МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

# Достаточные условия гамильтоновости графа и инварианты графа, характеризующие его связность

АВТОРЕФЕРАТ

дипломной работы


студента 6 курса 631 группы

специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Баталина Владимира Владимировича


Научный руководитель

д. ф.-м. н., доцент ____________ М. Б. Абросимов

23.01.2020 г.

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., доцент ____________ М. Б. Абросимов

23.01.2020 г.

Саратов 2020

# ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена свойству гамильтоновости графов. На сегодняшний день графы активно используются в различных сферах деятельности, в том числе и в криптографии. В пример можно привести доказательство с нулевым разглашением для гамильтонового цикла.

Хотя первым статьям и исследованиям о графах уже больше двухсот лет, некоторые задачи до сих пор являются сложновычислимыми – для них не существует решения, которое работало бы за полиномиальное время. Одной из таких задач является задача нахождения гамильтонового цикла в графе.

В теоретической части данной работы рассматриваются такие понятия как гамильтоновость, связность, локальная связность, жёсткость, планарность, а также описываются достаточные условия, с помощью которых можно определить, является ли граф гамильтоновым.

В практической части описывается разработанная программа, которая анализирует различные достаточные условия гамильтоновости графов и сравнивает их между собой. Для сравнения эффективности условий будем использовать достаточные условия, связанные с жёсткостью, связностью и локальной связностью, а также возьмём несколько наиболее известных условий в качестве эталонных.

Цель работы заключается в изучении свойств гамильтоновости и связности графа, рассмотрении различных инвариантов графа, связанных с этими свойствами, разработке программы на Visual Studio C# для проверки графов на гамильтоновость, анализе достаточных условий, основанных на выбранных инвариантах и получении каталога гамильтоновых графов для каждого из рассмотренных достаточных условий.

Дипломная работа состоит из введения, 2 разделов, заключения, списка использованных источников и 3 приложений. Общий объем работы – 73 страницы, из них 32 страницы – основное содержание, включая 19 рисунков и 5 таблиц, список использованных источников из 21 наименования.

# КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

## 1 Теоретическая часть

### 1.1 Гамильтоновость

Гамильтонов граф – это граф, который содержит гамильтонов цикл.

Гамильтонов цикл – цикл, который проходит через каждую вершину графа ровно по одному разу. С гамильтоновым графом тесно связано понятие гамильтоновой цепи. Гамильтонова цепь отличается от цикла тем, что у цепи начальные и конечные точки могут не совпадать, в отличие от цикла. Гамильтонов цикл является гамильтоновой цепью.

Задача проверки существования в графе гамильтонова цикла является NP-полной и для её решения неизвестно эффективных алгоритмов.

### 1.2 Инварианты графов

Инвариантом графа $G$ называется набор его характеристик, одинаковых для всех изоморфных ему графов.

Для достаточных условий, которые будут рассмотрены ниже, используется большое количество различных инвариантов, в том числе и несколько нетривиальных. Рассмотрим их поподробнее.

#### 1.2.1 Жёсткость

Граф $G$ называется $t$-жёстким при некотором вещественном $t$, если для любого целого $k > 1$ нельзя разбить граф $G$ на $k$ различных компонент связности путём удаления менее чем $tk$ вершин. Например, граф 1-жёсток, если число компонент, образующихся при удалении вершин, всегда не превосходит числа удалённых вершин. Жёсткость графа – это максимальное $t$, для которого он $t$-жёсток. Жёсткость является конечным числом для всех конечных графов, за исключением полных графов, которые, по соглашению, имеют бесконечную жёсткость [5].

### 1.2.2 Планарность

В данной работе планарность графов определяется с помощью теоремы Понтрягина-Куратовского.

**Теорема 1.2.1 (Понтрягина-Куратовского, 1930 [6]).** Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит частей, гомеоморфных $K_5$ или $K_{3,3}$.

### 1.2.3 Связность графов

Граф называется связным, если в нём только одна компонента связности, то есть между парой любых вершин графа существует соединяющий их путь [8].

### 1.2.4 Локальная связность графов

Граф $G$ называется локально связным, если каждая его вершина локально связна.

## 1.3 Достаточные условия гамильтоновости связных графов

**Теорема 1.3.1 (Достаточное условие Оберли-Самнера, 1979 [10]).** Связный, локально связный граф без клешней с числом вершин $n \geq 3$ гамильтонов.

