МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики ее преподавания

Показательные уравнения и неравенства в материалах ЕГЭ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 5 курса 521 группы
направления 44.03.01 – «Педагогическое образование (профиль – математическое образование)» механико-математического факультета
Шелудько Марии Владимировны

Научный руководитель
к.п.н., доцент ______________________ Т. А. Капитонова

Зав. кафедрой
к.п.н., доцент ______________________ И.К. Кондаурова

Саратов 2020

Введение. Предметные результаты изучения учебного предмета «Математика: алгебра и начала математического анализа» (базовый уровень) должны отражать владение стандартными приёмами решения показательных уравнений и неравенств, их систем.

Материал, связанный с уравнениями и неравенствами, составляет значительную часть школьного курса математики. Одним из сложных разделов алгебры, изучаемых в школьной программе, являются показательные уравнения и неравенства. Трудности при изучении данного вида уравнений и неравенств связаны с тем, что во многих случаях отсутствует четкий алгоритм решения показательных уравнений и неравенств.

Опыт показывает, что учащиеся в недостаточной степени овладевают умением решать показательные уравнения и неравенства, часто допускают ошибки при их решении. Однако показательные уравнения и неравенства встречаются в текстах ЕГЭ, и довольно часто у учащихся возникают трудности при их решении, особенно при решении заданий части С.

ЕГЭ по математике направлен на контроль сформированности математических компетенций, предусмотренных требованиями Федерального компонента государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования по математике.

Показательным уравнениям и неравенствам посвящены многочисленные учебники и учебные пособия авторов: В.Г. Болтянский, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин, Б.П. Гейдман, Т.В. Костаева, С.Н. Олехник, М.К. Потапов, П.И. Пасиченко, П.Ф. Севрюков; сборники задач (В.В. Вавилов, А.П. Карп, В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович и др.).

Заданиями по теме «Показательные уравнения и неравенства» на ЕГЭ занимались многие математики и методисты Ю.В. Садовничий, С.И. Колесникова, И.В. Ященко, И.Г. Малышев, Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова, М. Б. Шашкина, М.Ш. Якименко и другие.

Цель работы – теоретически описать методы решения показательных уравнений и неравенств и практически разработать методические материалы по изучению темы «Показательные уравнения и неравенства (задания C1, C3 и C5)» на уроках алгебры и начал анализа.

Задачи работы:

1. Рассмотреть методы решения показательных уравнений и неравенств.

2. Описать место показательных уравнений и неравенств в контрольно-измерительных материалах ЕГЭ.

3. Рассмотреть показательные уравнения и неравенства из материалов ЕГЭ базового и углубленного уровня.

Методы работы: анализ методико-математической и учебной литературы; изучение нормативных документов; разработка методических материалов.

Структура работы: титульный лист; введение; две главы («Показательные уравнения и неравенства в материалах ЕГЭ: теоретические аспекты»; «Показательные уравнения и неравенства в материалах ЕГЭ: практические аспекты»); заключение; список использованных источников из 29 наименований.

Основное содержание работы. Первый раздел «Показательные уравнения и неравенства: теоретические аспекты» посвящен решению первой задачи бакалаврской работы.

Определение 1. Показательным уравнением называется уравнение, содержащее переменную в показателе степени..

Простейшим показательным уравнением называется уравнение вида: $a^x = b$.

При решении показательных уравнений часто используется преобразование, называемое логарифмированием.

Логарифмирование по основанию $c > 0, c \neq 1$, представляет собой переход от равенства $a = b$ (1) к равенству $log_c a = log_c b$ (2) (здесь a и b могут обозначать как числа, так и выражения, содержащие переменные). Если (1) – верное равенство и обе его части *положительны* ($a > 0, b > 0$), то и (2) – верное равенство.

Основные методы решения показательных уравнений:

1) переход от уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ к уравнению $f(x) = g(x)$.

Теорема. Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Алгоритм решения уравнения этим методом:

– представить обе части показательного уравнения в виде степеней с одинаковым основанием;

– на основании *теоремы*: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$, где $a > 0, a \neq 1$;

– решаем полученное уравнение, согласно его виду;

– записываем ответ.

Пример. Решить уравнение: $3^x = 27$.

Решение. Представим 27 как 3^3. Обе части уравнения представлены в виде степени с одинаковым показателем: $3^x = 3^3 \underset{\text{т.1}}{\Leftrightarrow} x = 3$.

Ответ. $x = 3$.

2) Уравнение вида $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, логарифмируя по некоторому основанию $c > 0, c \neq 1$, можно преобразовать к равносильному уравнению $f(x) log_c a = g(x) log_c b$.

Пример. Решить уравнение: $4 \cdot 9^{x-1} = 3\sqrt{2^{2x+1}}$.

