МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

Конгруэнции деревьев

АВТОРЕФЕРАТ

дипломной работы

студента 6 курса 631 группы

специальности 10.05.01Компьютерная безопасность

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Подкидышева Ивана Александровича

Научный руководитель

профессор, к.ф.-м.н., доцент ___________ В. Н. Салий

23.01.2020 г.

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., доцент ___________ М. Б. Абросимов

23.01.2020 г.

Саратов 2020

ВВЕДЕНИЕ

Ориентированный граф (далее орграф) – пара $\vec{G} = (V, \alpha)$, где V – конечное непустое множество, а α – отношение на V. Графовые системы являются универсальной моделью и используются во многих отраслях человеческой деятельности, при этом существуют различные методы преобразования графовых систем в конкретных их приложениях.

Основные определения приводятся в соответствии с [1] и [4].

В качестве допустимых реконструкций для заданного графа обычно рассматриваются следующие [12]:

1) ориентация ребер данного неориентированного графа,
2) добавление новых дуг (ребер),
3) удаление некоторых дуг (ребер),
4) факторизация графа – отождествление вершин с соответствующим преобразованием отношения смежности.

Последний вид реконструкций задает определение гомоморфизма графов. Гомоморфизмом орграфа в другой орграф называется отображение множества вершин из первого орграфа во второй, сохраняющее отношение смежности.

Пусть K – некоторый класс орграфов. Конгруэнцией K-графа $\vec{G}$ называется такое отношение эквивалентности θ на V, что факторграф $\overrightarrow{G/\theta}$ является K-графом.

Здесь известны результаты А. В. Киреевой, которая посвятила заметку [7] конгруэнциям ориентированных деревьев, а в работе [8] охарактеризовала функциональные графы, у которых каждый подграф изоморфен подходящему факторграфу, и функциональные графы, у которых каждый факторграф изоморфен подходящему подграфу. Еще одна ее работа [9] посвящена конгруэнциям турниров.

Далее в качестве класса K будем рассматривать класс неориентированных графов.

Неориентированным графом (или, для краткости, графом) называется пара $G = (V, \alpha)$, где α – симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V. В неориентированном графе пара встречных дуг (u, v), (v, u) рассматривается как один элемент графа, называемый ребром $\{u, v\}$.

Работа Е. О. Фоминой [15] посвящена изучению конгруэнций цепей и циклов. В частности, она показала, что каждый связный граф является факторграфом подходящей цепи, провела аналогии между цепными (циклическими) конгруэнциями m-реберной цепи (m-реберного цикла) и делителями числа $m + 1$, описала структуру полурешеток конгруэнций цепей и циклов, а также показала, что каждая конечная решетка вложима в решетку четных конгруэнций подходящей цепи и подходящего цикла.

О. Е. Смирнов изучал цепные конгруэнции графов, нашел алгоритм построения максимальной факторцепи и минимальной цепной конгруэнции произвольного двудольного графа, а также установил некоторые свойства решетки цепных конгруэнций графа [13].

Для неориентированных графов понятие конгруэнции тесно связано с раскрасками. В контексте конгруэнций, n-раскраска неориентированного графа G – это разбиение множества вершин этого графа на n независимых классов, т.е. составление конгруэнции с n-классами.

Хроматическое число $\chi(G)$ графа G можно рассматривать как число классов конгруэнции θ графа G с наименьшим возможным числом классов, причем G/θ будет полным графом. Проблема нахождения хроматического числа для произвольного графа является NP-полной [16].

Дерево – связный граф без циклов. Будем обозначать дерево через T.

Деревья как структура данных имеют широкое применение во многих областях науки и жизни. В компьютерных науках это прежде всего различные бинарные деревья: двоичное дерево поиска (в том числе используется во многих высоко нагруженных маршрутизаторах для хранения таблиц маршрутизации), куча (очередь с приоритетом), декартовы деревья (используются в беспроводных сетях и алгоритмах выделения памяти) и другие [22]. Древовидная структура также используется при представлении синтаксиса в компиляторах различных языков программирования. Также известна проблема построения минимального остовного дерева для заданного взвешенного орграфа (возможно, с накладыванием дополнительных условий), приложением которой, например, является построение транспортной сети [17].