**Теорема 1.3.2 (Достаточное условие Кикуста, 1975 [12]).** Каждый связный, локально связный 5-регулярный граф является гамильтоновым.

**Теорема 1.3.3 (Достаточное условие Чартранда-Пипперта, 1974 [10]).** Пусть $G$ – связный, локально связный граф с максимальной степенью $\Delta(G) \leq 4$. Тогда $G$ – либо гамильтонов граф, либо $G \cong K_{1,1,3}$.

**Теорема 1.3.4 (Достаточное условие Тутте, 1956 [13]).** Каждый 4-связный планарный граф имеет гамильтонов цикл.

## 1.4 Достаточные условия гамильтоновости жёстких графов

**Теорема 1.4.1 (Достаточное условие Бауэра, 1990 [10]).** Пусть $G$ – 2-жёсткий граф с числом вершин $n$. Если $\sigma_3(G) \geq n$, где

$\sigma_k(G) = \min\left(\sum_{i=1}^{k} \mathrm{d}(v_i)\right), \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ – независимые множества в $G$, $k \geq 2$, то граф $G$ – гамильтонов.

**Теорема 1.4.2 (Достаточное условие Бауэра-Броерсмы-Вельдмана, 1995 [14]).** Пусть $G$ – 1-жёсткий граф с числом вершин $n$. Если $\sigma_3(G) \geq n$ и для всех $x, y \in V(G)$, расстояние между которыми $dist(x, y) = 2$, выполняется $\max\{\mathrm{d}(x), \mathrm{d}(y)\} \geq \frac{(n-4)}{2}$, тогда $G$ – гамильтонов.

**Теорема 1.4.3 (Достаточное условие Юнга-Виттманна, 1999 [14]).** Если $G$ – двусвязный $t$-жёсткий граф с минимальной степенью $\delta$, то $c(G) \geq \min\{(t+1)\delta + t, n\}$.

## 1.5 Эталонные достаточные условия

В этом разделе приведём наиболее известные достаточные условия гамильтоновости [1, 2, 3, 10, 15, 16, 19], которые были выбраны в качестве эталонных.

**Теорема 1.5.1 (Достаточное условие Бонди-Хватала, 1976 [15]).** Граф является гамильтоновым, если его замыкание является полным графом.

**Теорема 1.5.2 (Достаточное условие Дирака, 1952 [16]).** Если в связном $n$-вершинном графе $(n \geq 3)$ степень вершины $d(v) \geq \frac{n}{2}$ для всех $v$, то этот граф гамильтонов.

**Теорема 1.5.3 (Достаточное условие Оре, 1960 [16]).** Если в связном $n$-вершинном графе $(n \geq 3)$ для любых двух несмежных вершин $u$ и $v$ выполняется неравенство $d(u) + d(v) \geq n$, то этот граф гамильтонов.

**Теорема 1.5.4 (Достаточное условие Хватала, 1972 [1]).** Пусть $G$ – граф с вектором степеней $(d_1, \dots, d_n)$ и $n \geq 3$. Если для любого $k$ верна импликация $\left(d_k \leq k < \frac{n}{2}\right) \rightarrow (d_{n-k} \geq n - k)$, то граф $G$ гамильтонов.

# 2 Практическая часть

## 2.1 Описание задачи

Практическая часть данной работы состоит из двух пунктов:

1) с помощью утилиты Nauty были сгенерированы графы с заданными параметрами для их дальнейшего изучения, а именно для применения достаточных условий гамильтоновости графов;

2) для сгенерированных связных графов с заданным количеством вершин (до 11) была написана программа проверки условий гамильтоновости на Visual Studio C#.

## 2.2 Генерация графов с заданными параметрами

Nauty – это утилита для Linux, а так как работа будет вестись на Microsoft Windows, нам понадобится дополнительная программа под названием Cygwin. Nauty содержит в себе различные процедуры и функции для определения автоморфизмов в графах и для проверки графов на изоморфизм. В рамках данной работы будет использоваться функция генерации двусвязных графов с заданным количеством вершин в формате g6 [17].

## 2.3 Проверка графов на гамильтоновость

В рамках данной работы будем рассматривать приведённые выше достаточные условия гамильтоновости связных и жёстких графов, а также эталонные достаточные условия и сравнивать их между собой на предмет того, какие их них сильнее, а какие слабее. В приложении А приведён листинг программы, которая получает на ввод все связные графы с заданным количеством вершин, и далее проверяет их на достаточные условия гамильтоновости.

