

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Исследования синхронизации в гетерогенной сети связанных  
осцилляторов Ван дер Поля, имеющих расстройку по управляющему  
параметру**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента(ки) 4 курса 422 группы

направления 11.03.02 «Инфокоммуникационные

технологии и системы связи»

физического факультета

Прасоловой Оксаны Вячеславовны

Научный руководитель

ст. преподаватель, к. ф.-мат. наук \_\_\_\_\_ И. А. Шепелев

Зав. кафедрой

д.ф.-мат.наук., профессор \_\_\_\_\_ В.С. Анищенко

Саратов 2020 год

## ВВЕДЕНИЕ

Исследование сложных пространственно-временных структур в активных средах и сети осцилляторов является одним из наиболее динамично развивающихся направлений нелинейной динамики. Обычно эти структуры типичны для нелинейных активных сред, сетей или ансамблей нелинейных осцилляторов. Эти системы могут быть описаны системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений [1–8]. Появление сложных пространственно-временных структур в этих системах обычно сопровождается сложной колебательной или автоволновой динамикой. Интенсивное исследование таких режимов началось в середине прошлого века и продолжается по сей день [9]. Отдельные элементы в системе, перечисленной выше, диффузионно связаны друг с другом, то есть каждый элемент симметрично взаимодействует только со своими ближайшими соседями. Наблюдалось увеличение исследовательской активности по анализу сложных пространственно-временных структур в связи с открытием в 2002 году Курамото и Баттогтоха, они сообщили, что массивы нелокально связанных осцилляторов могут спонтанно разделиться на синхронизированные и десинхронизированные субпопуляции [10]. Это было удивительным аспектом, так как ранее считалось, что связанные идентичные осцилляторы либо синхронизируются, либо будут работать несвязно, хаотично. Так как сеть обладала гибридной природой, объединяющей как когерентные, так и некогерентные части, Стивом Строгацем было предложено называть такие состояния химерными из-за их похожести на мифологических греческих зверей, будто собранных из несопоставимых частей [11]. Большинство обнаруженных химерных состояний были обнаружены в ансамблях нелокально связанных осцилляторов [12–17]. Однако существует ряд исследовательских работ, в которых химерные состояния были обнаружены в ансамблях с глобальной связью и даже с локальной связью. Химерные состояния привлекают большое внимание в связи с тем, что эти состояния реализуются в сети связанных осцилляторов, которая на первый взгляд не так интуитивна.

Может быть они играют важную роль в живых и технических системах, состоящих из множества связанных активных элементов. Недавние работы показывают, что химеры можно наблюдать в реальных экспериментах и они могут быть реализованы даже в динамике головного мозга.

В настоящей работе мы численно изучаем динамику двумерной решетки осцилляторов Ван дер Поля с нелокальным взаимодействием. Эта система была исследована для фиксированных параметров связи в [18]. Типичными режимами, наблюдаемыми в этой системе, были спиральные волны, спиральные волновые химеры и целевые волновые химеры, которые также наблюдаются при различных значениях параметров управления в отдельных генераторах. Сейчас мы изучаем различные пространственно-временные режимы, когда параметры связи фиксированы, а параметры управления различны. Мы детально анализируем особенности основных пространственно-временных моделей и перехода между ними при изменении управляющих параметров.

### Исследуемая система

Генератор Ван дер Поля служит базовым элементом исследуемой модели и определяется следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= \varepsilon_i(1 - x^2)y - \omega^2 x \end{aligned} \quad 8)$$

где  $x, y$  - динамические переменные, а  $\varepsilon_i, \omega$  - параметры. Параметр  $\varepsilon_i$  определяет уровень нелинейности, а параметр  $\omega$  отвечает за частоту генератора. Значение  $\varepsilon = 0$  соответствует сверхкритической бифуркации Андронова-Хопфа, которая приводит к рождению предельного цикла.

