

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математики и методики ее преподавания

Задачи с параметрами в курсе алгебры 8-9 классов
АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 461 группы
направления 44.03.01 – «Педагогическое образование (профиль –
математическое образование)» механико-математического факультета

Дорофеевой Екатерины Павловны

Научный руководитель
доцент, к.п.н., доцент

Т. А. Капитонова

Зав. кафедрой
к.п.н., доцент

И.К. Кондаурова

Саратов 2020

Введение. Задачи с параметрами являются одними из наиболее трудных задач современного курса алгебры 9 класса. При этом они являются важной составляющей ОГЭ и ЕГЭ, позволяющей оценить уровень математической подготовки выпускников, поскольку задачи не имеют алгоритма и требуют помимо хороших знаний предмета достаточно высокого уровня развития аналитического мышления.

В соответствии с основной образовательной программой основного общего образования (ООП ООО) по математике учащиеся 7-9 класса должны: «решать линейные уравнения и неравенства с параметрами; решать несложные квадратные уравнения с параметром; решать несложные системы линейных уравнений с параметрами; использовать теорему Виета и теорему, обратную теореме Виета, для поиска корней квадратного трехчлена и для решения задач, в том числе задач с параметрами на основе квадратного трехчлена; решать алгебраические уравнения и неравенства и их системы с параметрами алгебраическим и графическим методами; составлять и решать уравнения и неравенства с параметрами при решении задач других учебных предметов; анализировать свойства функций и вид графика в зависимости от параметров».

Задачи с параметрами всегда были в школьных учебниках математики, но в большинстве учебников таким задачам уделяется недостаточно внимания, в результате многие учащиеся не способны справиться с подобными задачами, или проводят громоздкие выкладки при их решении. В последнее время в некоторых школьных учебниках задачам с параметрами уделяется должное внимание.

Проблемам обучения решению задач с параметрами в школьном курсе математики посвящены исследования методистов-математиков В.Н. Дятлов, Ю.А. Дмитриева, Я. С. Гриншпон, А. Г. Подстригич, В. В. Мирошин и др.

В последнее время популярность к задачам с параметрами возросла, но, несмотря на это, результаты ГИА 2019 года показывают, что на ОГЭ задачу с параметрами решили 6,7 %, на ЕГЭ – 4,2 %.

Все вышесказанное обуславливает актуальность темы исследования.

Цель работы – теоретически описать, практически разработать и экспериментально апробировать систему задач по обучению учащихся 8-9 классов решению квадратных уравнений и неравенств с параметрами с использованием приема обращения математических задач.

Задачи исследования:

1. Определить основные понятия по теме «Задачи с параметрами», провести классификацию задач с параметрами;
2. Описать основные задачные конструкции и их роль в обучении математике;
3. Определить место задач с параметрами в школьных учебниках «Алгебра» 8-9 классов;
4. Разработать систему задач по теме «Квадратные уравнения и неравенства с параметрами»;
5. Сформулировать методические рекомендации по использованию разработанной системы задач с использованием приема обращения математических задач;
6. Экспериментально проверить разработанные методические материалы.

Методы работы: анализ учебной и методико-математической литературы; изучение нормативных документов; разработка и апробация методических материалов.

Структура работы: титульный лист, введение, две главы («Задачи с параметрами и задачные конструкции: основные понятия», «Методические рекомендации при обучении решению задач с параметрами»), заключение, список использованных источников, приложение.

Основное содержание работы. В первой главе «Задачи с параметрами и задачные конструкции: основные понятия» решались первые две задачи бакалаврской работы.

Под задачей с параметрами будем понимать задачу, условие которой содержит или в ходе решения которой появляется хотя бы одна независимая переменная величина (называемая параметром), «управляющая» решением задачи.

Если задача с параметрами имеет независимые переменные величины (параметры) в условии, то будем называть её явной задачей с параметрами.

Решение таких задач отнесено к школьному курсу алгебры (модули: линейная функция и линейные уравнения, квадратичная функция и квадратные уравнения).

Если в задаче независимая переменная величина (параметр), появляется в процессе решения задачи, то задачу будем называть неявной задачей с параметром.

Решение таких задач отнесено: к пропедевтическому курсу математики (модули: буквенные выражения, натуральные числа и действия с ними, делимость чисел, дроби и действия с ними, отношения и проценты и пр.); к курсу алгебры (модуль: решение тригонометрических уравнений и неравенств); к систематическому курсу геометрии (задачи на доказательство и вычисление); к курсу математического анализа (задачи, связанные с исследованием функции).

Введён ряд определений, расширяющих терминологическое поле исследования:

Допустимым значением параметра будем называть такое его значение, при котором, область определения данной задачи есть непустое множество.

