложен метод математического моделирования для решения оптимизационной задачи определения минимального числа дополнительных связей системы, устойчивой к заданному числу отказов элементов с использованием метода канонических представителей.
2. Разработаны новые численные методы решения задачи определения минимального числа дополнительных связей системы, устойчивой к заданному числу отказов элементов.
3. Разработаны новые алгоритмы построения всех неизоморфных минимальных вершинных k-расширений заданной графом системы без непосредственной проверки на изоморфизм.
4. Реализованы и исследованы параллельные версии всех разработанных алгоритмов для построения минимальных вершинных k-расширений заданного графа.
5. Создан программный комплекс, реализующий разработанные алгоритмы, позволяющий определять минимальное число дополнительных связей системы, устойчивой к заданному числу отказов элементов, и строить все неизоморфные минимальные вершинные k-расширения для заданного графа системы.
6. Построены минимальные вершинные 1-расширения всех неориентированных графов с числом вершин до 9 и минимальные вершинные 2-расширения всех неориентированных графов с числом вершин до 8.

7. Построены минимальные вершинные 1-расширения для решёток и торов с числом вершин до 12.

Методология и методы исследования. В работе используются методы математического моделирования и вычислительного эксперимента, комбинаторной оптимизации, теории графов, теории алгоритмов, специальные подходы к разработке алгоритмов генерации комбинаторных структур без проверки на изоморфизм.

Положения и результаты, выносимые на защиту.

1. Предложен метод математического моделирования для решения оптимизационной задачи определения минимального числа дополнительных связей системы, устойчивой к заданному числу отказов элементов с использованием метода канонических представителей.
2. Разработаны численные методы решения задачи определения минимального числа дополнительных связей системы, устойчивой к заданному числу отказов элементов.
3. Разработаны вычислительные алгоритмы построения всех неизоморфных минимальных вершинных *k*-расширений заданной графом системы без непосредственной проверки на изоморфизм.
4. Реализован комплекс программ, реализующий разработанные алгоритмы, позволяющий определять минимальное число дополнительных связей системы, устойчивой к заданному числу отказов элементов, и строить все неизоморфные минимальные вершинные *k*-расширения для заданного графа системы.

Теоретическая и практическая значимость работы. Разработаны 4 алгоритма для построения всех неизоморфных минимальных вершинных *k*-расширений заданного графа. Алгоритмы хорошо подходят для их параллельной реализации. Создан программной комплекс для построения всех неизоморфных минимальных вершинных *k*-расширений заданного графа на основе разработанных алгоритмов. Программный комплекс показывает лучшую эффективность, чем известные аналоги. Реализованный программный комплекс может быть использован на этапе анализа и разработки вычислительных архитектур или иных систем, для которых необходимо предусмотреть отказоустойчивость. С помощью разработанного программного комплекса были построены все минимальные вершинные 1-расширения для графов с числом вершин до 9 и выложены в открытый доступ в онлайн-энциклопедии «Мир графов». Теоретическая значимость работы подтверждается прилагаемым актом внедрения её результатов в учебный процесс Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского. Практическая значимость работы подтверждается прилагаемым актом использования её результатов и свидетельством о государственной регистрации программного комплекса.

Личный вклад автора. Все основные результаты, выносимые на защиту, получены автором лично. Автор участвовал в определении цели работы и постановке задач. Автор самостоятельно разрабатывал все программные части совместного программного комплекса, которые относятся к задаче построения вершинных расширений. Все основные алгоритмы из работы были реализованы как отдельное приложение, а также как часть программного комплекса FTConstructor, который позволяет для заданного графа строить как вершинные, так и рёберные расширения. Вклад автора в FTConstructor – все программные модули для построения вершинных расширений. В остальных совместных работах автору также принадлежит ведущая роль в тех вопросах, которые связаны с темой данной диссертации, а именно, с вершинными расширениями графов. Результаты данной работы докладывались автором на различных конференциях и семинарах.