Рассматривается модель пространственно организованного ансамбля осцилляторов, который представляет собой двумерную регулярную решетку  $N \times N$  с ребром  $N = 100$  и состоит из идентичных нелокально связанных осцилляторов Ван дер Поля (8). Решетка описывается следующей системой ОДУ:

$$\begin{aligned} \frac{dx_{i,j}}{dt} &= y_{i,j} + \frac{\sigma}{Q} \sum_{k,p} (x_{k,p} - x_{i,j}) \\ \frac{dy_{i,j}}{dt} &= \varepsilon_i(1 - x_{i,j}^2)y_{i,j} - \omega^2 x_{i,j} \end{aligned} \quad 9)$$

$$i, j = 1 \dots N,$$

Двойной индекс динамических переменных  $x_{i,j}$  и  $y_{i,j}$  с  $i, j = 1, \dots, N$  определяет положение элемента в двумерной решетке. Все осцилляторы идентичны по параметрам, и каждый из них связан со всеми элементами решетки из квадрата со стороной  $(1 + 2P)$ , в центре которого расположен этот элемент. Целое число  $P$  определяет нелокальный характер связи и называется интервалом взаимодействия. Случай  $P = 1$  соответствует локальной связи, в то

время как  $P = N / 2$  - случай глобальной связи, когда каждый элемент взаимодействует со всей системой. Он определяет количество соседей  $Q$ , с которым связан каждый элемент, число определяется числами комбинаций  $k, p$  в следующих соотношениях:

$$\begin{cases} \max(1, i - P) \leq k \leq \min(N, i + P), \\ \max(1, j - P) \leq p \leq \min(N, j + P), \end{cases} \quad (10)$$

которые представляют граничные условия без потока в нелокальном случае. Мы также используем понятие диапазона связи  $r = P / N$  по аналогии с классическими работами по химерам. Член нелокальной связи вводится только в первое динамическое уравнение в решетке для  $x_{i,j}$ .

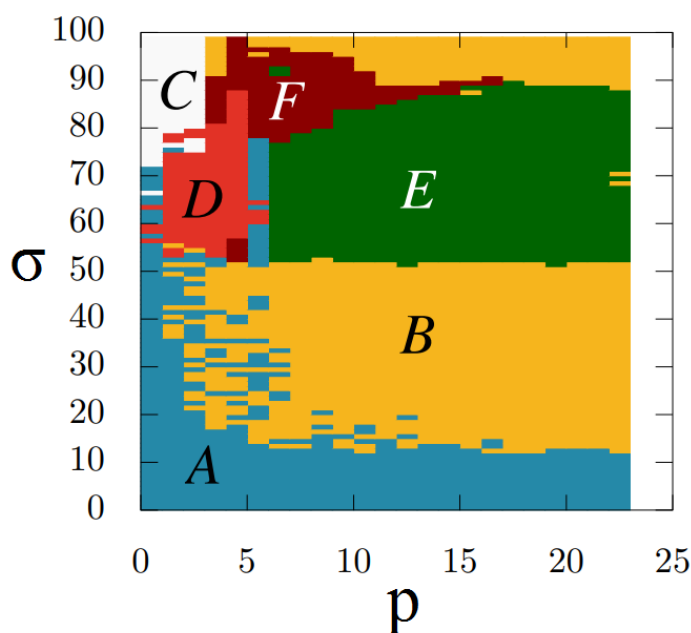
Начальными условиями для всех рассмотренных случаев являются множество случайных значений переменных с равномерным распределением в пределах  $x_0 \in [-1, 1]$ ,  $y_0 \in [-1, 1]$ . Системные уравнения интегрируются с использованием метода 4-го порядка Рунге-Кутты с шагом по времени  $dt = 0,001$ . Все исследуемые режимы получены после переходного процесса  $t_{\text{trans}} = 20000$  единиц времени.