Решение. Обе части уравнения положительны. Логарифмируем по основанию 2, получаем уравнение:

$2 + (x-1) log_2 9 = log_2 3 + \frac{1}{2}(2x+1)$, равносильное исходному. Преобразуем это уравнения, учитывая, что $log_2 3 = \frac{1}{2} log_2 9$. Получаем:

$x(log_2 9 - 1) = \frac{3}{2}(log_2 9 - 1), x = \frac{3}{2}$, (т.к. $log_2 9 - 1 \neq 0$).

Ответ. $x = 1,5$.

3) Уравнения вида $a_1^{P_1(x)} \cdot a_2^{P_2(x)} \cdot \ldots \cdot a_n^{P_n(x)} = b$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ – заданные положительные числа, $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$ – заданные многочлены (с действительными коэффициентами).

Логарифмируя обе части по основанию $c > 0, c \neq 1$ получим уравнение

$P_1(x) log_c a_1 + P_2(x) log_c a_2 + \cdots + P_n(x) log_c a_n = log_c b$.

Пример. Решить уравнение: $2^x \cdot 3^{x-1} \cdot 5^{x+2} = 4$.

Решение. Обе части уравнения положительны. Логарифмируем по основанию 2, получаем уравнение $x + (x-1)log_2 3 + (x+2)log_2 5 = 2$, равносильное исходному. Преобразуя это уравнения, получаем:

$x + xlog_2 3 + xlog_2 5 = 2 + log_2 3 - log_2 5$, откуда $x = \frac{2+log_2 3 - log_2 5}{1+log_2 3+log_2 5}$.

Ответ. $x = \frac{2+log_2 3 - log_2 5}{1+log_2 3+log_2 5}$.

4) метод введения новой переменной.

Рассмотрим показательное уравнение $P(a^x) = 0$, где $a > 0, a \neq 1$, P – заданный многочлен. Заменим переменную по формуле: $t = a^x$. Получим уравнение $P(t) = 0$. Пусть $t_1, t_2, \dots, t_n$ – все положительные корни уравнения $P(t) = 0$. Тогда корнями исходного уравнения будут все корни уравнений вида $a^x = t_k$, т.е. числа вида $x = log_a t_k$, $(k = 1, 2, \dots, n)$.

Алгоритм решения показательного уравнения методом введения новой переменной:

– определить возможность переписать данное уравнение в новом виде, позволяющем ввести новую переменную;

– вводим новую переменную;

– решаем алгебраическое (в частности) квадратное уравнение относительно новой переменной;

– выполняем обратную замену;

– записываем ответ.

Пример. Решить уравнение $9^x - 5 \cdot 3^x + 4 = 0$.

Решение. Пусть $3^x = t, t > 0$.

Данное уравнение можно записать в виде $t^2 - 5t + 4 = 0$.

Решая это квадратное уравнение, получаем $t_1 = 4, t_2 = 1$.

Выполняем обратную замену, теперь задача сводится к решению совокупности уравнений $3^x = 4, 3^x = 1$, $x_1 = log_3 4, x_2 = 0$.

Ответ. $x_1 = log_3 4, x_2 = 0$.

Наряду с аналитическими способами решения показательных уравнений применяется и графический метод (функционально-графический метод).

5) функционально-графический метод.

Алгоритм решения показательного уравнения функционально-графическим методом:

– левую и правую части уравнения представить в виде функций;
– построить графики обеих функций в одной системе координат;
– найти точки пересечения графиков, если они есть;
– указать абсциссы точек, это корни уравнения.

Определение 2. Неравенство, содержащее переменную в показателе степени, называются показательным неравенством.

Решение простейших показательных неравенств основано на свойстве монотонности показательной функции $y = a^x$: эта функция возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$, откуда вытекает, что:

1) при $a > 1$ показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$;

2) при $0 < a < 1$ неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

<u>Решение неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$.</u>

Примерная последовательность действий:

1) уравнять основания степеней;

2) сравнить показатели, сохранив знак неравенства (если $a > 1$) и изменив знак неравенства на противоположный (если $0 < a < 1$);

3) решить полученное неравенство.

Заметим, что, применяя какой-либо метод при решении неравенства, содержащего знак «>», можно этот же метод применить и при решении неравенств, содержащих знаки «<», «≥», «≤».

Пример. Решить неравенство: $2^x < \frac{1}{8}$.

Решение. Поскольку $\frac{1}{8} = 2^{-3}$, то имеем: $2^x < 2^{-3}$, так как 2 > 1, функция $y = 2^x$ – возрастающая, получаем $x < -3$.

Ответ. $x \in (-\infty;\ -3)$.

Неравенства вида $a^{f(x)} > b^{g(x)}$

При решении неравенств подобного вида применяют логарифмирование обеих частей по основанию a или b. Учитывая свойства показательной функции, получаем:

$a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x) \cdot log_a b$, если $a > 1$;

$a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x) \cdot log_a b$, если $0 < a < 1$.