Степень достоверности и апробация результатов исследования. Полученные результаты согласуются с результатами вычислительных экспериментов, проведённых ранее, а также с известными аналитическими результатами. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях:

- научный семинар кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского (Саратов, 2017, 2018, 2019, 2020);
- Международная научная конференция «International Conference on Computing, Communication, Control and Automation» (ICCUBEA-2017) (Пуна, Республика Индия, 2017);
- VIII Международная научная конференция «Компьютерные науки и информационные технологии» памяти А.М. Богомолова (Саратов, 2018);
- Всероссийская конференция «XVIII Сибирская научная школа-семинар с международным участием «Компьютерная безопасность и криптография» – SIBECRYPT'19» (Томск, 2019);
- XV, XVI, XVII, XVIII Белорусско-российская научно-техническая конференция «Технические средства защиты информации» (Минск, Республика Беларусь, 2017, 2018, 2019, 2020);
- XXVII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (Москва, 2020).

Публикации. Результаты работы опубликованы в 17 изданиях, 4 из которых являются изданиями, рекомендованными ВАК Минобрнауки РФ, 3 индексируются в базе WoS и SCOPUS, 1 – свидетельство о регистрации программы для ЭВМ.

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка использованной литературы и приложений. Работа содержит 119 страниц, 21 рисунок, 28 таблиц, библиографический список из 108 наименований и 3 приложения.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность диссертационной работы, аргументирована научная новизна исследований, определены цели и задачи, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе рассматривается отказоустойчивость как средство обеспечения надежности вычислительных систем. Для анализа вычислительных систем часто используются модели с использованием теории графов. Вводится математическая модель отказоустойчивости, основанная на графах, описываются различные модели отказов элементов и описываются их модели на языке теории графов. Приводится базовый алгоритм построения минимальных вершинных k-расширений.

На рисунке 1 показана схема соединения ядер в вычислительной системе с топологией гиперкуб. Подобная схема была реализована в компьютерах *nCUBE* и *Parsytec GigaCube,* а также суперкомпьютерах, построенных по технологии *IBM Blue Gene*. К каждому вычислительному узлу (кластеру) из 16 рабочих процессоров с метками от 0 до 15 добавляется один избыточный процессор с меткой *S*, который соединяется с каждым рабочим процессором. В случае отказа одного рабочего процессора он заменяется избыточным процессором, и система перестраивает таблицу связей процессоров, так чтобы исключить работу отказавшего процессора. Вычислительной системе естественным образом сопоставляется граф. Элементы системы (процессоры или ядра) – вершины графа, связи между элементами – рёбра графа. Под *отказом* элемента системы понимается удаление соответствующей ему вершины из графа этой системы и всех связанных с ней рёбер.

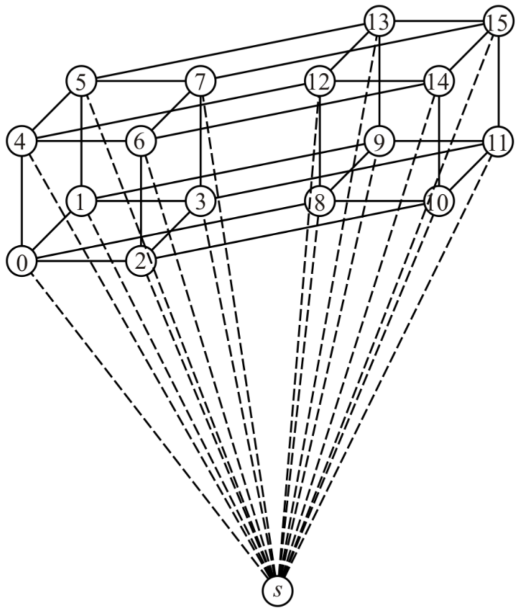


Рисунок 1 – Схема отказоустойчивого вычислительного узла, построенного по топологии гиперкуба, с одним избыточным элементом

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *вершинным k-расширением* (k – натуральное) графа $G = (V, \alpha)$, если граф G вкладывается в каждый граф, получающийся из графа G^*, удалением любых его k вершин. *Рёберной стоимостью* (*edge cost*) вершинного k-расширения G^* графа G называется величина $ec_G(G^*)$ равная разности между количеством рёбер в G^* и G.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным k-расширением* (МВ-k-Р) n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является вершинным k-расширением графа G;
2) граф G^* содержит $n + k$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + k$;
3) рёберная стоимость $ec_G(G^*)$ является минимальной, то есть α^* имеет минимальную мощность среди всех графов, удовлетворяющих условиям 1) и 2).