Целями данной работы являются:

- изучение конгруэнций неориентированных графов в их приложении к деревьям;
- изучение конгруэнций деревьев и упорядоченного по включению множества конгруэнций для заданного дерева.

Для достижения поставленных целей были сформулированы следующие задачи:

- изучение терминологии и исследований касательно конгруэнций для разных классов графов;
- поиск закономерностей на конкретных примерах, построение гипотез;
- составление программного комплекса для автоматизированной проверки гипотез на большом количестве графов и построения изображений получаемых математических моделей;
- формулирование доказательств или опровержений построенных гипотез.

Дипломная работа состоит из введения, 4 разделов, заключения, списка использованных источников и 2 приложений. Общий объем работы – 67 страниц, из них 53 страниц – основное содержание, включая 24 рисунков, список использованных источников из 22 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В разделе 1 приводится терминология о графах и конгруэнциях, вводятся необходимые обозначения.

В разделе 2 исследуются конгруэнции неориентированных графов в их отношении к деревьям. Основой раздела являются теоремы 2 и 3.

Теорема 1. Отношение эквивалентности θ на множестве вершин графа $G = (V, \alpha)$ тогда и только тогда будет конгруэнцией этого графа, когда каждый θ-класс образует в G независимое подмножество.

Теорема 2. Пусть дан граф G и некоторая его конгруэнция θ. Существует биекция φ множества $Con\ G/\theta$ на множество $\{\theta' \in Con\ G \mid \theta \subseteq \theta'\}$ такая, что:

1. пусть $\theta^* \in Con\ G/\theta$, тогда $(G/\theta)/\theta^* \cong G/\varphi(\theta^*)$;
2. пусть $\theta^* \in Con\ G/\theta$, тогда верно соотношение $\theta(y) \in \theta^*\big(\theta(x)\big) \Leftrightarrow \theta(x) \cup \theta(y) \subseteq \varphi(\theta^*)(x)$.

Следствие. Пусть дан граф G и некоторая его конгруэнция θ. Если φ – биективное отображение множества $Con\ G/\theta$ на множество $\{\theta' \in Con\ G \mid \theta \subseteq \theta'\}$, удовлетворяющее условиям теоремы, то $|\theta^*| = |\varphi(\theta^*)|$.

Теорема 3. Для заданного связного m-реберного графа можно построить m-реберное дерево, для которого данный граф будет конгруэнтным факторграфом.

В подразделе 2.1 более подробно исследуются классы графов, являющихся конгруэнтными факторграфами деревьев в смысле неориентированных графов. В частности, показано, что конгруэнтными факторграфами дерева будут все его подграфы, а также цепи и циклы длины, не превышающие диаметр заданного дерева.

Теорема 4. Фактор-образы достижимых в исходном графе вершин будут достижимы в факторграфе.

Следствие. Факторграфами деревьев являются связные графы.

Лемма 1. Конгруэнтными факторграфами дерева будут все цепи, длины меньшей или равной диаметру.

Лемма 2. Конгруэнтными факторграфами дерева будут все циклы, длины меньшей или равной диаметру.

В подразделе 2.2 вводится понятие древесная конгруэнция, показано необходимое свойство попадания двух вершин в один класс древесной конгруэнции, определен вид главных древесных конгруэнций.

Теорема 5. Если θ – древесная конгруэнция дерева $T = (V, \alpha)$, то $\forall u, v \in \theta(u)$: $d(u, v) \equiv 0 \ (mod\ 2)$.

Теорема 6. Для вершин $u, v \in V$ дерева $T = (V, \alpha)$ главная древесная конгруэнция $\theta(u, v)$ существует тогда и только тогда, когда расстояние между u и v равно 2.