Пример. Решить неравенство $2^x \geq 3^{x^2}$.

Решение. Обе части неравенства положительны. Прологарифмируем обе части неравенства по основанию 2, тогда имеем: $log_2(2^x) \geq log_2(3^{x^2}) \Leftrightarrow x \geq x^2 \cdot log_2 3 \Leftrightarrow x(1 - x \cdot log_2 3) \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \in [0;\ \frac{1}{log_2 3}] = [0;\ log_3 2]$.

Ответ. $x \in [0;\ log_3 2]$.

Решение показательных неравенств методом замены переменной

Пример. Решить неравенство: $9^x + 27 < 12 \cdot 3^x$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 < 0$.

Сделаем замену переменной $3^x = t$, тогда исходное неравенство равносильно: $t^2 - 12t + 27 < 0$ или $(t-3)(t-9) < 0$. Применяя метод интервалов, находим: $3 < t < 9$. Делаем обратную замену: $3 < 3^x < 9$, откуда получаем $1 < x < 2$.

Ответ: $x \in (1; 2)$.

Как и при решении показательных уравнений, при решении показательных неравенств используются приемы: почленного деления (на выражение $a^x > 0$), группировки и вынесения общего множителя за скобки.

Пример. Решить неравенство $4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 2^x \cdot 5^x > 0$.

Решение. Исходное неравенство можно записать в виде:

$2^{2x} - 2 \cdot 5^{2x} - 2^x \cdot 5^x > 0$.

В левой части – однородные функции относительно 2^x и 5^x. Отсюда можно разделить обе части неравенства на 2^{2x}, 5^{2x} или $10^x = 2^x \cdot 5^x$. Разделив обе части исходного неравенства на $5^{2x} = 25^x$, получаем:

$$\left(\left(\frac{2}{5}\right)^x\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^x - 2 > 0.$$

Делаем замену $t = \left(\frac{2}{5}\right)^x > 0$, получаем $t^2 - t - 2 > 0$, или $(t+1)(t-2) > 0$, откуда, применяя метод интервалов, находим: $t > 2$ или $t < -1$ (эти значения нам не подходят, так как $t > 0$.

Делаем обратную замену: $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x > \left(\frac{2}{5}\right)^{log_{\frac{2}{5}}2} \underset{\frac{2}{5}<1}{\Leftrightarrow} x < log_{\frac{2}{5}}2.$

<u>Решение неравенств вида $(f(x))^{g(x)} > 1, (f(x))^{g(x)} < 1$</u>.

Если неравенство содержит степень, основание и показатель которой зависят от переменной, то следует рассматривать два случая: $f(x) > 1$ и $0 < f(x) < 1$.

Второй раздел «Показательные уравнения и неравенства в материалах ЕГЭ: практические аспекты» посвящен решению второй и третьей задач бакалаврской работы.

Показательные уравнения и неравенства всегда были в экзаменационном материале выпускных и вступительных экзаменов. И в современных контрольно-измерительных материалах (КИМ) ЕГЭ по математике эти задания есть.

Показательные уравнения и неравенства постоянно включаются в КИМ ЕГЭ, как до перехода на новую модель ЕГЭ по математике (до 2015 года), так и после вышеуказанного перехода. Представленные в 2020 году экзаменационные модели ЕГЭ по математике обоих уровней сохраняют преемственность с моделями последних нескольких лет, как по тематике, так и по уровню сложности предлагаемых заданий.

Демонстрационный вариант КИМ ЕГЭ 2020 года по математике (базовый уровень) включает в себя 20 заданий. Показательное уравнение включено в экзаменационную работу под номером 7.

Задание 7. Найдите корень уравнения $3^{x-3} = 81$.

Экзаменационная работа по профильной математике состоит из двух частей. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня (задания 1–8); часть 2 содержит 9 заданий повышенного уровня (задания 9–17) и 2 задания высокого уровня сложности (задания 18, 19).

Показательное уравнение включено в экзаменационную работу под номером 5 или под номером 13.

Например: Задание 5. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{8-7x} = 32$.

Задание 13. а) Решите уравнение $\left(\frac{1}{81}\right)^{cosx} = 9^{2sin2x}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}]$.

Показательное неравенство может быть включено в экзаменационную работу под номером 15.

Задание 15. Решите неравенство $\frac{2\cdot 49^x - 16\cdot 7^x + 11}{7\cdot(7^{x-1}-1)} + \frac{5\cdot 7^x - 36}{7^x - 8} \le 2\cdot 7^x + 3$.

Задача с параметром, включенная в экзаменационную работу под номером 18 может содержать *показательное уравнение с параметром*, *показательное неравенство с параметром* или *систему показательных уравнений/неравенств с параметром*.

