МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математики и методики ее преподавания

# Иррациональные уравнения и неравенства в школьном курсе математики

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 461 группы

направления 44.03.01 Педагогическое образование (профиль – математическое образование) механико-математического факультета

**Пестряковой Любови Павловны**

Научный руководитель
доцент, к.п.н. __________________________ О.М. Кулибаба

Зав. кафедрой
к.п.н., доцент __________________________ И.К. Кондаурова

Саратов 2020

**Введение.** Одной из сложных тем алгебры, изучаемых в школьной курсе математики, является тема «Иррациональные уравнения и неравенства». Знакомство учащихся с данной темой в некоторых учебниках с углубленным изучением математики происходит еще в 8 классе. Однако подавляющее большинство учебных пособий не предусматривает изучение иррациональных уравнений и неравенств до 10 класса. Иррациональные уравнения и неравенства являются неотъемлемой частью школьного курса алгебры и содержатся в заданиях повышенной и высокой сложности ЕГЭ по математике, но на рассмотрение более сложных типов иррациональных уравнений и неравенств и овладение основными методами их решения отводится недостаточно времени для полноценного освоения данной темы. Поэтому актуальность проблемы обучения школьников решению иррациональных уравнений и неравенств обусловлена сложившимся в настоящее время противоречием между необходимостью обучения учащихся решению иррациональных уравнений и неравенств как неотъемлемой части заданий профильного уровня ЕГЭ по математике и фактическим состоянием методики обучения их решению, связанной с изменением структуры и содержания современных школьных учебников математики.

Изучением иррациональных уравнений и неравенств, их роли в обучении занимаются А. М. Самуйлова, А. А. Валиева, Т. Ю. Паршина, Г. Е. Нархова и многие другие. Так как на освоение темы отводится недостаточно времени, а иррациональные уравнения и неравенства встречаются в заданиях выпускных экзаменов, то изучение и обобщение материалов по этой теме и выявление методических особенностей ее изучения очень актуально.

Цель работы: выявить методические особенности обучения решению иррациональных уравнений и неравенств в школьном курсе математики.

Для достижения данной цели были поставлены и решены следующие задачи:

1) обобщить теоретический материал по теме «Иррациональные уравнения и неравенства»;

2) провести сравнительный логико-дидактический анализ изложения темы «Иррациональные уравнения и неравенства» в учебниках по алгебре и началам анализа различных авторов;

3) проанализировать иррациональные уравнения и неравенства в материалах ЕГЭ;

4) выявить трудности, с которыми сталкиваются учащиеся при решении иррациональных уравнений и неравенств, и предложить пути их преодоления.

Методы исследования: анализ научно-методической и учебно-методической, научно-популярной литературы, школьных учебников курса алгебры; теоретический анализ и обобщение педагогического опыта.

Структура работы: титульный лист; введение; два раздела; заключение; список использованных источников.

**Основное содержание работы.** В первом разделе «Теоретические аспекты решения иррациональных уравнений и неравенств» решалась первая задача бакалаврской работы.

Иррациональным уравнением называют уравнение, в котором неизвестное или рациональная функция от неизвестного содержатся под знаком радикала.

Выделены следующие виды иррациональных уравнений:

- $\sqrt[n]{f(x)} = a, n \in \mathbb{N}$;
- $\sqrt[n]{f(x)} = g(x), n \in \mathbb{N}$;
- $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}, n \in \mathbb{N}$;
- $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[m]{g(x)}, n, m \in \mathbb{N}$;
- $\sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[n]{g(x)} = h(x), n, m \in \mathbb{N}$;
- $\sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[m]{g(x)} = h(x), n, m \in \mathbb{N}$.

Выделены основные методы решения иррациональных уравнений являются: метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же натуральную степень; метод введения новых переменных; метод выделения полного квадрата; функционально-графический метод.

А также отмечены некоторые приемы, используемые при решении иррациональных уравнений: разложение на множители выражений, входящих в уравнение; умножение на сопряженное выражение.

*Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же натуральную степень* позволяет с помощью соответствующего преобразования получить более простое уравнение, которое не имеет в записи радикалов, и через его решение получить решение исходного иррационального уравнения. Заметим, что при возведении уравнения в четную степень могут появляться посторонние корни, поэтому всегда при использовании данного метода необходимо проводить проверку найденных корней.