В конце подраздела 2.2 также показывается, что древесные конгруэнции деревьев факторизуют исходное дерево не только на его поддеревья.

В разделе 3 изучается упорядоченное по включению множество древесных конгруэнций для заданного дерева. В подразделе 3.1 вводятся необходимые определения и обозначения из теории упорядоченных множеств. В подразделе 3.2 исследуется структура упорядоченного по включению множества древесных конгруэнций для заданного дерева: определены экстремальные элементы, показано, что оно является решеткой, определен вид атомов и коатомов, выведена формула вычисления высоты древесной конгруэнции.

Δ – наименьший элемент множества $(Con\ T, \subseteq)$.

Теорема 7. Наибольшим элементом $(Con\ T, \subseteq)$ является конгруэнция, факторизующая T на цепь P_1.

Теорема 8. Для любых двух древесных конгруэнций θ_1, θ_2 в упорядоченном множестве $(Con\ T, \subseteq)$ существует точная нижняя грань.

Теорема 9. Коатомами в $Con\ T$ являются конгруэнции, факторизующие T на графы, изоморфные P_2, и только они.

Теорема 10. Высота древесной конгруэнции θ в $Con\ T$ равна $n - c(\theta)$, где n – количество вершин в T.

Следствие 1. Длина $Con\ T$ равна $n - 2$.

Следствие 2. Атомами $Con\ T$ являются в точности главные конгруэнции.

Теорема 11. Пусть T – дерево, θ и $\theta^* \in Con\ T$. θ^* – верхний сосед θ тогда и только тогда, когда $\theta \subseteq \theta^*$ и $c(\theta^*) = c(\theta) - 1$.

Следствие. Пусть $\theta \in Con\ T$, тогда существует φ – биекция множества главных конгруэнций в $Con\ T/\theta$ на множество верхних соседей θ в $Con\ T$.

Таким образом, теоремы, полученные при написании раздела 3, достаточно подробно описывают особенности структуры упорядоченного множества древесных конгруэнций произвольного дерева.

Раздел 4 посвящен практическому построению решетки древесных конгруэнций для заданного дерева.

В подразделе 4.1 формализован эффективный алгоритм построения ориентированного графа, соответствующего диаграмме решетки древесных конгруэнций. Временная сложность полученного алгоритма составляет $O(B_n n^2)$.

В подразделе 4.2 приводится описание программы, реализующей алгоритм из подраздела 4.1. Программа написана на языке Python, имеет консольный интерфейс и обеспечивает выполнение следующих функций:

1) ввод дерева в программу из файла или с помощью интерактивного пореберного ввода в окне консоли;
2) построение для заданного дерева диаграммы решетки древесных конгруэнций для введенного дерева, сохранение ее в файл в формате png;
3) построение для заданного дерева ориентированного графа, соответствующего диаграмме решетки древесных конгруэнций, запись его в файл;
4) построение изображения введенного дерева, сохранение его в файл в формате png.

В приложении А приведен исходный код программы, в приложении Б приведены примеры работы программы для деревьев с различным числом вершин.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были рассмотрены конгруэнции графов и их приложения к деревьям. Для класса неориентированных графов в определении конгруэнции главными результатами являются доказательства следующих теорем:

- существование для заданной конгруэнции обладающей специальными свойствами биекции множества всех конгруэнций, в которые включается заданная, на множество всех конгруэнций фактографа по заданной конгруэнции;
- для всякого графа можно построить дерево с таким же числом ребер, которое факторизуется на этот граф.

Также было показано, что каждое дерево факторизуется на каждый свой подграф, а также на цепи и циклы длины, не превышающей диаметр заданного дерева.

