МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики ее преподавания

Всероссийская олимпиада школьников по математике: специфика алгебраического задачного материала для 7 класса

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 461 группы
направления 44.03.01 – «Педагогическое образование (профиль – математическое образование)» механико-математического факультета

Ихсановой Мадины Рашидовны

Научный руководитель
к.п.н., доцент ___________________________ Т. А. Капитонова

Зав. кафедрой
к.п.н., доцент ___________________________ И.К. Кондаурова

Саратов 2020

Введение. Одной из наиболее значимых форм математической подготовки являются математические олимпиады. Предметные олимпиады школьников в условиях современной школы – действенное средство формирования мотивации к учению, повышения познавательной активности учащихся, развития их творческих способностей, углубления и расширения знаний школьника по предмету. В отличие от типовых учебных задач, «олимпиадные» задачи не имеют общего алгоритма решения. Каждая такая задача уникальна и требует применения новых идей для ее решения, потому как для этого достаточно знания обычной школьной программы.

Большой вклад в становление и развитие олимпиадного движения в России, в разработку методик организации и вопросов проведения олимпиад внесли такие ученые и педагоги, как П.С. Александров, Г.И. Алексеева, М.И. Башмаков, И.М. Гельфанд, Г.И. Глейзер, Б.В. Гнеденко, Б.Н. Делоне, Г.В. Дорофеев, Г.И. Зубелевич, А.Н. Колмогоров, Н.Н. Константинов, Г.Г. Левитас, Л.А. Люстерник, А.И. Маркушевич, И.С. Петраков, Д. Пойа, В.Н. Русанов, С.Л. Соболев, В.А. Тартаковский, Г.А. Тоноян, А.В. Фарков, Г.М. Фихтенгольц и др.

Проблемам подготовки к олимпиадам по математике посвящены диссертационные исследования (Г.А. Тоноян, И.С. Петраков, Г.И. Алексеева, М.И. Баяшева), учебно-методические и методические пособия (И.Л. Бабинская, И.С. Петраков, В.Н. Русанов, М.И. Башева, П.В. Чулков, А.В. Фарков, А.Н. Саженков и Т.В. Саженкова и др.), научные и научно-методические статьи (Р. Р. Зиганшина и А. В. Дорофеев, О. Ю. Дмитриев, А. О. Келдибекова, С. В. Лебедева и др.).

Цель выпускной квалификационной работы: описать организационную структуру Всероссийской олимпиады школьников (ВсОШ) по математике, охарактеризовать алгебраический задачный материал олимпиады 7 класса и разработать методическое обеспечение для организации подготовки семиклассников к олимпиаде.

Для реализации поставленной цели потребовалось решить следующие задачи:

1. Рассмотреть структуру ВсОШ, порядок проведения и содержание основных этапов олимпиады для учащихся 7 класса.

2. Уточнить определение олимпиадной задачи и провести классификацию олимпиадных задач по алгебре школьного и муниципального этапов математической олимпиады для 7 класса.

3. Разработать пособие и серию задач по алгебре для подготовки к ВсОШ для учащихся 7 класса.

Методы выпускной квалификационной работы: анализ методико-математической литературы, материалов информационно-образовательных порталов или страниц сайтов, посвящённых математическим олимпиадам, разработка методического материала.

Практическая значимость работы заключается в возможности использования разработанных методических материалов в практике основного и дополнительного математического образования школьников.

Структура работы: титульный лист, введение, два раздела («Алгебраический задачный материал Всероссийской олимпиады школьников по математике для учащихся 7 класса: теоретические аспекты», «Алгебраический задачный материал Всероссийской олимпиады школьников по математике для учащихся 7 класса: методические аспекты»), заключение, список использованных источников.

Основное содержание работы. Первый раздел «Алгебраический задачный материал Всероссийской олимпиады школьников по математике для учащихся 7 класса: теоретические аспекты» посвящен решению первых двух задач бакалаврской работы. Проанализировав имеющуюся в нашем распоряжении литературу, мы представили историю и организационную структуру ВсОШ по математике; описали порядок проведения и содержание этапов Всероссийской олимпиады для учащихся 7 класса; уточнили определение понятия олимпиадная задача; выделили специфические особенности и составили классификацию алгебраического задачного материала олимпиады для учащихся 7 класса; описали формы олимпиадной подготовки учащихся 7 класса.

Олимпиада по математике имеет давнюю историю. Всероссийская математическая олимпиада – ежегодное соревнование по математике для школьников. Во Всероссийской олимпиаде по математике участвуют школьники 4-11 классов. При этом для 4-6 классов в настоящее время проводится только школьный этап, а для 7 и 8 классов – только школьный и муниципальный этапы. В восьмом классе роль регионального и заключительного этапов играет олимпиада им. Леонарда Эйлера. В 9-11 классах формат ВсОШ становится полным – присутствуют все четыре этапа. Никакая другая олимпиада не может сравниться со Всероссийской по величине особых прав, предоставляемых при поступлении в вуз.