Рассмотрим в таблице 2 полученные значения среди достаточных условий, связанных с жёсткостью.

Таблица 2 – Результат проверки жёстких графов на гамильтоновость

| Число вершин, $n$ | Проверяемое достаточное условие | | |
|---|---|---|---|
| | Бауэр | Бауэр-Броерсма-Вельдман | Юнг-Виттманн |
| 4 | 1 | 3 | 3 |
| 5 | 1 | 8 | 8 |
| 6 | 4 | 48 | 19 |
| 7 | 19 | 365 | 145 |
| 8 | 161 | 5157 | 2047 |
| 9 | 5697 | 120406 | 41170 |
| 10 | 592102 | 5339326 | 1245462 |
| 11 | 90371428 | 463647750 | 103813754 |

Теперь рассмотрим в таблице 3 достаточные условия, задействующие связность и локальную связность.

Таблица 3 – Результат проверки связных графов на гамильтоновость

| Число вершин, $n$ | Проверяемое достаточное условие | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Оберли-Самнер | Кикуст | Чартранд-Пипперт | Тутте |
| 4 | 2 | 0 | 2 | 0 |
| 5 | 5 | 0 | 5 | 0 |
| 6 | 18 | 1 | 6 | 1 |
| 7 | 69 | 0 | 3 | 1 |
| 8 | 349 | 3 | 2 | 4 |
| 9 | 2049 | 0 | 2 | 10 |
| 10 | 14610 | 9 | 2 | 53 |
| 11 | 102270 | 0 | 2 | 351 |

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была рассмотрена связь гамильтоновости графов с различными инвариантами, основанными на связности, локальной связности или жёсткости графов. Проведено сравнение этих достаточных условий друг с другом и с достаточными условиями Бонди-Хватала, Оре, Дирака и Хватала, которые были взяты как эталонные. В результате можно сделать вывод, что все рассмотренные условия являются более слабыми по сравнению с условием Бонди-Хватала (которое является самым сильным из эталонных), однако удалось найти графы, которые удовлетворяют некоторым из них, но не удовлетворяют условию Бонди-Хватала.

Была разработана программа на Visual Studio C# для проверки достаточных условий гамильтоновости графов и с её помощью были проанализированы различные достаточные условия гамильтоновости и рассмотрены графы, которые удовлетворяют одним, но не удовлетворяют другим условиям.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Абросимов, М. Б. Практические задания по графам [Электронный ресурс] : учеб. пособие / М. Б. Абросимов, А. А. Долгов // 2-е изд. – Саратов: Изд-во «Научная книга», 2009 – 75 с. URL: http://www.sgu.ru/sites/default/files/textdocsfiles/2013/06/26/abrosimov_m.b._dolgov_a.a._prakticheskie_zadaniya_po_grafam.pdf (дата обращения: 23.09.2019). – Загл. с экрана. – Яз. рус

2 Асанов, М. О. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы [Электронный ресурс] / М. О. Асанов, В. А. Баранский, В. В. Расин – Ижевск : НИЦ «РХД», 2001. – 228 с. – URL: http://tka4.org/materials/lib/Articles-Books/Numerical%20Algorithms/Graph/Асанов%20М.О.,%20Баранский%20В.А.,%20Расин%20В.В.%20Дискретная%20математика.%20Графы%20%20матроиды,%20алгоритмы.pdf (дата обращения: 23.09.2019). – Загл. с экрана. – Яз. рус.

3 Емеличев, В. А. Лекции по теории графов [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич – Москва «Наука», 1990 – 385 с. – URL: http://www.padaread.com/?book=49381 (дата обращения: 27.09.2019). – Загл. с экрана. – Яз. Рус.

4 Интуит: Эйлеровы и гамильтоновы циклы [Электронный ресурс] : национальный открытый университет / URL: https://www.intuit.ru/studies/courses/101/101/lecture/2957?page=1 (дата обращения: 27.09.2019). – Загл. с экрана. – Яз. рус.

5 Карпов, Д. В. Теория графов [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Д. В. Карпов // Санкт-Петербургский государственный университет. – СПб. : 2017. – 525 с. – URL: https://logic.pdmi.ras.ru/~dvk/graphs_dk.pdf (дата обращения: 02.10.2019). – Загл. с экрана. – Яз. рус.