**Пример 1.** Решить уравнение $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+13}=7$.

*Решение*. Возведем обе части уравнения во вторую степень:

$(x-2)+2\sqrt{(x-2)(2x+13)}+(2x+13)=49$ или

$$2\sqrt{(x-2)(2x+13)}=38-3x. \qquad (1)$$

Вновь возведем обе части уравнения (1) во вторую степень:

$4(2x^2+9x-26)=1444-228x+9x^2$ или

$x^2-264x+1548=0$, откуда находим $x_1=6$, $x_2=258$.

*Проверка*. $x_1=6$, $\sqrt{6-2}+\sqrt{2\cdot 6+13}=2+5=7$.

Значит, $x_1=6$ – корень уравнения;

$x_2=258$, $\sqrt{258-2}+\sqrt{2\cdot 258+13}=16+23=39\neq 7$, т.е. $x_2=258$ – посторонний корень.

*Ответ:* $x=6$.

Если в иррациональном уравнении не раз встречается одно и то же выражение, зависящее от переменной, то используется *метод введения новых переменных*. Повторяющееся выражение обозначается за переменную, в результате чего исходное иррациональное уравнение можно упростить, решить относительно новой переменной и только потом найти исходную переменную.

**Пример 2.** Решить уравнение $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$.

*Решение*. При возведении обеих частей уравнения во вторую степень мы получили бы довольно громоздкое уравнение, решить которое было бы весьма затруднительно. Запишем данное уравнение в виде

$3(x^2+5x+1)+2\sqrt{x^2+5x+1}=5$ и обозначим $\sqrt{x^2+5x+1}=y$, где $y \geq 0$.

Получим уравнение $3y^2+2y-5=0$, корнями которого будут $y_1=1$; $y_2=-\frac{5}{3}$.

Так как $y \geq 0$, то $y_2$ не подходит.

Если $y=1$, то $\sqrt{x^2+5x+1}=1$, $x^2+5x=0$, $x(x+5)=0$, откуда $x_1=0, x_2=-5$.

Оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

*Ответ:* $x_1=0, x_2=-5$.

Также встречаются иррациональные уравнения, которые можно решить *методом выделения полного квадрата,* основываясь на свойстве арифметического корня: для любого действительного числа $a$ верно равенство $\sqrt{a^2}=|a|$.

**Пример 3.** Решить уравнение:

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

*Решение.* Выделим полный квадрат в выражениях, стоящих под корнем:

$x+3-4\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1}-2)^2$; $x+8-6\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1}-3)^2$.

Исходное уравнение примет вид:

$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2}=1$ или

$\left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|=1$, где $\sqrt{x-1}\geq 0, x \geq 1$. (2)

Выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль в точках $x=5$ и $x=10$.

Уравнение (2) равносильно совокупности смешанных систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1 \le x \le 5,\\ -\sqrt{x-1}+2-\sqrt{x-1}+3=1;\end{cases}\\ \begin{cases}5 < x \le 10,\\ \sqrt{x-1}-2-\sqrt{x-1}+3=1;\end{cases}\\ \begin{cases}x > 10,\\ \sqrt{x-1}-2+\sqrt{x-1}-3=1,\end{cases}\end{array}\right.$$

решением которой является множество $5 \le x \le 10$.

Так как все преобразования, выполненные в процессе решения иррационального уравнения, были равносильными, то множество $5 \le x \le 10$ является решением исходного уравнения.

*Ответ:* $5 \le x \le 10$.

Некоторые иррациональные уравнения можно решить *функционально-графическим методом,* основными направлениями которого являются использование графиков функций и свойств функций, входящих в уравнение (монотонность, ограниченность, ОДЗ).

**Пример 4.** Решить уравнение $\sqrt{15x+4}+\sqrt[4]{x+13}=9$.

*Решение.* ООУ: $\begin{cases}15x+4 \ge 0,\\ x+13 \ge 0;\end{cases} \Leftrightarrow x \ge -\frac{4}{15}$.

На ООУ функции $f(x)=\sqrt{15x+4}$ и $g(x)=\sqrt[4]{x+13}$ возрастают, следовательно, функция $h(x)=\sqrt{15x+4}+\sqrt[4]{x+13}$ будет возрастающей. Тогда данное уравнение будет иметь не более одного корня и легко заметить, что это $x=3$.