Для учащихся 7 класса ВсОШ проводится в два этапа: школьный и муниципальный. Нами были представлены: основные задачи, порядок проведения, принципы составления олимпиадных заданий и формирования комплектов олимпиадных заданий, методика оценивания выполнения олимпиадных заданий, тематика заданий школьного и муниципального этапов олимпиады, типовые задания школьного и муниципального этапов олимпиады, рекомендуемая литература для подготовки заданий школьного и муниципального этапов всероссийской олимпиады школьников по математике.

В литературе даются различные определения понятия олимпиадная задача. Олимпиадные задачи в математике – термин для обозначения круга задач, для решения которых обязательно требуется неожиданный и оригинальный подход.

А.И. Казнина отмечает: «Решая задачу выявления творческих способностей учащегося, т.е. умения «нестандартно мыслить», олимпиадная математика в значительной степени отошла от стандартной («школьной») математики. Хотя промежуточное звено между «школьной» и «олимпиадной» математикой – так называемые задачи повышенной трудности и занимательные задачи – всегда включались в школьные учебники по математике. Они помогают учителю в работе со способными учениками, в поддержке у них интереса к предмету. Олимпиадная задача по математике – это задача повышенной трудности, нестандартная как по формулировке, так и по методам решения».

С.В. Лебедева пишет: «под задачей математической олимпиады для школьников будем понимать стандартную для учащихся определённой возрастной категории (алгоритмическую) задачу повышенной трудности, имеющую помимо стандартного «красивое» оригинальное решение, и нестандартные задачи по формулировке и/или по методам их решения. Выделяют, таким образом: стандартные (алгоритмические) повышенной трудности, имеющие помимо стандартного, как правило, технически громоздкого решения, «красивое» оригинальное решение; нестандартные по формулировке, но стандартные по методам решения; стандартные по формулировке, но нестандартные по методам решения; нестандартные по формулировке и методам решения; занимательные задачи».

С. Б. Забелина и Н. А. Казаков, рассматривая специфику математических олимпиадных задач, замечают, что «важной особенностью любой из таких задач является то, что для её решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Внешняя простота условий некоторых задач олимпиадного типа обманчива. Решение олимпиадных задач требует не только отличного знания предмета, но и наличие гибкого и развитого мышления. Любая олимпиадная задача должна носить творческий характер, и проверять не степень усвоения участником олимпиады различных разделов школьной математики, а его способность к нахождению решений новых для него задач. В олимпиаду должны входить задачи различной сложности, чтобы каждый участник мог проявить максимально свои способности. Формулировка олимпиадной задачи должна быть привлекательной, но очевидной для восприятия (иметь чёткую формулировку)».

В работе под олимпиадной задачей по математике будем понимать задачу повышенного уровня трудности, нестандартную как по формулировке, так и по методам решения, важной особенностью которой является то, что для её решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы.

На основе анализа задач, предлагавшихся участникам школьного и муниципального этапов ВсОШ г. Саратова и других городов за 2015/16–2019/20 учебные годы, был составлен тематический классификатор (рисунок 1), на основании которого был охарактеризован алгебраический задачный материал олимпиады для 7 класса.

<table>
<tr><td>Алгебраические задания (уравнения, неравенства, функции, система, тождественные преобразования)</td><td colspan="8">Задания, решаемые алгебраическими методами</td><td>Другие задания</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="6">Теоретико-числовые</td><td>Геометрические</td><td>Комбинаторные</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td rowspan="3">Математические</td><td colspan="5">Сюжетные</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">Виды</td><td colspan="2">Типы</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Текстовые</td><td>Сказочные</td><td>Логические</td><td>На движение</td><td>На задуманное число</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Рисунок 1 – Тематический классификатор

Весь задачный материал этапов ВсОШ для 7 класса разделяется на: (1) задачи алгебраические, (2) задачи, решаемые алгебраическим методом и (3) все остальные задачи.

Алгебраические задачи и задачи, решаемые алгебраическими методами, составляют алгебраический задачный материал ВсОШ для 7 класса.

Дали определение: (1) алгебраической задачи; (2) задачи, решаемой алгебраическим методом.

Алгебраическая задача – это задача на решение или составление и решение уравнений или систем уравнений, неравенств, систем неравенств, функций.

Задача, решаемая алгебраическим методом – это задача при решении которой используется метод буквенных вычислений.

На основе тематического классификатора изучили статистику ВсОШ по математике 7 класса в г. Саратов. Исходя из статистики последних 5 лет выяснили, что в олимпиадах г. Саратова присутствуют задачи, решаемые алгебраическим методом, а чисто алгебраические задачи отсутствуют. Но также мы рассмотрели материалы ВсОШ по математике (7 класс) других городов, где встречаются задачи как алгебраические, так и решаемые алгебраическим методом.