6 Университет ИТМО: Теорема Понтрягина-Куратовского [Электронный ресурс] / URL: https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title= Теорема_Понтрягина-Куратовского (дата обращения: 27.09.2019). – Загл. с экрана. – Яз. Рус.

7 GraphOnline: Работа с графами онлайн [Электронный ресурс] / URL: https://graphonline.ru/ (дата обращения: 17.10.2019). – Загл. с экрана. – Яз. рус.

8 Подольский, В. В. Лекция 7: графы [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В. В. Подольский // Математический институт имени В. А. Стеклова. – URL: http://www.mi-ras.ru/~podolskii/files/lecture7.pdf (дата обращения: 27.09.2019). – Загл. с экрана. – Яз. рус.

9 Chartrand, G. Locally connected graphs [Электронный ресурс] : научная статья / G. Chartrand, R. E. Pippert // Časopis pro pěstování matematiky, 1974. – Vol. 99. – № 2. – С. 158–163. – URL: https://eudml.org/doc/21204 (дата обращения: 10.10.2019). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

10 Gould, R. J. Updating the Hamiltonian Problem – A Survey [Электронный ресурс] : научная статья / R. J. Gould // Journal of Graph Theory, 1991. – № 15(2). – С. 121–157. – URL: https://www.researchgate.net/publication/248238611_Updating_the_Hamiltonian_problem-A_survey (дата обращения: 17.10.2019). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

11 ПОИВС: Граф без клешней [Электронный ресурс] / URL: http://poivs.tsput.ru/ru/Math/DiscreteMath/GraphTheory/CountWithoutClaws (дата обращения: 17.10.2019). – Загл. с экрана. – Яз. рус.

12 Gordon, V. S. Hamiltonian properties of locally connected graphs with bounded vertex degree [Электронный ресурс] : научная статья / V. S. Gordon, Y. I. Orlovich, C. N. Potts, V. A. Strugevich // Discrete Applied Mathematics, 2011. – Vol. 159. – С. 1759–1774. – URL:

https://core.ac.uk/download/pdf/81191533.pdf (дата обращения: 17.10.2019). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

13 ScienceDirect: 4-connected projective-planar graphs are Hamiltonian-connected. [Электронный ресурс] / URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0095895614001336 (дата обращения: 10.10.2019). – Загл. с экрана. – Яз. Англ.

14 Gould, R. J. Advances on the Hamiltonian Problem – A Survey [Электронный ресурс] : научная статья / R. J. Gould // Graphs and Combinatorics, 2003. – № 19. – С. 7–52. – URL: http://www.mathcs.emory.edu/~rg/advances.pdf (дата обращения: 17.10.2019). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

15 Bondy, J. A. A method in graph theory. / J. A. Bondy, V. Chvatal // Discrete Mathematics, 1976. - № 15. – С. 111-135. – URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0012365X76900789?via%3Dihub (дата обращения: 17.10.2019). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

16 DeLeon, M. A Study of Sufficient Conditions for Hamiltonian Cycles. / M. DeLeon // Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal, 2000. – Vol. 1. – URL: https://pdfs.semanticscholar.org/4390/f716b134092d053d2680916d60dc029fca13.pdf (дата обращения: 17.10.2019). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

17 McKay, B.D. Practical Graph Isomorphism / B.D. McKay, A. Piperno // Journal of Symbolic Computation, 2014. – Vol. 60. – С. 94–112. – URL: http://pallini.di.uniroma1.it/ (дата обращения: 17.10.2019). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

18 Хабрахабр: Cygwin: Введение [Электронный ресурс] / URL: https://habrahabr/ru/sandbox/93077 (дата обращения: 07.10.2019). – Загл. с экрана. – Яз. рус.

19 Cygwin: Install and updating [Электронный ресурс] / URL: https://www.cygwin.com/install.html (дата обращения: 07.10.2019). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

20 Абросимов, М. Б. Сравнение достаточных условий гамильтоновости графа, основанных на степенях вершин [Электронный ресурс] : научная статья / М. Б. Абросимов // Прикладная дискретная математика, 2019. – № 45. – С. 55–63. – URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=pdm&paperid=671&option_lang=rus (дата обращения: 07.10.2019). – Загл. с экрана. – Яз. рус.

21 OEIS: Онлайн-энциклопедия целочисленных последовательностей [Электронный ресурс] / URL: http://oeis.org/?language=russian (дата обращения: 10.11.2019). – Загл. с экрана. – Яз. рус.