### Экспериментальная часть

В настоящей работе мы численно изучаем динамику двумерной решетки осцилляторов Ван-дер-Поля с нелокальным взаимодействием. Типичными режимами, наблюдаемыми в этой системе, были спиральные волны, спиральные волновые химеры и целевые волновые химеры, которые также наблюдаются при различных значениях управляющих параметров в отдельных генераторах. Сейчас мы изучаем различные пространственно-временные режимы, когда параметры связи изменяются, а управляющие параметры фиксированы. Выявлено, что уединенные состояния характерны для исследуемой системы. Более того, они имеют большое значение при формировании динамических режимов при высокой степени нелокальности. Мы детально анализируем особенности основных пространственно-временных

моделей и перехода между ними при изменении параметров связи. Особое внимание уделено эволюции пространственно-временных структур, природа которых связана с уединенными состояниями.

Теперь мы начнем исследовать динамику решетки (2), когда параметры  $\sigma$  и  $r$  меняются, а управляющие параметры фиксируются как  $\varepsilon = 2.1$  и  $\omega = 2.5$ . Построим диаграмму режимов для решетки (2) в плоскости параметров  $(r, \sigma)$  в диапазоне  $\sigma \in [0.01, 1]$  и  $r \in [1, 24]$ , как показано на рис. 1 (а). Последовательность случайным образом распределенных начальных условий в интервалах  $x_{i,j} \in [-1, 1]$  и  $y_{i,j} \in [-1, 1]$  используется для построения диаграммы режимов.



*Рисунок 9 – Диаграмма режимов для решетки (9) в плоскости параметров  $(r, \sigma)$  при  $\varepsilon = 2.1$  и  $\omega = 2.5$ . Область A относится к полной или частичной синхронизации; B - область существования химероподобных структур; область C соответствует спиральным волнам; D - область волновых химер-мишеней; район E относится к режиму уединенного государства; и единичные государственные химеры наблюдаются в районе F.*

Некогерентный режим реализуется, когда диапазон связи  $\tau$  мал и значения силы связи  $\sigma$  достаточно малы. Этот режим обозначен буквой В на диаграмме режимов (Рисунок 9). Химероподобные структуры реализуются в системе (9), когда значения силы связи и дальности связи увеличиваются. Режим характеризуется сосуществованием кластеров когерентности с медленным изменением амплитуд и кластеров когерентности. Последние представляют собой фрактальные структуры (Рисунок 10).