Инвариантом графа G называется набор его характеристик, одинаковых для всех изоморфных ему графов. *Полным инвариантом* называется такой инвариант, который определяет граф однозначно с точностью до изоморфизма. Одним из известных числовых инвариантов является максимальный матричный код графа, который получается выписыванием элементов матрицы смежности по строкам или столбцам. Для неориентированных графов достаточно брать элементы выше или ниже главной диагонали. Само по себе это число не является инвариантом, так как матрицы смежности у изоморфных графов могут различаться, однако если среди всех изоморфных графов выбрать матрицу смежности с максимальным или минимальным значением кода, то получится инвариант, причем полный.

Вложением графа $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ в граф $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называется такое инъективное отображение $f: V_1 \to V_2$, что для любых вершин $u, v \in V_1$ выполняется следующее условие:

$$(u, v) \in \alpha_1 \Rightarrow (f(u), f(v)) \in \alpha_2.$$

Если граф G_1 вкладывается в граф G_2, то это означает, что в графе G_2 можно выделить часть, изоморфную графу G_1. Задача проверки вложения графа является NP-полной. Говорят, что граф G_1 является *частью* графа G_2, а граф G_2 является *суперграфом* (иногда *надграфом*) графа G_1.

Задача построения суперграфа для заданного графа с определёнными свойствами представляет большой интерес. В общем виде такую задачу можно представить так: как добавить минимальное число рёбер, чтобы получить граф с нужными свойствами. Если через K обозначен некоторый класс графов, то суперграф заданного графа G называется его K-расширением, если граф G относится к классу K. Задачу о минимальных K-расширениях заданного графа G можно представить так: как добавить к графу G наименьшее возможное число рёбер, чтобы получился K-граф? В данной работе мы тоже будет рассматривать расширения особого вида, которые впервые были введены J. Hayes в работе 1976 года.

Задачу определения минимальной стоимости системы ec_G, устойчивой к заданному числу отказов элементов, можно рассматривать как оптимизационную задачу по поиску минимального числа рёбер у суперграфов с заданным числом вершин. Основная сложность состоит в большом пространстве поиска, поэтому необходимо применять комбинаторную оптимизацию для сокращения множества допустимых решений.

Задачу построения всех неизоморфных минимальных вершинных k-расширений можно рассматривать как задачу поиска всех неизоморфных суперграфов с минимальным числом дополнительных вершин и рёбер, которые являются вершинными k-расширениями. В работе М.Б. Абросимова описан алгоритм для построения минимальных вершинных k-расширений.

Алгоритм 1. Базовый алгоритм. Построение всех МВ- k-Р графа

1. $m \coloneqq 1$.
2. Строим все графы, получающиеся из графа G добавлением k вершин и m дополнительных рёбер.
3. Выбираем среди построенных графов вершинные k-расширения графа G.
4. Если на шаге 3 не было найдено графов, то $m \coloneqq m + 1$ и переходим на шаг 2.
5. Среди графов, выбранных на шаге 4, оставляем по одному представителю от классов изоморфных графов. Оставшиеся графы являются минимальными вершинными k-расширениями графа G, а m – рёберная стоимость.

На практике шаги 2 и 3 обычно объединяются, чтобы исключить заведомо неподходящих кандидатов. На основе базового алгоритма было создано несколько программ для построения минимальных вершинных k-расширений: для произвольных неориентированных графов, для неориентированных графов с оптимизациями для деревьев, для ориентированных графов, для цветных графов. В частности, М.Б. Абросимовым были построены все минимальные вершинные 1-расширения для неориентированных графов с числом вершин до 7. Предпринималась попытка и разработки параллельной версии этого алгоритма М.Б. Абросимовым и Д.А. Зайцевым. В данной работе с помощью новых алгоритмов, в том числе и параллельных, удалось улучшить этот результат, построив все МВ-1-Р для неориентированных графов с числом вершин до 9, а также для решёток и торов с числом вершин до 12.