При выборе в качестве класса в определении конгруэнции класса деревьев были получены следующие результаты:

• необходимое свойство попадания пары вершин заданного дерева в один класс некоторой конгруэнции;

• было показано, что упорядоченное по включению множество древесных конгруэнций дерева является решеткой, были описаны экстремальные и главные элементы этой решетки;

• была получена формула вычисления высоты произвольной конгруэнции в решетке и в связи с этим получена формула вычисления длины этой решетки;

• показано взаимно-однозначное соответствие для произвольной конгруэнции между ее верхними соседями и множеством главных конгруэнций фактографа по этой конгруэнции.

Помимо этого, был формализован алгоритм построения решетки древесных конгруэнций и определена его временная асимптотическая сложность, равная $O(B_n n^2)$, где n – число вершин дерева и B_n – число Белла.

Стоит отметить, что в данной области осталось множество нерешенных задач. Среди них можно выделить определение дистрибутивности решетки древесных конгруэнций, построение формулы для определения мощности множества всех древесных конгруэнций заданного дерева.

Также можно рассмотреть множество конгруэнций дерева, факторизующих его на неизоморфные графы. Здесь могут быть интересные результаты, учитывая тот факт, что существуют полиномиально-вычислимые инварианты деревьев, например, код Прюфера. В качестве примера интересных конструкций можно привести звезду – каждая ее конгруэнция факторизует ее также на звезду, следовательно, решетка ее конгруэнций, составленная с точностью до изоморфизма факторграфов, представляет собой цепь.

Нерассмотренным остался также круг задач касательно K-конгруэнций, когда K – дерево. В частности интересна задача описания множества минимальных K-конгруэнций для произвольного дерева, то есть, факторизующих произвольный заданный граф на неориентированное дерево.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Абросимов, М.Б. Практические задания по графам: учебное пособие / М.Б. Абросимов, А.А. Долгов – 3-е изд., перераб. и доп. –Саратов: Научная книга, 2016. – 82с.

2. Алексеев, В.Е. Верхняя оценка числа максимальных независимых множеств графа [Электронный ресурс] / В.Е. Алексеев // Дискретная математика – М. : Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 2007. – Т. 19. Вып. 3. – С. 84-88. – URL: http://www.mathnet.ru/links/982429ddbb87bf581b47789a1 cb1074b/dm967.pdf (22.12.2019). – Загл. с экрана. – Яз. рус. – Имеется печатный аналог.

3. Биркгоф, Г. Теория решеток[Электронный ресурс] / Г. Биркгоф ; пер. В.Н. Салий –М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 568с. –URL: http://inis.jinr.ru/sl/vol2/Mathematics/Алгебра/Биркгоф, _Теория_решеток,1984.pdf (дата обращения: 22.12.2019). – Загл. с экрана. – Яз. рус. – Имеется печатный аналог.

4. Богомолов, А.М. Алгебраические основы теории дискретных систем / А.М. Богомолов, В.Н. Салий –М. : «Физико-математическая литература» РАН, 1997. – 367 с.

5. Кабанов, М.А. О конгруэнциях ориентированных графов / М. А. Кабанов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений – Саратов: Изд-во «Колледж», 1998. – Вып. 2.

6. Кабанов, М.А. Функциональные конгруэнции ориентированных графов / М. А. Кабанов // Упорядоченные множества и решетки : межвуз. сб. науч. тр. – Саратов : Изд-во Саратовского университета, 1995. – Вып. 11. – С. 15–23.

7. Киреева, А.В. О конгруэнциях и автоморфизмах корневых деревьев / А. В. Киреева // Теория полугрупп и ее приложения : межвуз. сб. науч. тр. – Саратов : Изд-во Саратовского университета, 1991. – Вып. 10. – С. 37-42.

8. Киреева, А.В. Подграфы и факторизации функциональных графов [Электронный ресурс] / А.В. Киреева // Успехи математических наук – М. : Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 1993. – Т. 48, №2 (290). – С.

183-184. – URL: http://www.mathnet.ru/links/d774f1420594568e0f49141bde4cca0f/rm1282.pdf (22.12.2019). – Яз. рус. – Загл. с экрана.– Имеется печатный аналог.