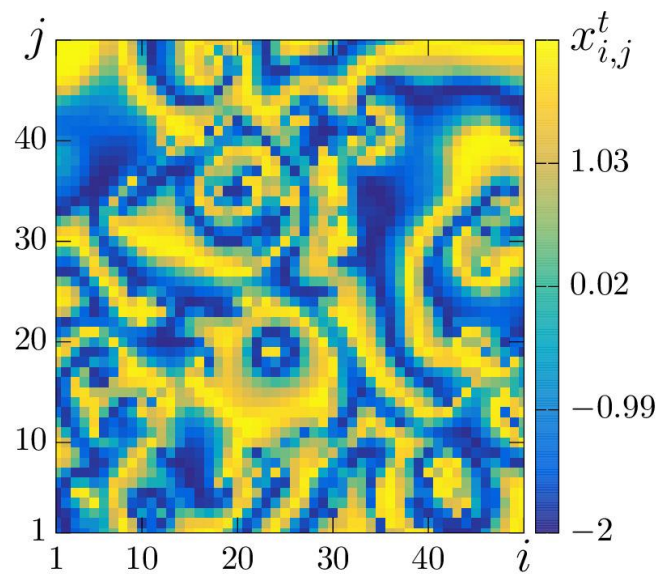


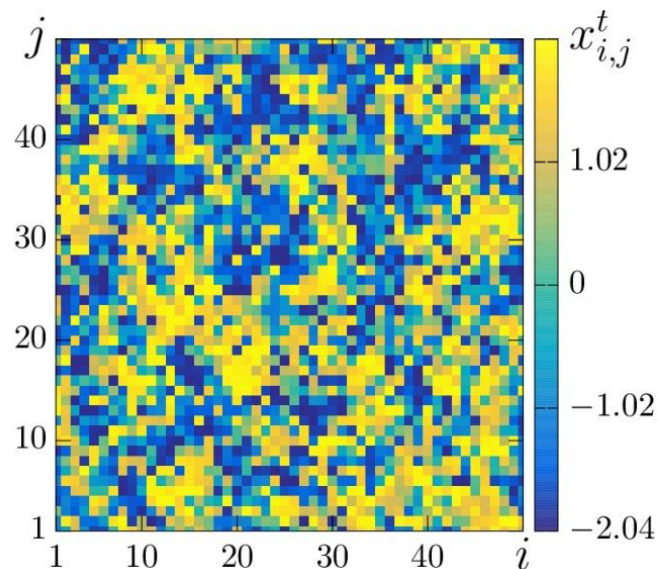
Рисунок 10 – Некогерентный химероподобный режим (на рисунке 9 область В). Параметры:  $P=1$ ,  $\sigma=0.38$ .

Среднеквадратичное отклонение  $i, j$  используется для количественной оценки режима и рассчитывается следующим образом:

$$\Delta_{i,j} = \sqrt{\langle (x_{i,j} - x_{i+1,j+1})^2 \rangle} \quad (12)$$

Пространственное распределение среднеквадратичного отклонения принимает максимальные значения в кластерах когерентности и минимальные значения в кластерах некогерентности. Синхронный режим занимает наибольшую область в плоскости параметров  $(\tau, \sigma)$ . Этот режим реализуется при различных параметрах  $p$ , но наблюдается более четко выраженная область при  $p \in [13, 25)$

и  $\sigma \in [0, 0,13)$ . Все элементы решетки периодически колеблются. Мгновенные состояния осцилляторов одинаковы в случае полной синхронизации, в то время как для частичной синхронизации мгновенные состояния почти одинаковы для осцилляторов, расположенных близко друг к другу, и могут отличаться для элементов, расположенных немного поодаль. Этот режим обозначен буквой А на диаграмме режимов и представлен на (Рисунок 11).



*Рисунок 11 – Режим синхронизации мгновенных состояний (на рисунке 9 область А). Параметры:  $P=1$ ,  $\sigma =0.03$ .*

Новый интересный режим появляется, когда сила сцепления достаточно велика. Волны-химеры-мишени реализуются при  $P = [1;6]$  и  $\sigma = [54;88]$ , обозначается буквой D на диаграмме режимов (Рисунке 9), и представлен на Рисунке 12. Этот режим представляет концентрические (целевые) волны с уединенными состояниями, которые образуют кластер когерентности химер, но могут также существовать вне этого кластера в сценарии общего случая. Осцилляторы, соответствующие уединенным состояниям, характеризуются аттрактором, который отличается от того, который представлен осцилляторами в области когерентности.



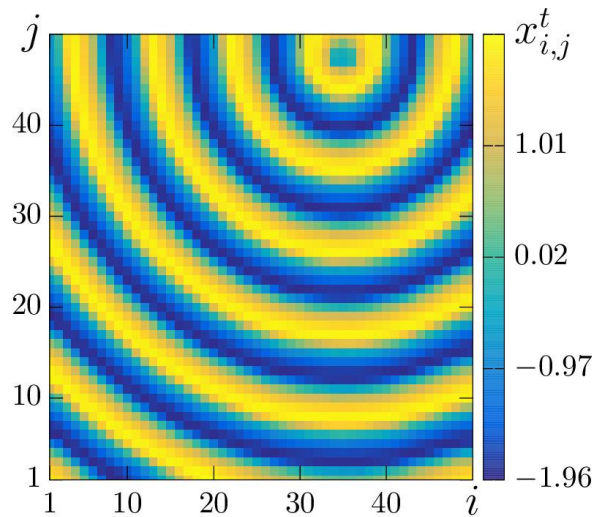


Рисунок 12 – Волновая химера-мишень (на рисунке 9 область D).

