

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра системного анализа
и автоматического управления

**ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО
ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ЧИСЛОМ ПРИБОРОВ**
АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 481 группы
направления 27.03.03 Системный анализ и управление
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Васина Никиты Александровича

Научный руководитель
заведующий кафедрой,
к. ф.-м. н., доцент

И. Е. Тананко

Заведующий кафедрой
к. ф.-м. н., доцент

И. Е. Тананко

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Теория массового обслуживания является областью прикладной математики, связанной с построением и исследованием математических моделей определенного класса дискретных систем со стохастическим характером функционирования. Назначением принадлежащих к этому классу систем является обслуживание поступающих в системы объектов, называемых требованиями (при этом процессы поступления требований в системы и их обслуживания являются в общем случае случайными). Поэтому системы этого класса называются системами обслуживания. Математические модели систем обслуживания будем называть системами массового обслуживания (СМО). Как и все математические модели, системы массового обслуживания отображают моделируемые системы обслуживания с некоторым уровнем детализации, который определяет адекватность моделей моделируемым системам и точность результатов исследования систем обслуживания с использованием соответствующих математических моделей [1]. Системы массового обслуживания в настоящее время широко используются в качестве математических моделей при решении задач проектирования, исследования и оптимизации информационно-вычислительных систем. Во многих ситуациях для успешного применения полученных результатов необходимо при создании модели учесть возможность выхода прибора из строя. Именно с этим обстоятельством связан значительный интерес к исследованию систем с ненадежными приборами. Работы, посвященные таким системам массового обслуживания, сводятся к исследованию свойств и разработке методов анализа. Примером является исследование ненадежных систем с нестационарными очередями и прерывающимся пуассоновским потоком требований.

Основными характеристиками систем массового обслуживания являются распределения вероятностей их состояний. В задачах, связанных с изучением переходных режимов эволюции систем, одной из целей является определение этих вероятностей как функций времени. Однако основной интерес, как правило, представляют стационарные распределения вероятностей состояний, соответствующие стационарному режиму эволюции систем массового обслуживания [2].

Целью дипломной работы является изучение теории и методов анализа систем массового обслуживания, разработка метода анализа системы массо-

вого обслуживания с несколькими приборами, которые периодически прекращают и восстанавливают обслуживание требований, разработка алгоритма и программы на ЭВМ для анализа системы обслуживания этого класса, а также проведение серии экспериментов с моделью.

Дипломная работа состоит из 8 разделов. В первом разделе был изложен Пуассоновский процесс, а во втором – процесс размножения и гибели. Данные знания необходимы для последующих вычислений стационарных характеристик систем массового обслуживания [3]. В третьем разделе вводится понятие системы массового обслуживания, а также параметры и характеристики систем массового обслуживания. Помимо этого, была рассмотрена формула Литтла, которая имеет большое значение для исследования открытых систем [4]. В четвертом разделе была проанализирована система $M/M/k$ с ожиданием. В пятом разделе полученные результаты используются для разработки метода анализа системы $M/M/k$ с ожиданием и переменным числом приборов. Получено условие существования стационарного режима и коэффициент использования системы. Также получены выражения для определения математических ожиданий: числа требований в системе, числа занятых и свободных приборов, числа требований в очереди, длительности пребывания требований в системе и в очереди. В шестом разделе приводится алгоритм анализа систем массового обслуживания с переменным числом приборов. Он представлен в виде блок-схемы и дает описание каждого блока. Приводятся формулы для нахождения основных характеристик системы. В седьмом разделе приводится назначение и описание программы, дается список идентификаторов в программе и соответствующие им величины в алгоритме метода анализа системы массового обслуживания с переменным числом приборов. Также в данном разделе приводятся результаты экспериментов, приведенных с помощью разработанной программы. В восьмом разделе происходит анализ данной СМО, для этого строятся графики зависимостей стационарных характеристик от входных параметров, оценивается их поведение, также происходит сравнение с графиками, построенными для надежной системы.

Цель бакалаврской работы – произвести исследование систем массового обслуживания с переменным числом приборов.

Поставленная цель определила **следующие задачи**:

1. разработать метод анализа систем массового обслуживания с нена-

дежными приборами;

2. разработать алгоритм анализа систем массового обслуживания с переменным числом приборов;

3. выполнить программную реализацию алгоритма анализа систем массового обслуживания с переменным числом приборов;

4. с помощью разработанной программы исследовать зависимости основных стационарных характеристик систем от изменения некоторых входных параметров, сравнить полученные результаты с результатами, полученными для надежных систем.

Методологические основы исследования систем массового обслуживания с переменным числом приборов представлены в работах В. А. Жожикашвили [2], А.А. Назарова [3], П. П. Бочарова [4], А. Кофмана [8], Ю.И. Митрофанова [9].