Областью определения задачи относительно переменной x и параметра a назовем области допустимых значений переменной x и параметра a .

Решить задачу с параметрами – это значит, установив множество допустимых значений параметра, решить каждую частную задачу, получающуюся при каждом из таких значений параметра.

Соответствие $x = x(a)$ называется общим решением уравнения $f(x, a) = 0$ с параметром a переменной x на множестве допустимых значений параметра, если для каждого $a = a$ из множества допустимых значений параметра, любое

значение $x = x(\alpha)$ является решением соответствующего частного уравнения $f(x, \alpha) = 0$.

Изучению задачных конструкций посвящены многочисленные работы М. И. Зайкина. На основе его работ приведены следующие положения.

Задачная конструкция – некоторая совокупность задач удовлетворяющая определенным требованиям.

Выделяют следующие виды задачных конструкций: серии, вариации, окрестности обращенных задач, циклы и цепочки.

Серия математических задач – «упорядоченная совокупность задач, формулировки которых имеют схожесть текстового, сюжетного, графического представления либо математическую идентичность заданных в условии отношений»

Вариация математических задач – «некая их совокупность, получается с помощью варьирования некоторой исходной задачи, что и обуславливает специфическое название этой задачной конструкции.

Обращение математической задачи – «последовательное изменение её путём извлечения из её условия части или даже всех данных и включения их в требование; при этом из него, соответственно, исключаются несколько или все найденные искомые и переводятся в условие».

Цепочка задач – это отдельная разновидность задачных конструкций, суть которой в том, что в сюжетной составляющей условия (или в фабуле задачи) каждой из задач данной цепочки имеет место некоторая общность, но решение каждой задачи реализуется с помощью различного математического аппарата

Система задач – совокупность задач, подобранная в соответствии с поставленной целью, которая действует как единое целое и приводит к заранее намеченному результату.

Отдельно выделены понятия «обращение математической задачи», «обращенная математическая задача», «обратная математическая задача» и «окрестность обращенных математических задач».

Обращенная задача – задача, «в которой по сравнению с исходной задачей при сохранении сюжета искомое или несколько искомого входят в состав её условия, а один или несколько элементов условия становятся искомыми».

Задача, «в которой все условия прямой задачи стали её требованием и наоборот, всё требование стало её условием, будем называть обратной по отношению к исходной».

Составление новых задач, в том числе обращение математических задач развивает творческий потенциал и гибкость мышления учащихся, поэтому обращение задач является важным и перспективным направлением методической работы, позволяющим существенно усиливать развивающую значимость технологии обучения школьников математике. Процесс построения подобных окрестностей обращённых математических задач несет в себе черты исследовательской деятельности, которая может являться частью проектных заданий школьников.

Несмотря на возможности обращения задач, в частности задач с параметрами, в процессе обучения математики им уделяется недостаточно внимания. Овладение методикой обращения задач повышает математическую культуру учащихся, самостоятельное составление и решение задач позволяет получить прочные знания в данной теме.

Во второй главе «Методические рекомендации при обучении решению задач с параметрами» решались оставшиеся задачи бакалаврской работы.

Чтобы определить место задач с параметрами в школьных учебниках «Алгебра» 8-9 классов, проведен анализ содержания учебников из федерального перечня учебников, рекомендованных к использованию при реализации программ общего образования на 2019-2020 уч. г.

Анализ проводился по следующим критериям:

- 1) наличие/отсутствие задач с параметрами, с указанием тем, содержащих эти задачи;
- 2) наличие/отсутствие определения параметра и задач с параметрами;

- 3) наличие/отсутствие методов решения задач с параметрами;
- 4) наличие/отсутствие отдельных тем (глав, пунктов и т. д.), содержащих задачи с параметрами.

Результаты анализа представлены следующими выводами:

1 Задачи с параметрами присутствуют во всех рассмотренных учебниках, различно только их количество. В некоторых учебниках задачи с параметрами вводятся «для тех, кто хочет знать больше».

2 В рассмотренных учебниках «Алгебра» 8-9 классов большая часть всех задач с параметром составляют задачи с параметром по темам «Квадратные уравнения», «Квадратные неравенства», «Квадратичная функция и ее свойства».

3 В учебниках для углубленного изучения математики данные темы рассматриваются в полном объеме: вводятся необходимые определения и рассматриваются методы решения задач с параметрами.

4 Определение понятия «параметр», «задача с параметрами» авторы многих учебников не вводят.

5 Методы решения задач с параметрами рассмотрены также в некоторых учебниках. Они представляют собой примеры решения задач с параметрами алгебраическим методом/М.

По нашему мнению, наиболее приемлемым является учебник авторского коллектива Ю. Н. Макарычев и др., обучение по данному учебнику позволяет учащимся освоить тему «Задачи с параметрами» в достаточно полной мере.