Параметры:  $P=1$ ,  $\sigma=0.59$ .

Спиральные волны и спиральные волновые химеры наблюдаются, когда диапазон связи  $p = [1;3]$  и сила связи  $\sigma=[73;100]$ . Отмечены на диаграмме режимов буквой С (Рисунок 9), показаны на Рисунке 13. Однако спиральные волны также могут быть реализованы для более низких значений  $\sigma$  и в случае локальной связи. Эти структуры уже были найдены и подробно изучены для системы (2) в [52]. Для этого режима существует центр волны, откуда волновой фронт начинает свое распространение по спирали.

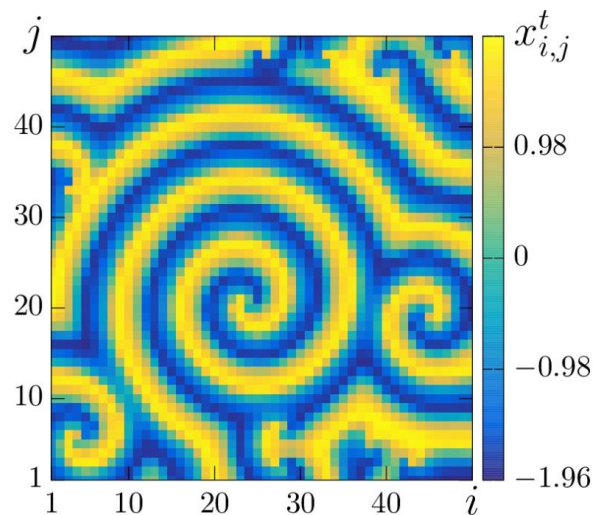


Рисунок 13 – Спиральные волны (на рисунке 9 область С). Параметры:

$P=1$ ,  $\sigma=0.95$ .

Длина волны целевой волновой химеры увеличивается с ростом диапазона связи  $\tau$  в пределах  $52 < \sigma < 90$ , и этот режим переходит в режим уединенного состояния, когда диапазон связи становится  $\tau > 6$ . Эта структура проиллюстрирована на рисунке 14 и соответствует области E на диаграмме режимов на рисунке 9.

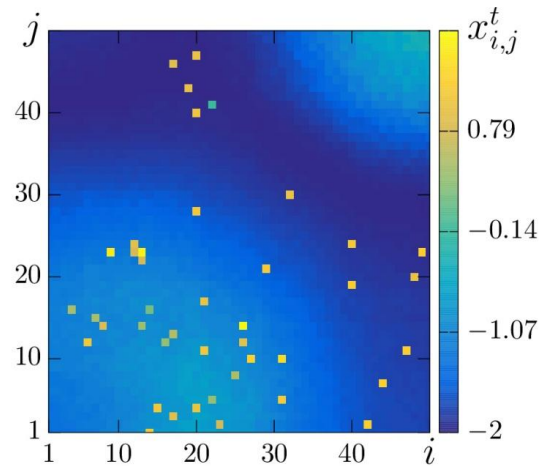


Рисунок 14 – Целевая волна химера (на рисунке 9 область E). Параметры:

$$P = 7, \sigma = 0.55.$$

Увеличение силы связи ( $\sigma > 78$ ) приводит к постепенному сбору уединенных состояний в определенный пространственный кластер и переходит в режим химеры уединенного состояния, который обозначен как F на рисунке 9 и изображен на рисунке 15.