9. Киреева, А.В. Решетка конгруэнций турнира / А. В. Киреева // Студенты – ускорению научного прогресса – Саратов : Изд-во Саратовского университета, 1991. – Вып. 3. – С. 3–7.

10. Мирзаянов, М.Р. О минимальных сильно связных конгруэнциях ориентированных цепей / М. Р. Мирзаянов // Известия Саратовского университета. Математика. Механика. Информатика – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2006. – Т. 6. Вып. 1/2. – С. 91-95.

11. Мирзаянов, М.Р. Сильно связные конгруэнции ориентированных графов / М. Р. Мирзаянов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2006. – Вып. 7. – С. 104-114.

12. Салий, В.Н. Оптимальные реконструкции графов / В. Н. Салий // Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры: тезисы докладов межд. науч. конф. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2008. – С. 59-65.

13. Смирнов, О. Е. Минимальные цепные конгруэнции графов / О. Е. Смирнов // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы междунар. науч. конф. – Саратов: Издат. центр «Наука», 2016. – С. 384-386.

14. Филькин, А.В. Построение наименьшей асинхронной конгруэнции автомата без выхода / А. В. Филькин // Теоретические проблемы информатики и ее приложений – Саратов: Изд-во «Колледж», 2001. – Вып. 4. – С. 119.

15. Фомина, Е.О. Конгруэнции цепей и циклов : дис. … кан. физ.-мат. наук / Е. О. Фомина.– Саратов, 2013. – 100 с.

16. Birkhoff, G. D. ChromaticPolynomials [Электронный ресурс] / G. D. Birkhoff, C. D. Lewis // Transactions of the American Mathematical Society [Электронный ресурс] – 1946. – №60 – С. 355-451. – URL: https://pdfs.semanticscholar.org/85e7/47e7d2041822d43deb3c3f038029e11df07d.pdf

(дата обращения 10.11.2019). – Яз. англ. – Загл. с экрана.– Имеется печатный аналог.

17. Boundy, J.A. Graph theory with applications[Электронный ресурс] / J.A. Boundy, U.S.R. Murty – New-York :Elsevier Science Publishing Co,. Inc., 1982. – 264 с. –URL: http://www.zib.de/groetschel/teaching/WS1314/BondyMurty GTWA.pdf (дата обращения: 22.12.2019). – Загл. с экрана. – Яз. англ.– Имеется печатный аналог.

18. Hagberg, A. Overview of NetworkX [Электронный ресурс] / A. Hagberg, D. Schult, P. Swart // ReadtheDocs – портал онлайн документации [Электронный ресурс] – 2019. – URL: https://networkx.github.io/documentation/stable/index.html (дата обращения: 22.12.2019). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

19. Hunter, J. Matplotlib documentation overview [Электронный ресурс] / J. Hunter, D. Dale, E. Firing // Официальный сайт библиотеки Matplotlib [Электронный ресурс] –2019. – URL: https://matplotlib.org/contents.html (дата обращения: 22.12.2019). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

20. Sloane, N. J. A. Bell or exponential numbers: number of ways to partition a set of n labeled elements [Электронный ресурс] / N. J. ASloane, M.F. Hasler // Онлайн энциклопедия последовательностей целых чисел [Электронный ресурс] – 2018. – URL: https://oeis.org/A000110 (дата обращения: 22.12.2019). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

21. The Python Standard Library [Электронный ресурс] // Официальная документация языка программирования Python [Электронный ресурс] – 2019. – URL: https://docs.python.org/3.6/library/index.html(дата обращения: 22.12.2019). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

22. Van Dooren, P. Graph Theory and Applications [Электронный ресурс] / P. Van Dooren – Dublin :Université catholique de Louvain Louvain-la-Neuve, 2009. – URL: http://www.hamilton.ie/ollie/Downloads/Graph.pdf (дата обращения: 22.12.2019). – Загл. с экрана. – Яз. англ.