*Ответ:* $x=3$.

Иногда целесообразно упростить иррациональное уравнение, воспользовавшись приемом *разложения на множители выражений, входящих в уравнение* (вынесение общего множителя, применение формул сокращенного умножения, группировка и т.д.).

**Пример 5.** Решить уравнение $x=2\sqrt{x-3}+\sqrt[4]{x^3-3x^2}$.

*Решение.* Запишем данное уравнение в виде

$x-\sqrt{x-3}=\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x-3}+\sqrt{x-3}$ или

$$x-\sqrt{x-3}=\sqrt[4]{x-3}(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x-3}). \qquad (3)$$

Левую часть (3) разложим на множители, применяя формулу сокращенного умножения $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$x - \sqrt{x-3} = (\sqrt{x} - \sqrt[4]{x-3})(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x-3})$, тогда уравнение (3) примет вид

$$\left(\sqrt{x} - \sqrt[4]{x-3}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x-3}\right) = \sqrt[4]{x-3}(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x-3}). \qquad (4)$$

Так как $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x-3} > 0$, то из (4) получим

$\sqrt{x} - \sqrt[4]{x-3} = \sqrt[4]{x-3}$ или $\sqrt{x} = 2\sqrt[4]{x-3}$.

$\begin{cases} x^2 = 16(x-3), \\ x \geq 3; \end{cases}$ $x^2 - 16x + 48 = 0$, откуда $x_1 = 4$, $x_2 = 12$.

Оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

*Ответ:* $x_1 = 4$, $x_2 = 12$.

В некоторых случаях можно использовать *прием умножения на сопряженное выражение*, который основывается на том, что произведение сопряженных выражений, будучи разностью квадратов, не содержит радикала, за счет чего решение уравнения упрощается.

**Пример 6.** Решить уравнение $\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2} = 2$.

*Решение.* Умножим обе части заданного уравнения на выражение $\varphi(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$, сопряженное выражению $\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2}$:

$$\left(\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2}\right)\left(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}\right) =$$

$= 2\left(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}\right)$ или

$1 + x + x^2 - (1 - x + x^2) = 2\left(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}\right)$, или

$$\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2} = x. \qquad (5)$$

Уравнение (5) вместе с данным решаем как систему:

$$\begin{cases} \sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2} = 2, \\ \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2} = x. \end{cases}$$

Складывая левые и правые части уравнений полученной системы, имеем $2\sqrt{1+x+x^2} = 2 + x$ или $4(1+x+x^2) = 4 + 4x + x^2$, $4x^2 - x^2 = 0$, $3x^2 = 0$, $x^2 = 0$, откуда $x = 0$.

Нетрудно проверить, что $x = 0$ – корень исходного уравнения.

*Ответ:* $x = 0$.

Иррациональными неравенствами называются неравенства, в которых неизвестное или рациональная функция от неизвестного содержатся под знаками радикалов.

Как правило, выделяют следующие виды иррациональных неравенств:

- $\sqrt[n]{f(x)} > a$ $(\sqrt[n]{f(x)} \geq a)$, $n \in \mathbb{N}$;
- $\sqrt[n]{f(x)} < a$ $(\sqrt[n]{f(x)} \leq a)$, $n \in \mathbb{N}$;
- $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$ $(\sqrt[n]{f(x)} \leq g(x))$, $n \in \mathbb{N}$;
- $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$ $(\sqrt[n]{f(x)} \geq g(x))$, $n \in \mathbb{N}$;
- $\sqrt[n]{f(x)} > \sqrt[n]{g(x)}$ $(\sqrt[n]{f(x)} \geq \sqrt[n]{g(x)})$, $n \in \mathbb{N}$;
- $\sqrt[n]{f(x)} < \sqrt[n]{g(x)}$ $(\sqrt[n]{f(x)} \leq \sqrt[n]{g(x)})$, $n \in \mathbb{N}$;
- $\sqrt[n]{f(x)} > \sqrt[m]{g(x)}$ $(\sqrt[n]{f(x)} \geq \sqrt[m]{g(x)})$, $n, m \in \mathbb{N}$;
- $\sqrt[n]{f(x)} < \sqrt[m]{g(x)}$ $(\sqrt[n]{f(x)} \leq \sqrt[m]{g(x)})$, $n, m \in \mathbb{N}$.