Теоретическая и практическая значимость бакалаврской работы.

Теоретический материал, описанный в работе, способствует изучению математического аппарата ненадежных систем массового обслуживания и метода анализа таких систем.

Практическая значимость заключается в возможности дальнейшего использования программного продукта (программы для анализа систем массового обслуживания с переменным числом обслуживающих приборов) для исследования свойств реальных стохастических систем при их проектировании и оптимизации.

Структура и объем работы. Бакалаврская работа состоит из введения, 8 разделов, заключения, списка использованных источников и 1 приложения. Общий объем работы – 105 страниц, из них 44 страницы – основное содержание, включая 15 рисунков и 2 таблицы, 61 страница приложения, список использованных источников информации – 20 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первый раздел «Пуассоновский процесс» посвящён описанию пуассоновского процесса и распределения [5]. Было дано определение пуассоновского процесса, однородной цепи Маркова, пуассоновского распределения, были приведены соответствующие доказательства.

Второй раздел «Процесс размножения и гибели» посвящён описанию процесса размножения и гибели. Рассматривался процесс размножения и гибели $\{\xi(t) : t \geq 0\}$ с непрерывным временем и счетным множеством состояний, т.е. $E = \{0, 1, 2, \dots\}$. Для данного процесса допускаются переходы из состояния только в соседние состояния $n - 1$ и $n + 1$. Обозначим через λ_n и μ_n соответственно интенсивности переходов $n \rightarrow n + 1$ и $n \rightarrow n - 1$. Получена однородная цепь Маркова с непрерывным временем [6]. Время пребывания процесса в состоянии n имеет экспоненциальное распределение с параметром α_n (так как процесс размножения и гибели является минимальной цепью Маркова).

Основываясь на системе дифференциальных уравнений, описывающих динамику рассматриваемого вероятностного процесса, и используя нормирующее условие $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, получим

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}; \quad (1)$$

$$p_n = p_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}, n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Третий раздел «Параметры и характеристики систем обслуживания» посвящен описанию параметров и характеристик систем обслуживания. В данном разделе описаны основные обозначения и характеристики СМО [7]. Также вводятся такие важные соотношения, как:

$$\bar{h} + \bar{g} = \kappa, \quad (3)$$

$$\bar{h} + \bar{b} = \bar{n}, \quad (4)$$

$$\bar{v} + \bar{w} = \bar{u}. \quad (5)$$

Также можно добавить закон сохранения среднего потока требований, согласно которому в стационарной СМО интенсивность выходящего потока равна интенсивности входящего потока [8].

Важную роль для рассмотрения открытых СМО, когда входящие требования независимы от входящих, имеет формула Литтла:

$$\bar{n} = \lambda \bar{u}, \quad (6)$$

или

$$\bar{b} = \lambda \bar{w}. \quad (7)$$

Четвертый раздел «Система $M/M/\kappa$ с ожиданием» посвящен описанию надежной системы массового обслуживания. Обозначим, что в СМО существует κ идентичных приборов обслуживания, которые работают параллельно [9]. Эволюция системы будет представлена процессом размножения и гибели с интенсивностями переходов

$$\lambda_n = \lambda, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

$$\mu_n = \min\{n\mu, \kappa\mu\} = \begin{cases} n\mu, & 0 \leq n \leq \kappa; \\ \kappa\mu, & n \geq \kappa. \end{cases} \quad (9)$$

Коэффициент использования

$$\psi = \frac{\lambda}{\kappa\mu}. \quad (10)$$

Применив (2), выражая p_n через ψ , получим

$$p_n = \begin{cases} p_0 \frac{(\kappa\psi)^n}{n!}, & n \leq \kappa, \\ p_0 \frac{\psi^n \kappa^\kappa}{\kappa!}, & n \geq \kappa. \end{cases} \quad (11)$$

Далее применив (1), можно записать выражение для p_0 :

$$p_0 = \left[\frac{(\kappa\psi)^\kappa}{\kappa!(1-\psi)} + \sum_{n=0}^{\kappa-1} \frac{(\kappa\psi)^n}{n!} \right]^{-1}. \quad (12)$$

Среднее число занятых и свободных приборов будет соответственно равно

$$\bar{h} = \psi\kappa, \quad (13)$$

$$\bar{g} = (1-\psi)\kappa. \quad (14)$$

Среднее число требований, ожидающих в очереди

$$\bar{b} = \sum_{n=\kappa+1}^{\infty} (n - \kappa)p_n. \quad (15)$$

Среднее число требования в системе

$$\bar{n} = \bar{b} + \bar{h}. \quad (16)$$

Используя формулы Литтла (6) и (7), получим

$$\bar{u} = \frac{\bar{n}}{\lambda}, \quad (17)$$

$$\bar{w} = \frac{\bar{b}}{\lambda}. \quad (18)$$

Пятый раздел «Система с переменным числом приборов» содержит подробное описание ненадежной системы массового обслуживания. Обозначим, что в СМО существует κ идентичных приборов обслуживания, которые работают параллельно. Каждый прибор может выходить из строя и восстанавливаться. Пусть m – число работоспособных приборов, $m = 0, 1, \dots, \kappa$. Эволюция системы будет представлена процессом размножения и гибели с интенсивностями переходов (8) и (9).