Одной из важнейших моделей обучения является проблемное обучение, оно основано на относительно самостоятельной поисковой деятельности обучающихся. Применительно к решению задач с параметрами ее можно реализовать, если представить учебный материал в виде серии задач. При решении этой серии перед учащимися будут возникать проблемные ситуации, решая которые самостоятельно или с помощью учителя, учащиеся освоят тему «Задачи с параметрами».

Так как в курсе алгебры 8-9 классов рассматриваются в основном квадратные уравнения и неравенства с параметрами, то из всего многообразия задач с параметрами остановимся на теме «Квадратные уравнения и неравенства с параметрами»

Для освоения данной темы нами разработана система задач, которая позволяет проектировать содержание конкретных уроков.

Одним из методических приемов обучения решению задач с параметрами является обращение математических задач. Продемонстрируем данный методический прием на серии уроков. Представлены фрагменты уроков, т.к. данная работа на каждом уроке занимает около 15 минут.

Урок 1.

На данном уроке целесообразно провести контроль имеющихся знаний по теме «Квадратные уравнения» для проектирования дальнейшего маршрута изучения темы и дальнейшего отслеживания результатов освоения темы.

Проверяются следующие *знания*: вида квадратного уравнения; формул нахождения дискриминанта и корней квадратного уравнения; числа корней квадратного уравнения в зависимости от значений дискриминанта; *умения*: определять количество корней квадратного уравнения; решать квадратное уравнение; составлять квадратное уравнения, имея два его корня.

Урок 2

На уроках 2 и 3 учащиеся решают цикл задач, состоящий на каждом уроке из цепочки задач (прямая и обратная задачи). На данном уроке задачи 1 и 2 – прямые, 3 – обратная.

Задача 1. Сколько корней имеет уравнение $8x^2 - 4x + 3 = 0$?

Следующую задачу учащиеся решают самостоятельно с последующей проверкой в парах.

Задача 2. Сколько корней имеет уравнение

А) $12x^2 - 4x + 7 = 0$; Б) $x^2 - 2x + 4 = 0$?

Задача 3. Составьте квадратное уравнение, чтобы

А) оно имело два действительных корня:

Б) оно не имело действительных корней.

Урок 3.

В начале урока проходит проверка домашнего задания, учащиеся по желанию показывают составленные ими уравнения, а также демонстрируют решение уравнений (1). Затем учащиеся решают следующие обратные задачи:

Задача 1. Составьте квадратное уравнение, чтобы его корни были 2 и 3.

– Мы должны составить квадратное уравнение, какой вид оно будет иметь? // $ax^2 + bx + c = 0$;

– Как можно использовать корни квадратного уравнения для составления исходного уравнения? // при разложении квадратного трехчлена на множители необходимо знать корни уравнения.

– Получим, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x - 2)(x - 3) = ax^2 - 5ax + 6a$ или $ax^2 - 5ax + 6a = 0$.

– Важное ограничение $a \neq 0$, иначе уравнение перестанет быть квадратным.

Задача 2. *(решается самостоятельно с последующей проверкой)*

Составьте квадратное уравнение, чтобы его корнями были -2 и 4; 6 и 3.

Домашнее задание. Составьте квадратное уравнение, чтобы его корнями были 2 и k .

Урок 4.

На этом уроке учащиеся впервые встречаются с задачами с параметрами в явном виде. Представленные ниже задачи являются обратными к задачам 1 и 2 урока 2

Задача 1. При каких значениях c уравнение $5x^2 - 3x + c = 0$: (1) имеет единственный корень; (2) не имеет корней; (3) имеет два корня?

УЧИТЕЛЬ: $5x^2 - 3x + c = 0$ – это квадратное уравнение, областью определения которого (определение б) является вся числовая прямая при любых значениях параметра c .

– Рассмотрим три случая:

(1) Квадратное уравнение имеет единственный корень при $D = 0$. Найдём дискриминант: $D = 9 - 20c$ и приравняем его к нулю. Решим получившееся линейное уравнение $9 - 20c = 0$, получим $c = \frac{9}{20}$.

(2) Квадратное уравнение не имеет корней при $D < 0$; $9 - 20c < 0$; $c > \frac{9}{20}$.

(3) Квадратное уравнение имеет два корня при $D > 0$; $9 - 20c > 0$; $c < \frac{9}{20}$.

Задача 2. При каких значениях a уравнение $x^2 + (a + 1)x - 4 = 0$: (1) имеет единственный корень; (2) не имеет корней; (3) имеет два корня?

Домашнее задание. При каких значениях a уравнение $ax^2 + (a + 2)x - 4 = 0$: (1) имеет единственный корень; (2) не имеет корней; (3) имеет два корня?