Основной путь для оптимизации алгоритма 1: на шаге 2 нужно оставлять как можно меньше кандидатов для последующей проверки на расширение на шаге 3. Далее в диссертации будет рассмотрено решение этой задачи.

Во второй главе исследуются подзадачи базового алгоритма, намечаются пути их оптимизации. Одной из наиболее важных задач является уменьшение пространства поиска кандидатов на роль МВ-k-Р. Описывается метод канонических представителей и описываются сложности его реализации с использованием обычного матричного кода. Вводится матричный код специального вида – М-код. Доказывается возможность его использования для реализации метода канонических представителей.

В алгоритме 1 непосредственно выделяются три задачи, все они являются вычислительно сложными:

1. Построение всех суперграфов, получающихся из графа G добавлением k вершин и m рёбер.
2. Проверка на расширение.
3. Выявление изоморфных копий и их удаление из списка.

Для того чтобы уменьшить количество проверок на расширение, можно использовать некоторые аналитические результаты. Так оказалось полезной оптимизация на основе следующего свойства:

Если граф G^* является вершинным k-расширением графа G, и в графе G^* на m рёбер больше, чем в графе G, то для каждого набора $\{v_1, \dots, v_k\}$ из k вершин графа G^* выполняется следующее неравенство:

$$d(v_1) + \cdots + d(v_k) - r \leq m,$$

где r – количество рёбер в подграфе графа G^*, состоящем из вершин $\{v_1, \dots, v_k\}$.

Для решения задачи исключения изоморфизма можно воспользоваться специальными методами исключения изоморфных копий, в основе которых лежит метод канонических представителей. Он заключается в следующих шагах:

1. Определяется способ кодирования объектов.
2. Среди всех кодов изоморфных объектов выбирается канонический код.
3. Порождаются все возможные уникальные структуры вместе с их кодами, содержащие всех необходимых каноничных представителей.
4. Порожденная структура принимается, если её код канонический, в противном случае – исключается.

Для метода канонического представителя существует улучшение, которое обычно называют методом Рида-Фараджева. Основная идея состоит в исключении структур, которые заведомо не могут быть каноническими, как можно раньше. В работе даётся обоснование, что максимальные матричные коды можно использовать в рассматриваемой задаче, однако обычный максимальный матричный код не подходит для использования в алгоритме 1, так как среди графов, полученных добавлением рёбер к исходному графу, может не быть канонических представителей некоторых классов изоморфизма, несмотря на то, что представители данного класса таким способом могут быть получены.

Рассмотрим М-код, подходящий для решения задачи построения графов с заданной частью. Этот код оказался полезен и для поиска рёберных расширений, и для построения произвольных суперграфов.

Даны два графа с одинаковым количеством вершин: G и H. Тогда М-код графа H относительно графа G получается выписыванием элементов матрицы M_H выше главной диагонали по столбцам. Выписывание происходит в два этапа: сначала выписываются те элементы M_H^{ij}, где $M_G^{ij} = 1$, после те, для которых $M_G^{ij} = 0$. Будем называть этот код маршрутным или М-кодом и обозначать $C_G(H)$. Граф G в данном случае будет определять порядок выписывания или маршрут. Максимальный из всех кодов изоморфных графов и соответствующий ему граф будем называть каноническим относительно G либо просто каноническим.

В работе устанавливаются два свойства, который подтверждают возможность использования М-кодов. Во-первых, оказывается, что если граф G является частью графа H, то для канонических М-кодов будет выполняться неравенство $C_G(H) \geq C_G(G)$, иначе $C_G(H) < C_G(G)$.

Во-вторых, если граф G вкладывается в граф H, то существует изоморфный H граф W, частью которого граф G является.

Эти свойства показывают, что, добавляя рёбра к графу G, можно построить всех возможных канонических представителей классов изоморфизма графов, в которые вкладывается заданный граф G. Поэтому данный тип кодирования подходит для алгоритма 1.