Рассмотрели формы подготовки учащихся к олимпиаде и выделили две основные формы, которые использовали далее в работе при подготовке учащихся 7 класса к ВсОШ: подготовка на уроке (решение олимпиадных задач, связанных с темой урока); внешкольная форма подготовки (математические кружки, факультативы при вузах).

Во втором разделе «Алгебраический задачный материал Всероссийской олимпиады школьников по математике для учащихся 7 класса: методические аспекты» решили третью задачу бакалаврской работы.

Нами были разработаны серии задач, каждая из которых может быть рассмотрена на уроках при изучении некоторых тем школьного курса алгебры 7 класса (*алгебраические задачи*).

Приведем примеры:

Тема. Решение задач с помощью уравнений.

Задача. Автомобиль из А в В ехал со скоростью 50 км/ч, а обратно возвращался со скоростью 30 км/ч. Какова его средняя скорость.

Решение. Обозначим расстояние от А до В через S, T – время, затраченное автомобилем на весь путь, складывается из времени от А до В (t_1) и времени от В до А (t_2). Вычисляем по формуле:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\text{весь путь}}{\text{все время}} = \frac{S+S}{t_1+t_2} = \frac{2S}{\frac{S}{50}+\frac{S}{30}} = \frac{2S}{\frac{3S+5S}{150}} = \frac{2S\cdot 150}{8S} = \frac{150}{4} = 37{,}5(\text{км/ч}).$$

Ответ. 37,5 км/ч.

Тема. Преобразование выражений.

Задача. Докажите, что сумма любого двузначного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 11.

Решение. Пусть данное число содержит a десятков и b единиц. Тогда оно равно $10a + b$. Число, записанное теми же цифрами и в обратном порядке, равно $10b+a$. Рассмотрим разность $(10a + b) - (10b + a) = 10a + b - 10b - a = 9a - 9b = 9(a - b)$. Очевидно, что число $9(a - b)$ делится нацело на 9.

Что и требовалось доказать.

Тема. Формулы сокращенного умножения. Разложение на множители.

Задача. Сколько различных решений имеет уравнение $|x^3 + 47x| = 12x^2 + 60$?

Решение. Данное уравнение после раскрытия модуля разбивается на два уравнения: $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$ и $x^3 + 12x^2 + 47x + 60 = 0$.

Заметим, что если в первом уравнении заменить x на $-x$, то мы получим второе уравнение, т.е. все решения первого уравнения, взятые с противоположным знаком, являются решениями второго уравнения, и наоборот, все решения второго уравнения, взятые с противоположным знаком, являются решениями первого уравнения.

Преобразуем первое уравнение, используя формулы сокращенного умножения: куб разности и разность квадратов. Имеем

$$\begin{aligned} x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 4 + 3x \cdot 4^2 - 4^3 - x + 4 &= (x-4)^3 - (x-4) \\ &= (x-4)((x-4)^2 - 1^2)) = (x-4)(x-4-1)(x-4+1) \\ &= (x-4)(x-5)(x-3). \end{aligned}$$

Таким образом, первое уравнение имеет вид $(x-4)(x-5)(x-3) = 0$, его корни – числа 3, 4, 5, а тогда, с учетом замечания выше, исходное уравнение имеет 6 решений.

Ответ. 6.

Тема. Функции и графики. Линейная функция. Линейные уравнения.

Задача 1. График линейной функции отсекает от второй координатной четверти равнобедренный прямоугольный треугольник с длинами катетов, равными 3. Найдите эту функцию.

Решение. Данный график образует с осью абсцисс такой же угол в 45°, как и биссектриса I и III координатных углов. Значит, ее угловой коэффициент равен 1. Поскольку при $x = 0$ значение функции равно 3, то искомая функция $y = x + 3$.

Ответ. $y = x + 3$.

Задача 2. (Муниципальный этап, 2018/2019). Графики функций $y = kx + b$ и $y = bx + k$ пересекаются. Найдите абсциссу точки пересечения.

Решение. *Первый способ.* Абсцисса точки пересечения есть решение линейного уравнения с 2 параметрами $kx + b = bx + k \Leftrightarrow (k - b)x = k - b$. Если $k = b$, то прямые совпадают, что не соответствует условию задачи (прямые пересекаются). Таким образом, имеем $k \neq b$, тогда $x = \frac{k-b}{k-b} = 1$.

Второй способ. Легко увидеть, что $x = 1$ есть решение задачи, так как при $x = 1$ обе функции принимают одно и то же значение $y(1) = k + b = b + k$. По условию графики пересекаются, т.е. прямые имеют ровно одну общую точку, что означает, что других решений нет.

Ответ. $x = 1$.