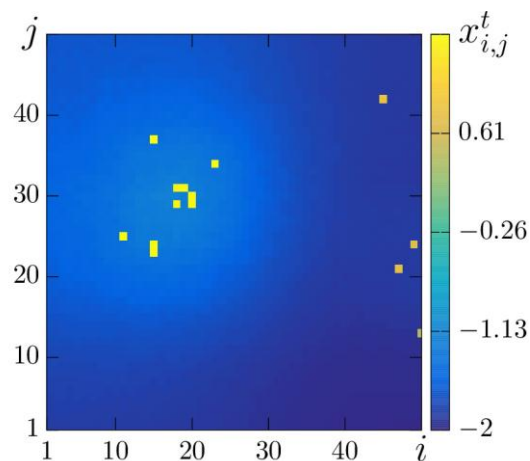


Рисунок 15 – Химера уединенных состояний (на рисунке 9 область F).  $P =$

$$7, \sigma = 0.86.$$

Свойства режимов, полученных экспериментально схожи с описанными режимами в главе «Химирные состояния».

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой статье мы исследовали двумерную решеточную сеть нелокально связанных идентичных генераторов Ван-дер-Поля с граничными условиями с нулевым потоком. Параметры управления отдельного генератора Ван-дер-Поля соответствуют релаксационному колебательному режиму. Исследована динамика двумерной решетки осцилляторов vdP как для локального, так и для нелокального типа взаимодействия осцилляторов, а также для относительно низких значений силы связи ( $\sigma \leq 1$ ) с фиксированными параметрами управления осцилляторами. Нелокальный характер связи добавляет некоторую сложность пространственно-временному поведению решетки и порождает большое количество динамических режимов. При низком уровне нелокальности (малые значения диапазона связи) система может демонстрировать сложные пространственно-временные структуры, а именно химерные спиральные волны и волны-мишени, как в [52].

Особенности спиральных волновых химер аналогичны тем, которые установлены для других моделей [41,42,46]. Например, нет характерного колоколообразного пространственного распределения средней частоты колебаний. Это намекает нам на то, что в решетке (2) может быть реализован специальный тип волновой химеры-мишени, а именно волновая химера-мишень с большим количеством уединенных состояний, которые случайным образом распределены внутри кластера когерентности. Показано, что осцилляторы в режиме уединенного состояния характеризуются аттрактором, который отличается от аттрактора, характерного для генераторов когерентного кластера. Более того, нелокальность связи высокого уровня приводит к появлению абсолютно новых пространственно-временных состояний. Одиночные состояния и химера уединенного состояния случайным образом распределены в пространстве.

Построена диаграмма режимов, реализуемых в решетке (2), в плоскости параметров  $(\tau, \sigma)$ . Выявлено, что режим уединенного состояния и химера уединенного состояния существуют для случая большого диапазона

связи в пределах определенного интервала силы связи, в то время как химера волны-мишени реализуется для того же интервала силы связи и для более короткого диапазона связи. По-видимому, все три динамических режима имеют сходную природу и плавно переходят друг в друга при разных значениях параметров связи. Увеличение диапазона связи  $\Gamma$  приводит к увеличению длины волны целевой волновой химеры. Волновой процесс исчезает, и только одиночные состояния остаются внутри синхронной области на большой дальности  $\Gamma$ . С другой стороны, рост силы связи приводит к группировке уединенных состояний в некоторой пространственной области решетки, тогда как другая часть становится полностью синхронной без уединенных состояний. Таким образом, существует два сосуществующих кластера, а именно кластер когерентности с синхронным поведением осцилляторов и кластер некогерентности, состоящий из большого числа уединенных состояний. Эта структура уже была найдена для других систем в [45,46]. Уединенные состояния возникают из-за бистабильности (или мультистабильности), которая возникает из-за нелокальной связи. Это общий механизм возникновения уединенных состояний в разных системах (см. [45]). Мы представляем механизмы перехода от одного режима к другому и объясняем, как уединенные состояния исчезают при увеличении силы связи.

Кроме того, химерные структуры были найдены для случая очень слабой силы связи  $\sigma < 0,2$  и короткого диапазона связи  $\Gamma$ . Этот режим является промежуточным состоянием между полной когерентностью, наблюдаемой для слабой локальной связи, и синхронным состоянием, в котором система (2) работает для большого диапазона связи  $\Gamma$  даже для очень слабой связи.