В третьей главе предлагаются алгоритмы для построения минимальных рёберных k-расширений на основе метода канонических представителей в форме Рида-Фараджева с использованием М-кода.

Применить М-код для изменения алгоритма 1 можно двумя способами:

1. Оставить алгоритм без изменений и использовать проверку на каноничность для того, чтобы исключать изоморфные копии расширений.
2. Исключать изоморфные копии графов перед проверкой на расширение.

Так как обе задачи – проверка на каноничность и проверка на расширение – являются вычислительно сложными, то можно ожидать, что оба описанных способа могут по-разному проявлять себя для разных исходных графов. Таким образом, метод Рида-Фараджева можно применить к двум подзадачам:

1. Уменьшение количества перебираемых графов, не являющихся расширениями.
2. Уменьшение количества перебираемых неканонических графов.

Оба эти направления подробно рассматриваются в работе, в результате чего предлагаются 4 алгоритма для построения МВ-k-Р:

БиПСО	базовый алгоритм с перебором сочетаний с ограничениями;
ПОККВРсПСО	алгоритм с первичным отбором кандидатов на канонические вершинные расширения и перебором сочетаний с ограничениями;
ПОКПсПСО	алгоритм с первичным отбором канонических представителей и перебором сочетаний с ограничениями;
ОДКП	алгоритм обхода дерева канонических представителей.

На языке C++ с использованием библиотеки MPI были реализованы все 4 алгоритма. Программа имеет консольный интерфейс и обрабатывает графы, которые поступают в стандартный поток ввода, выдавая результат в стандартный поток вывода. Дополнительная информация о времени работы программы и затратах на те или иные основные операции в итоге записывается в поток вывода ошибок. Графы могут подаваться в нескольких форматах: формат graph6, матрица смежности и список смежности.

Каждый из алгоритмов может работать в параллельном режиме на нескольких процессорах. Также имеется возможность производить вычисления не последовательно, обсчитывая один граф в параллельном режиме, а распределять входные графы по процессам.

Это даёт возможность сократить издержки на обмен данных, и в случае, если нужно обработать большое по сравнению с количеством задействованных процессоров количество графов, то достаточно использовать данный подход. Последний режим активируется при добавлении специального ключа.

Все вычисления были проведены на мощностях Поволжского Регионального Центра Новых Информационных Технологий Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского. В вычислениях было задействовано 40 ядер, если это не оговорено отдельно.

Во время проведения вычислительных экспериментов было замечено, что форма графа влияет на эффективность алгоритмов построения МВ-*k*-Р. Экспериментальным путём была найдена форма графа, для которой в среднем алгоритмы работают быстрее всего. Такая форма была названа верхней.

Были проведены вычислительные эксперименты с разработанными алгоритмами для того, чтобы проверить, насколько улучшения влияют на скорость выполнения алгоритмов, а также количество решений подзадач исключения изоморфизма и проверки на расширение.

В четвертой главе рассматриваются вычислительные эксперименты по построению минимальных вершинных расширений определённых графов и соответствующие результаты, которые представляют интерес. Были посчитаны все МВ-1-Р графов с количеством вершин до 9. Ранее М.Б. Абросимовым были найдены все МВ-1-Р графов с количеством вершин до 7. Полученные в данной работе результаты согласуются с известными данными.

В таблице 1 представлены результаты вычислений различными алгоритмами. Из таблицы видно, что быстрее всего с задачей справился алгоритм ПОККВРсПСО. Алгоритм ОДКП оказался в данном случае самым неэффективным из реализованных. Следующий эксперимент проводился для циклов. Лучшие результаты были получены алгоритмом ПОКПсПСО: с его помощью удалось построить МВ-1-Р для циклов с числом вершин до 21. Алгоритм ПОККВРсПСО показал второй результат, худшим снова оказался алгоритм ОДКП. Полученные результаты согласуются с данными, полученными ранее М.Б. Абросимовым, С.А. Суховым и Г. Бринкманом.