Вычислим коэффициент использования по выражению (10).

Используя (1) и (2), запишем выражения (12) и (11) для p_0 и p_n .

Математическое ожидание (м.о.) числа требований в СМО с m работоспособными приборами:

$$\bar{q}(m) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \kappa P_{\kappa}(m). \quad (19)$$

М.о. числа требований в СМО с ненадежными приборами:

$$\bar{q} = \sum_{m=0}^{\kappa} \bar{q}(m)P(m). \quad (20)$$

Пусть длительность наработки на отказ i -го прибора системы является экспоненциально распределенной случайной величиной с параметром α_i , $i = 1, \dots, \kappa$. Длительность восстановления i -го прибора также является экспоненциально распределенной случайной величиной с параметром β_i ,

$i = 1, \dots, \kappa$.

$P(m)$ – вероятность того, что в системе работоспособны m приборов, а $n = n_i$ – вектор, где (n_i) признак работоспособности i -го прибора. Если $n_i = 1$, то прибор работоспособен, а если $n_i = 0$, то прибор восстанавливается.

Вероятности того, что прибор исправен и не исправен будут соответственно равны:

$$P(n_i = 1) = \frac{\beta_i}{\alpha_i + \beta_i}, \quad (21)$$

$$P(n_i = 0) = \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i}. \quad (22)$$

Общая вероятность комбинаций равна произведению рабочих и нерабочих приборов:

$$P_n = P(n_1, n_2, \dots, n_k). \quad (23)$$

$P(m)$ – вероятность того, что работает m приборов представляет собой сумму вероятностей комбинаций:

$$P(m) = \sum_{\forall n} P_n, \text{ при } \sum_{i=1}^{\kappa} n_i = m. \quad (24)$$

Коэффициент использования ненадежных приборов:

$$\psi_{ns} = \frac{\lambda}{\mu \sum_{m=0}^{\kappa} m P(m)}. \quad (25)$$

При $\psi_{ns} < 1$ существует стационарный режим функционирования [10]. М.о. числа занятых и свободных приборов будут соответственно равны:

$$\bar{h} = \psi_{ns} \kappa, \quad (26)$$

$$\bar{g} = (1 - \psi_{ns}) \kappa. \quad (27)$$

М.о. числа требований, ожидающих в очереди:

$$\bar{b} = \sum_{n=\kappa+1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\kappa} (n - m P(m)) p_n. \quad (28)$$

М.о. числа требований в системе:

$$\bar{q} = \bar{b} + \bar{h}. \quad (29)$$

Используя формулы Литтла (6) и (7), получим:

$$\bar{u} = \frac{\bar{q}}{\lambda}, \quad (30)$$

$$\bar{w} = \frac{\bar{b}}{\lambda}. \quad (31)$$

Коэффициенты загрузки и простоя обслуживающих приборов будут соответственно равны:

$$k_h = \frac{\bar{h}}{\kappa}, \quad (32)$$

$$k_g = \frac{\bar{g}}{\kappa}. \quad (33)$$

Шестой раздел «Алгоритм анализа системы массового обслуживания с переменным числом приборов» содержит подробное описание алгоритма анализа системы массового обслуживания с ненадёжными приборами. Алгоритм состоит из трех последовательно выполняемых блоков, их основными составляющими являются:

1. Ввод данных:

κ – количество приборов в системе;

λ – интенсивность входящего потока требований;

μ – интенсивность обслуживания требований одним прибором;

α – вектор интенсивностей наработки на отказ приборов;

β – вектор интенсивностей восстановления приборов.

2. Вычисление основных характеристик:

Вычисление коэффициента использования надежной системы по выражению (10);

Вычисление вероятности пребывания в надежной системе 0 и n требований по выражениям (12) и (11) соответственно;

Вычисление м.о. числа требований в СМО с t работоспособными приборами по выражению (19);

Вычисление общей вероятности комбинаций по выражению (23);

Вычисление вероятности того, что работает m приборов по выражению (24);

Вычисление коэффициента использования ненадежных приборов по выражению (25);

Вычисление м.о. числа занятых и свободных ненадежных приборов по выражениям (26) и (27) соответственно;

Вычисление м.о. числа требований, ожидающих в очереди, и находящихся в ненадежной системе по выражениям (28) и (29) соответственно;

Вычисление м.о. длительности пребывания требований в ненадежной системе и длительности нахождения в очереди по выражениям (30) и (31);

Вычисление коэффициента загрузки и простоя обслуживающих приборов по выражениям (32) и (33) соответственно;

3. Вывод результатов.