При решении иррациональных неравенств используются те же методы и приемы, что и при решении иррациональных уравнений. Но следует учитывать, что если при решении иррациональных уравнений можно проверить найденные корни, то при решении иррациональных неравенств проверка подстановкой, как правило, невозможна, так как обычно решением неравенства является бесконечное множество.

Осуществлять решение можно, придерживаясь следующего плана:

1) найти область определения заданного неравенства;

2) руководствуясь предложениями о равносильности неравенства, решить заданное неравенство;

3) из найденных решений отобрать значения переменной, принадлежащие области определения заданного неравенства.

**Пример 7.** Решить неравенство $\sqrt{x^2 - x - 6} > x$.

*Решение.* Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x < 0, \\ x^2 - x - 6 \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - x - 6 \geq 0, \\ x^2 - x - 6 > x^2. \end{cases}\end{array}\right.$

Решая первую систему $\begin{cases} x < 0, \\ x^2 - x - 6 \geq 0, \end{cases}$ имеем $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. Следовательно, $x \leq -2$.

При решении системы

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - x - 6 \geq 0, \\ x^2 - x - 6 > x^2, \end{cases}$$

надо учесть, что первое неравенство является следствием третьего неравенства, тогда вторая система равносильна системе

$\begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - x - 6 > x^2, \end{cases}$ или $\begin{cases} x \geq 0, \\ x < -6, \end{cases}$ которая не имеет решений.

Следовательно, решение первой системы будет и решением исходного неравенства.

*Ответ:* $x \leq -2$.

Во втором разделе «Методические аспекты решения иррациональных уравнений и неравенств» решались вторая, третья и четвертая задачи бакалаврской работы.

В ходе анализа учебной и методической литературы было выявлено, что пропедевтика изучения иррациональных уравнений и неравенств начинается в 8 классе с понятия квадратного корня. Вводится определение квадратного корня, которое сопровождается задачей, где, зная значение площади квадрата, необходимо найти длину его стороны. Далее, после определения квадратного корня вводится понятие арифметического квадратного корня и его свойства. В примерах к параграфам приводятся простейшие иррациональные уравнения, например, $\sqrt{x} = 5$ или $\sqrt{3x - 3} = -7$, которые решаются с использованием определения и единственности арифметического квадратного корня из неотрицательного числа.

Помимо всего вводится понятие иррационального числа; рассматривается график функции $y = \sqrt{x}$, а также приёмы работы с выражениями, содержащими арифметические квадратные корни: вынесение/внесение множителя за/под знак корня, использование формул сокращенного умножения в выражениях, содержащих радикалы, освобождение от иррациональности в знаменателе.

В учебниках 9 класса вводится понятия корня степени $n$, арифметического корня степени $n$ и рассматриваются свойства корня степени $n$.

Проведен сравнительный логико-дидактический анализ изложения темы «Иррациональные уравнения и неравенства» в учебниках по алгебре и началам анализа различных авторов для 10-11 классов, который позволил сделать следующие выводы:

1) в некоторых учебниках теоретический материал, связанный с иррациональными уравнениями и неравенствами, отсутствует, хотя практические упражнения могут встречаться;

2) в большинстве учебников рассматриваются простейшие иррациональные уравнения и неравенства, которые, как правило, решаются с помощью двух методов: возведения обеих частей уравнения (неравенства) в одну и ту же натуральную степень и метода введения новых переменных;

3) наиболее подробно теоретический материал по решению иррациональных уравнений и неравенств рассматривается в учебниках А. Г. Мордковича, П. В. Семенова и М. Я. Пратусевича, К. М. Столбова, это касается и задачного материала, его достаточно для отработки умений по решению задач с использованием разных методов и приемов решения.

Проанализированы иррациональные уравнения и неравенства, встречающиеся в материалах ЕГЭ.

Умение решать уравнения и неравенства проверяются в заданиях №5, №13, №15 и №18 профильного уровня ЕГЭ по математике. Задание №5 относится к базовому уровню сложности и подразумевает краткий числовой ответ; задания

№13, №15 и №19 относятся к повышенному и высокому уровням сложности, подразумевают развернутый ответ. В них могут встречаться и иррациональные уравнения и неравенства.