Таблица 1 – Вычисления МВ-1-Р графов с заданным количеством вершин

Кол-во вершин	Кол-во графов	**БиПСО**	**ПОККВРсПСО**	**ПОКПсПСО**	**ОДКП**
6	156	23 мс	25 мс	26 мс	23 мс
7	1044	1 с 64 мс	1 с 188 мс	981 мс	1 с 755 мс
8	12346	4 м 17 с	3 м 59 с	5 м 14 с	8 м 53 с
9	274668	44 ч 20 м	42 ч 49 м	81 ч 4 м	146 ч 44 м

Также были проведены вычисления с подсчётом МВ-2-Р графов. Результаты показаны в таблице 2. Наиболее эффективным алгоритмом оказался алгоритм ОДКП. Причём его преимущество значительно. Лидер первого эксперимента – алгоритм ПОККВРсПСО, – показал наихудший результат.

Таблица 2 – Результаты подсчёта МВ-2-Р графов с заданным количеством вершин

Кол-во вершин	Количество графов	**БиПСО**	**ПОККВРсПСО**	**ПОКПсПСО**	**ОДКП**
5	34	157 мс	173 мс	70 мс	< 1 мс
6	156	17 с 85 мс	22 с 332 мс	8 с 295 мс	1 с 406 мс
7	1044	44 м 1 с	48 м 19 с	15 м 13 с	1 м 43 с

Были построены МВ-2-Р всех 8-вершинных графов алгоритмом ОДКП, так как он показал наибольшую эффективность. На вычисления было затрачено 35 часов. Среднее время построения МВ-2-Р одного 8-вершинного графа равно 6 м 46 с. Все полученные результаты по количеству расширений и количеству дополнительных рёбер у графов были занесены в базу данных Интернет-ресурса «Мир графов».

Были проведены исследования построенных в ходе экспериментов графов. В таблице 3 показано распределение по количеству дополнительных рёбер $ec(G)$ в МВ-1-Р графов с количеством вершин от 4 до 9. Аналогичные данные получены и для МВ-2-Р графов с количеством вершин от 4 до 8.

Таблица 3 – Статистика по количеству дополнительных рёбер в МВ-1-Р графов

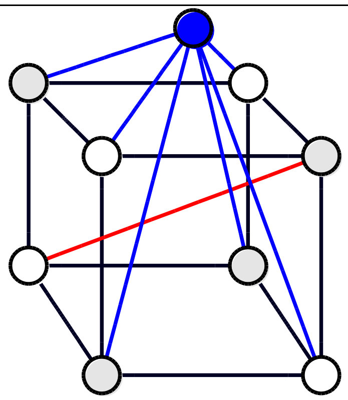
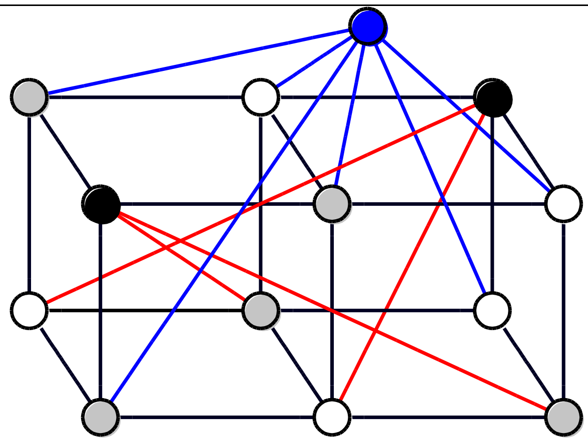
$ec(G)$	Количество вершин в графе					
	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	2	3	3	4
2	2	4	5	9	12	16
3	2	6	8	18	26	42
4	5	11	23	63	96	194
5		10	52	168	353	904
6			65	377	1287	3784
7				405	3686	16010
8					6882	59723
9						193990