Задачи, решаемые алгебраическим методом (с использованием алгебраических моделей)

Тема «Числа и вычисления. Числовые ребусы».

Задача. Из чисел A, B и C одно положительно, одно отрицательно и одно равно 0. Известно, что A = B (B – C). Какое из чисел положительно, какое отрицательно и какое равно 0? Почему?

Решение. Если A = 0, то либо B = 0, либо B – C = 0. Ни то, ни другое невозможно. Поэтому A ≠ 0.

Если B = 0, то и A = 0. Это тоже невозможно. Поэтому B ≠ 0. Следовательно, C = 0, и равенство из условия задачи можно переписать в виде A = B(B-0) = B^2. Отсюда следует, A> 0, а B < 0. Значит, B отрицательно, а A – положительно.

Ответ. A> 0, B < 0, C = 0.

Представили разработку пособия для подготовки семиклассников к участию в школьном этапе ВсОШ по математике.

Пособие состоит из предисловия, трех глав («Тематика задач школьного этапа олимпиады», «Задачи для подготовки к школьной математической олимпиаде», «Сюжетные логические задачи») и раздела «Ответы. Решения. Указания к главе 2 и 3».

В первой главе перечислена тематика задач школьного этапа олимпиады.

Во второй главе – представлены задачи: математические, логические, сюжетные задачи на движение, задачи на клетчатой бумаге, геометрические.

Пособие адресовано учащимся 7 классов, интересующимся математикой (будет полезно для домашних тренировок в решении математических задач) и учителям, которые могут использовать материал пособия как в индивидуальной работе с учениками, так и на занятиях школьного математического кружка.

Заключение. Основные результаты бакалаврской работы:

1. На основе анализа методико-математической литературы рассмотрены: структура ВсОШ по математике, порядок проведения и содержание школьного и муниципального этапов олимпиады для учащихся 7 класса.

В настоящее время ВсОШ включает четыре этапа: школьный, муниципальный, региональный, заключительный. Для учащихся 7 класса ВсОШ проводится в два этапа: школьный и муниципальный. В школьном этапе олимпиады может участвовать каждый семиклассник. Рекомендуемое время проведения школьного этапа олимпиады для 7 класса – 2 урока. В муниципальном этапе олимпиады принимают участие участники школьного этапа олимпиады текущего учебного года, набравшие необходимое для участия в муниципальном этапе олимпиады количество баллов, установленное организатором муниципального этапа олимпиады. Рекомендуемая продолжительность олимпиады для учащихся 7 класса – 3 часа.

Вариант должен включать в себя 4-6 задач. Олимпиадные задачи школьного и муниципального этапов составляются на основе программ по математике для общеобразовательных учебных учреждений и охватывают все разделы школьной математики. Для оценивания выполнения олимпиадных задач применяется 7-балльная шкала.

2. В ходе анализа методико-математической литературы уточнено определение понятия «олимпиадная задача», проведена классификация олимпиадных задач по алгебре школьного и муниципального этапов математической олимпиады для 7 класса.

В нашей работе под олимпиадной задачей по математике будем понимать задачу повышенного уровня трудности, нестандартную как по формулировке, так и по методам решения, важной особенностью которой является то, что для её решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы.

Охарактеризовали алгебраический задачный материал олимпиады для 7 класса и составили тематический классификатор по заданиям школьного и муниципального этапов ВсОШ г. Саратова, проанализировав задачи, предлагавшиеся участникам этих этапов в г. Саратове за 2015/16 – 2019/20 учебные годы.

Весь задачный материал этапов ВсОШ для 7 класса разделяется на: (1) задачи алгебраические, (2) задачи, решаемые алгебраическим методом и (3) все остальные задачи.

Алгебраические задачи и задачи, решаемые алгебраическими методами, составляют алгебраический задачный материал ВсОШ для 7 класса.

3. На основе выделенных двух основных форм олимпиадной подготовки: (1) работа на уроке (решение олимпиадных задач, связанных с темой урока); (2) внешкольная форма подготовки (математические кружки, факультативы при вузах) нами разработано методическое обеспечение для подготовки учащихся 7 класса к школьному и муниципальному этапам ВсОШ, включающее:

1) алгебраические задачи, а именно: серию задач по алгебре по теме «Решение задач с помощью уравнения»; серию задач по алгебре по теме «Преобразование выражений»; серию задач по алгебре по теме «Формулы

сокращенного умножения. Разложение на множители»; задачи по алгебре по теме «Функции и графики. Линейная функция, Линейное уравнение»;

2) неалгебраические задачи, решаемые алгебраическим методом, а именно: серию задач по геометрии по теме «Геометрические фигуры на плоскости»; задачи по теме «Числа и вычисления. Числовые ребусы»;

3) пособие для подготовки семиклассников к школьному этапу ВсОШ по математике.