Иррациональные уравнения и неравенства, которые встречаются в заданиях ЕГЭ, относятся к повышенному уровню сложности и требуют от учащихся глубоких знаний особенностей и специфики различных методов их решения.

**Пример 8.** а) Решите уравнение $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}=2$;

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[1;2]$.

*Решение.* а) Обратим внимание на подкоренные выражения радикалов, стоящих в левой части уравнения. Мы можем выделить полный квадрат. Получим

$\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x+1)^2}=2$ или

$$|x-1|+|x+1|=2. \qquad (7)$$

Выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль в точках $x=1$ и $x=-1$.

Уравнение (7) равносильно совокупности смешанных систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\le -1, \\ -(x-1)-(x+1)=2; \end{cases}\\ \begin{cases} -1<x\le 1, \\ -(x-1)+(x+1)=2; \end{cases}\\ \begin{cases} x>1, \\ (x-1)+(x+1)=2, \end{cases}\end{array}\right.$$

решением которой является множество $-1\le x\le 1$.

Так как все преобразования, выполненные в процессе решения иррационального уравнения, были равносильными, то множество $-1\le x\le 1$ является решением исходного уравнения.

б) Промежутку $[1;2]$ будет принадлежать только $x=1$.

*Ответ:* а) $-1\le x\le 1$; б) $x=1$.

Часто при решении иррациональных уравнений и неравенств учащиеся сталкиваются с трудностями. Основными причинами, вызывающими трудности у учащихся являются: выбор метода решения; неоднократное возведение в степень обеих частей уравнения или неравенства может привести к алгебраическому уравнению или неравенству высокой степени, возможно не имеющему рациональных корней и решений; возможность появления посторонних корней или решений. Поэтому при обучении решению иррациональных уравнений и неравенств необходимо учитывать их специфику.

Успешный выбор метода решения зависит от знания особенностей применения этих методов. Очевидно, что для решения иррациональных уравнений и неравенств важно понимать суть (идею) метода; объективную составляющую (теорию); знать действия, составляющие метод (его компоненты); владеть каждым из этих компонентов; уметь «видеть» какие из компонентов могут быть использованы при решении конкретной задачи и определить последовательность их применения; уметь выбирать комбинацию специальных (математических) методов для решения задачи. С последним связано и преодоление второй причины – возникновению уравнения (неравенства) высокой степени.

В работе предложены рекомендации по преодолению выделенных причин.

*Рекомендация 1.* Сравните степени радикалов, содержащих переменную в уравнении (неравенстве). Если они одинаковы, то сосчитайте число радикалов. Если их не больше трёх, то может оказаться полезным прием уединения радикала с последующим возведением в степень. Оставьте в одной из частей уравнения (неравенства) только один радикал и сделайте возведение обеих частей уравнения в степень, равную степени радикала. При возведении в четную степень неравенства, следует помнить, что для того, чтобы получилось равносильное исходному неравенство, нужно, чтобы обе части неравенства были неотрицательными.

*Рекомендация 2.* При наличии под радикалом многочлена второй степени (и выше) может быть полезно умножение обеих частей уравнения (неравенства) на сопряженное выражение.

*Рекомендация 3.* При повторяющемся в иррациональном уравнении (неравенстве) выражении с переменной поможет метод введения новых переменных.

*Рекомендация 4.* Если в уравнении (неравенстве) встречаются радикалы разных степеней, возможно введение нескольких переменных.

*Рекомендация 5.* Если уравнение (неравенство) содержит сложные радикалы, то может быть полезно выделение полного квадрата.

**Заключение.** Основные результаты бакалаврской работы.

1. Обобщен теоретический материал по теме «Иррациональные уравнения и неравенства».

2. Проведен сравнительный логико-дидактический анализ изложения темы «Иррациональные уравнения и неравенства» в учебниках по алгебре и началам анализа различных авторов.

3. Проанализированы иррациональные уравнения и неравенства в материалах ЕГЭ.

4. Выявлены трудности, с которыми сталкиваются учащиеся при решении иррациональных уравнений и неравенств, и предложены пути их преодоления.

Результаты бакалаврской работы могут быть полезны учителям, работающим в 10-11 классах общеобразовательных школ, лицеев, гимназий.