Урок 5.

На данном уроке решается задача, обращенная к задаче 1 урока 4.

Задача 1. При каких значениях c уравнение $5x^2 - 3x + c = 0$: (1) не имеет положительных корней (1); имеет два отрицательных корня (2)?

Решение. Необходимо найти, при каких значениях c уравнение не имеет положительных корней, то есть его корни отрицательны или равны 0. Для поиска отрицательных корней требуется рассмотреть случаи, когда уравнение имеет единственный отрицательный корень или два отрицательных корня.

Случай 1. Уравнение имеет единственный корень (положительный или отрицательный) при $c = \frac{9}{20}$. Решая уравнение $5x^2 - 3x + \frac{9}{20} = 0$, получим: уравнение имеет единственный положительный корень $x_0 = 0,3$. Следовательно, значение $c \neq \frac{9}{20}$.

Случай 2. Уравнение имеет два отрицательных корня.

Уравнение имеет два корня при $c > \frac{9}{20}$. Если уравнение имеет два отрицательных корня, то их сумма отрицательна, а произведение – положительно: $\begin{cases} x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases}$. По теореме Виета, $x_1 + x_2 = -b$, в нашем случае, $x_1 + x_2 = 3$, то есть условие: «сумма корней отрицательна» – не выполняется.

Иными словами уравнение (1) не имеет отрицательных корней ни при каких значениях параметра c .

Равенство нулю корней уравнения $5x^2 - 3x + c = 0$, приводит нас к условию $c = 0$.

Домашнее задание. При каких значениях a уравнение $(a - 1)x^2 - (a + 1)x + a = 0$ имеет только один корень на интервале $(0; 3)$?

Таким образом, представленные фрагменты уроков 1-5 показывают, как можно организовать работу по решению квадратных уравнений с параметрами на уроках алгебры в 9 классе.

Опытно-экспериментальная работа проходила на базе МОУ «СОШ №41» Ленинского района г. Саратова в период с 14.03.2020 г. по 14.04.2020 в 9 «В» классе (учитель: Дорофеева Екатерина Павловна).

В ходе первого урока (14.03.2020) была проведена диагностика остаточных знаний и умений по теме «Квадратные уравнения». На уроке присутствовало 20 учащихся.

К сожалению, из-за возникшей эпидемиологической ситуации провести остальные уроки очно не представилось возможным, в связи с этим, весь материал уроков 2-5, был представлен в электронном формате.

Был создан электронный тест в системе OnlineTestPad.com (URL: <https://onlinetestpad.com/hpc6q5pydy4gi>). Тест состоит из 12 вопросов.

Данный тест прошли 21 учащийся 9 «В» класса с 6 по 9 апреля.

Результаты проведенной экспериментальной работы показывают, что учащиеся в значительной мере освоили решение квадратных уравнений и научились решать обратную к ней задачу – составление квадратного уравнения по заданным корням.

Использование методического приема обращения математической задачи как одного из приемов дополнительной работы над задачей применительно к решению квадратных уравнений с параметром позволило повысить математическую культуру учащихся, были получены прочные знания по теме «Квадратные уравнения».

Заключение. Основные результаты бакалаврской работы:

1. В ходе анализа методико-математической литературы определены основные понятия по теме «Задачи с параметрами» и проведена классификация задач с параметрами.

2. Даны определения основных задачных конструкций: серии, вариации, окрестности обращенных задач, циклы и цепочки. Приведены примеры представленных задачных конструкций с параметрами.

Обращение математических задач развивает творческий потенциал и гибкость мышления учащихся, поэтому данный прием является важным и перспективным направлением методической работы, позволяющим усиливать развивающую значимость технологии обучения школьников математике.

3. В ходе написания бакалаврской работы было проанализировано содержание школьных учебников «Алгебра, 8-9» с целью определения места задач с параметрами в школьных учебниках.

На основании проведенного анализа, наиболее приемлемым для обучения решению задач с параметрами учащихся 8-9 классов является, по нашему мнению, учебник авторского коллектива Ю. Н. Макарычев и др.

4. Нами разработана система задач по теме «Квадратные уравнения и неравенства с параметрами», позволяющая проектировать содержание конкретных уроков.

5. Сформулированы методические рекомендации по использованию разработанной системы задач с использованием приема обращения математических задач.

6. Апробация разработанных методических материалов была проведена на базе 9 «В» класса МОУ «СОШ №41» Ленинского района г. Саратова в период с 14.03.2020 г. по 14.04.2020.

Использование методического приема обращения математической задачи применительно к решению квадратных уравнений с параметром позволило значительно упрочить знания по теме «Квадратные уравнения», что повысило математическую культуру учащихся в целом.