Некоторые графы представляют большой интерес с точки зрения прикладных задач. Если для циклов ранее было получено много аналитических и экспериментальных результатов, то для решёток и торов результатов намного меньше. Напомним, что n-мерной *решёткой* называется граф, являющийся декартовым произведением *n* цепей $Pm_1 \times \ldots \times Pm_n$, а *n*-мерным *тором* называется граф, являющийся декартовым произведением *n* циклов $Cm_1 \times \ldots \times Cm_n$. Были найдены МВ-1-Р всех решёток с количеством вершин до 12. В таблице 4 показаны МВ-1-Р трёхмерных решёток с числом вершин, не превосходящим 12. На рисунках синим цветом обозначены дополнительные вершины и рёбра, инцидентные ей, красным – дополнительные рёбра, соединяющие исходные вершины графа. Чёрные рёбра и чёрно-белые вершины принадлежат исходному графу. Под рисунками написаны вектора степеней расширения. Например, запись $(6, 4^8)$ означает, что в графе 1 вершина степени 6 и 8 вершин степени 4.

Были построены МВ-1-Р торов с числом вершин до 12. Для всех обработанных торов тривиальное 1-расширение является минимальным. Стоит отметить, что у тора 3×3 существует еще одно МВ-1-Р, неизоморфное тривиальному.

В начале работы мы отмечали, что в июне 2020 года самым мощным общественно известным вычислительным устройством мира стал японский суперкомпьютер *Фугаку*, в котором установлено 158 976 процессоров Fujitsu A64FX с общим числом 7 299 072 ядер. В основе соединения ядер лежит схема *Tofu* (*torus fusion* – интегрированный тор), которая ранее использовалась и в суперкомпьютере *K computer*. Основным структурным элементом *Tofu* является тор, который разработчики обозначают $2 \times 2 \times 3$, подчёркивая его трёхмерность. С точки зрения графов он изоморфен тору 3×4, и его МВ-1-Р также было вычислено – МВ-1-Р является тривиальное 1-расширение. Время, затраченное на построение, составило ≈1 час на 16 вычислительных ядрах кластера ПРЦ НИТ Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского.

Таблица 4 – МВ-1-Р трёхмерных решёток с количеством вершин до 12

 $(6,4^8)$	 $(6,5^6,4^6)$

В заключении приведены основные результаты диссертационной работы и сделаны выводы.

Основные результаты работы:

1. Разработаны методы математического моделирования для решения оптимизационной задачи определения минимального числа дополнительных связей системы, устойчивой к заданному числу отказов элементов.
2. Разработаны 4 алгоритма определения минимального числа дополнительных связей системы, устойчивой к заданному числу отказов элементов, и построения всех минимальных вершинных *k*-расширений, а также установлена адекватность математической модели комбинаторной оптимизации.
3. Проведены исследования разработанных алгоритмов, реализованы их параллельные версии, оценена их эффективность для различных видов графов. Алгоритмы себя могут по-разному вести в зависимости от видов графов и от формы, в которой графы подаются на вход.
4. Разработан программный комплекс, реализующий алгоритмы определения минимального числа дополнительных связей системы, устойчивой к заданному числу отказов элементов, и построения всех минимальных вершинных *k*-расширений.
5. Проведены вычислительные эксперименты по построению минимальных вершинных *k*-расширений графов с заданным числом вершин, а также некоторых интересных с практической точки зрения графов: торов и решёток. Построены минимальные вершинные 1-расширения всех неориентированных графов с числом

вершин до 9 и минимальные вершинные 2-расширения всех неориентированных графов с числом вершин до 8, а также найдены минимальные вершинные 1-расширения для всех решёток и торов с числом вершин до 12.

Основные публикации по теме работы

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ

1. Абросимов М.Б., Камил И.А.К. Разработка системы предотвращения вторжений с использованием параллельного программирования и системы отказоустойчивости // Безопасность информационных технологий. 2018, Т. 25, № 1. – С. 65-73.
2. Камил И.А.К. Обеспечение отказоустойчивости высокопроизводительного узла параллельных вычислений с интерфейсом передачи сообщений (MPI) // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики: Серия «Естественные и Технические науки». – 2018. – № 4. – С. 57–59.
3. Камил И.А.К., Абросимов М.Б., Лобов А.А. Построение минимальных вершинных расширений графа методом Рида-Фараджева // International Journal of Open Information Technologies, 2020, vol. 8, no.4, pp. 54–58.
4. Камил И.А.К. Вычислительный эксперимент по построению отказоустойчивых реализаций графов с числом вершин до 9 // International Journal of Open Information Technologies. – 2020. – Vol. 8, no.9. – P. 43–47.