Седьмой раздел «Назначение и описание программы» содержит подробное описание разработанной программы: описание интерфейса программы, описание идентификаторов, структуры, входных и выходных данных.

Программа реализована на языке программирования Python с применением технологии PyQt5. Программа предназначена для вычисления стационарных характеристик ненадежных СМО, построения графиков зависимостей данных характеристик от входных параметров. Также реализована возможность вычисления стационарных характеристик для надежных систем.

Разработанная программа состоит из четырех скриптов, один из которых отвечает за работу приложения, а оставшиеся за графическое отображение пользовательского интерфейса.

`main.py` — py-файл, описывающий логику работы приложения. Он является основным, осуществляет сбор входных данных, проверку их на корректность, вычисление стационарных характеристик систем и построение графиков зависимостей.

`mainUI.py`, `graphUI.py`, `reliable_sysUI.py` — py-файлы, в которых описывается графическое представление пользовательского интерфейса.

Восьмой раздел «Анализ системы обслуживания с переменным числом приборов» посвящен исследованию зависимостей основных стационарных характеристик системы от изменения некоторых входных па-

раметров.

Был проведен ряд экспериментов, построены графики зависимостей для ненадежной системы. Также были построены графики зависимостей для надежной системы. Проведен анализ их поведения, происходило сравнение результатов, полученных для ненадежной системы, с результатами для надежной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Системы массового обслуживания с переменным числом приборов используются в качестве математических моделей дискретных стохастических систем с ненадежными элементами.

В данной работе был рассмотрен Пуассоновский процесс, а также процесс гибели и размножения. Был разработан метод анализа системы обслуживания $M/M/k$ с ожиданием и переменным числом приборов. С помощью данного метода получили: стационарные распределения вероятностей пребывания требований в системе, вероятности отказа и восстановления приборов, математическое ожидание числа свободных приборов, математическое ожидание числа занятых приборов, математическое ожидание количества требований в очереди системы, математическое ожидание количества требований в системе, математическое ожидание длительности пребывания требований в системе, математическое ожидание длительности нахождения требований в очереди, коэффициент загрузки приборов, коэффициент простоя приборов. Полученные данные сравнили со значениями для надежной системы, провели сравнительный анализ графиков зависимостей.

В ходе дипломной работы был разработан алгоритм описанного метода анализа систем массового обслуживания с переменным числом приборов; была составлена блок-схема данного алгоритма, подробно описаны все входящие в нее блоки. По этому алгоритму была разработана программа для анализа систем массового обслуживания с переменным числом приборов.

Результаты исследования СМО с переменным числом приборов могут быть применены для анализа производственных, транспортных, информационных систем, систем передачи информации и других систем с образованием очередей и с учетом надежности составляющих эти системы элементов.

Основные источники информации:

- 1 Башарин, Г. П. Анализ очередей в вычислительных сетях. Теория и методы расчета. / Г. П. Башарин, П. П. Бочаров, Я. А. Коган. – М. : Наука, ГРФМЛ, 1989. - 336 с.
- 2 Жожикашвили, В. А. Сети массового обслуживания. Теория и применение к сетям ЭВМ. / В. А. Жожикашвили, В. М. Вишенвский. – М. : Радио и связь, 1988. - 192 с.
- 3 Назаров, А. А. Теория массового обслуживания: учеб. пособие. / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. – Т. : Изд-во НТЛ, 2004. - 228 с.
- 4 Бочаров, П. П. Теория массового обслуживания. / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. – М. : Изд-во РУДН, 1995. - 529 с.
- 5 Риордан, Дж. Вероятностные системы обслуживания. / Дж. Риордан. Пер. с англ. – М. : Связь, 1966. - 183 с.
- 6 Саати, Т. Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. / Т. Л. Саати. Пер. с англ. – М. : Изд-во «Советское радио», 1965. - 510 с.
- 7 Кемени, Д. Д. Конечные цепи Маркова. / Д. Д. Кемени, Д. Л. Снелл. Пер. с англ. – М. : Наука, 1970. - 281 с.
- 8 Кофман, А. Массовое обслуживание. Теория и приложения. / А. Кофман, Р. Крюон. Пер. с фран. – М. : Мир, 1965. - 303 с.
- 9 Митрофанов, Ю. И. Анализ сетей массового обслуживания: Учеб. Пособие для студентов университетов. / Ю. И. Митрофанов. – С. : Научная книга, 2004. - 175 с.
- 10 Новиков, О. А. Прикладные вопросы теории массового обслуживания. / О. А. Новиков, С. И. Петухов. – М. : Изд-во «Советское радио», 1969. - 400 с.