Публикации в изданиях, индексируемых SCOPUS и Web of Science

5. Абросимов М.Б., Камил И.А.К., Лобов А.А. Построение всех неизоморфных минимальных вершинных расширений графа методом канонических представителей// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. – Т. 19, вып. 4. – С. 479–485.
6. Камил И.А.К., Судани Х.Х.К., Лобов А.А., Абросимов М.Б. Построение всех неизоморфных суперграфов без проверки на изоморфизм // Прикладная дискретная математика. – 2020. – № 48. – С.82–92.
7. Abrosimov M., Kamil I.A., Mahajan H. Increasing SCADA System Availability by Fault Tolerance Techniques // 2017 International Conference on Computing, Communication, Control and Automation (ICCUBEA), PUNE, India, 2017. – P. 461-466.

Объекты интеллектуальной собственности

8. Абросимов М.Б., Камил И.А.К., Судани Х.Х.К., Лобов А.А. Построение оптимальных отказоустойчивых реализаций графов FTConstructor // Свид. о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2020614773. Зарегистрирована в Реестре программ для ЭВМ 24.04.2020.

Публикации в других изданиях

9. Камил И.А.К., Абросимов М.Б. Разработка системы предотвращения вторжений с использованием параллельного программирования и технологий отказоустойчивости // Технические средства защиты информации: Тезисы докладов XVI Белорусско-российской научно-технической конференции, 5 июня 2018 г., Минск. Минск: БГУИР, 2018. – С. 44.
10. Камил И.А.К., Судани Х.Х.К., Абросимов М.Б. К вопросу о параллельных алгоритмах построения минимальных вершинных и рёберных 1-расширений графов //

Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы Междунар. науч. конф. – Саратов : Издат. центр «Наука», 2018. – С. 173–176.

11. Камил И.А.К., Абросимов М.Б. Безопасность системы и система отказоустойчивости // Технические средства защиты информации: Тезисы докладов XVII Белорусско-российской научно-технической конференции, 11 июня 2019 г., Минск. Минск: БГУИР, 2019. – С. 68.
12. Камил И.А.К., Судани Х.Х.К., Лобов А.А., Абросимов М.Б. Построение минимальных расширений графа методом канонических представителей // Прикладная дискретная математика. Приложение. – 2019. – № 12. – С. 179–182.
13. Камил И.А.К. О разработке параллельного алгоритма построения оптимальных вершинно-отказоустойчивых расширений графов без проверки на изоморфизм // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2020» [Электронный ресурс] / Отв.ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. – Электрон. текстовые дан. (1500 Мб.) – М.: МАКС Пресс, 2020. – Режим доступа: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2020/index.htm, свободный – Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2020».
14. Kamil I.A.K., Nasonova N. Information security for SCADA systems // Технические средства защиты информации: Тезисы докладов XIII Белорусско-российской научно-технической конференции, 4-5 июня 2015 г., Минск. Минск: БГУИР, 2015. – С. 22.
15. Kamil I.A.K., Nasonova N. SCADA systems security// Технические средства защиты информации: Тезисы докладов XVI Белорусско-российской научно-технической конференции, 25-26 мая 2016 г., Минск. Минск: БГУИР, 2016. – С. 20.
16. Kamil I.A.K., Abrosimov M.B. Design and development complex safety SCADA systems // Технические средства защиты информации: Тезисы докладов XV Белорусско-российской научно-технической конференции, 6 июня 2017 г., Минск. Минск: БГУИР, 2017. – С. 77.
17. Kamil I.A.K., Abrosimov M.B. Development reliability node fault-tolerant computing systems by parallel technics // Технические средства защиты информации: Тезисы докладов XVIII Белорусско-российской научно-технической конференции, 9 июня 2020 г., Минск. Минск: БГУИР, 2020. – С. 9–10.