Задание 18. При каких значениях *a* уравнение $2\sqrt{x^4\cdot 2^x - a} + \frac{2a-1}{\sqrt{x^4\cdot 2^x - a}} = 1$ имеет ровно два различных корня? Найдите все возможные значения *a*.

Во всех школьных учебниках «Алгебра и начала анализа: 10-11 класс» содержится достаточное количество показательных уравнений, относящихся к базовому уровню сложности.

Целесообразно, на наш взгляд, решение показательных уравнений (в частности, базового уровня сложности) рассматривать одновременно с решением соответствующих логарифмических уравнений. Каждое уравнение можно дополнить «обращенным уравнением» и получаем серию заданий в парах.

1. Решите уравнения: а) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$; б) $log_{\frac{1}{3}}x = -2$.

2. Решите уравнения: а) $2^x = 8$; б) $log_2 x = 3$.

3. Решите уравнения: а) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$; б) $log_{\frac{1}{2}}x = -3$.

4. Решите уравнения: а) $3^x = 9$; б) $log_3 x = 2$.

5. Решите уравнения: а) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 125$; б) $log_{\frac{1}{5}}x = -4$.

6. Решите уравнения: а) $7^x = \frac{1}{49}$; б) $log_7 x = -2$.

Предлагая старшеклассникам соответствующие задания на уроках, для самостоятельного выполнения, в качестве домашнего задания, можно хорошо их подготовить к ЕГЭ по математике (на базовом уровне) по теме «Простейшие показательные уравнения».

Для подготовки к ЕГЭ по математике профильного уровня рассмотрены и решены показательные уравнения (задание С1), показательные неравенства (задание С3) и задачи с параметрами (задание С5) прошлых лет.

Задание С1 (ЕГЭ-2013). а) Решите уравнение $9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(1,\ \frac{7}{3}\right)$.

Решение. а) Так как $9^{x-\frac{1}{2}} = 3^{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} = 3^{2x-1} = \frac{1}{3} \cdot 3^{2x}$, то уравнение перепишем в виде $\frac{1}{3} \cdot 3^{2x} - \frac{8}{3} \cdot 3^x + 5 = 0$ или $3^{2x} - 8 \cdot 3^x + 15 = 0$.

Обозначим $3^x = t > 0$, получим $t^2 - 8t + 15 = 0$; $t_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 15} =$ $= 4 \pm 1 = \left[\begin{matrix}5 \\ 3\end{matrix}\right.$. Возвращаясь к переменной x, получаем два простейших показательных уравнения: $3^x = 3, x = 1$; и $3^x = 5, x = log_3 5$.

б) Корень $x = 1$ не принадлежит промежутку $\left(1,\ \frac{7}{3}\right)$. Корень $x = log_3 5$ принадлежит промежутку $\left(1,\ \frac{7}{3}\right)$, так как $1 = log_3 3 < log_3 5 < log_3 9 = 2 < \frac{7}{3}$.

Ответ. а) 1 и $log_3 5$; б) $log_3 5$.

Задание С3 (ЕГЭ-2015). Решите неравенство:

$$\frac{13-5\cdot 3^x}{9^x-12\cdot 3^x+27} \geq 0{,}5.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде $\frac{13-5\cdot 3^x}{9^x-12\cdot 3^x+27} - \frac{1}{2} \geq 0$.

Обозначим $t = 3^x$, тогда получим: $\frac{13-5t}{t^2-12t+25} - \frac{1}{2} \geq 0$, откуда $\frac{26-10t-t^2+12t-27}{2(t^2-12t+27)} \geq 0$, $\frac{-t^2+2t-1}{2(t-9)(t-3)} \geq 0$ или $\frac{(t-1)^2}{2(t-3)(t-9)} \leq 0$.

Решаем полученное неравенство методом интервалов, находим: $t = 1$ или $3 < t < 9$. Возвращаясь к переменной x, получаем: $3^x = 1$ или $3 < 3^x < 9$, то есть $x = 0$ или $1 < x < 2$.

Ответ. $\{0\} \cup (1; 2)$.

Заключение. Результаты, полученные в ходе выполнения бакалаврской работы.

1. В ходе анализа математической и учебно-методической литературы рассмотрены основные методы решения показательных уравнений и неравенств.

Методы решения показательных уравнений:

– переход от уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ к уравнению $f(x) = g(x)$;

– логарифмирование по основанию c $(c > 0, c \neq 1)$;

– метод введения новой переменной;

– функционально-графический метод.

Методы решения показательных неравенств:

– использование свойства монотонности показательной функции:

а) при $a > 1$: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$;

б) при $0 < a < 1$: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

– метод логарифмирования по основанию c $(c > 0, c \neq 1)$;

– метод введения новой переменной.

2. Показательные уравнения и неравенства постоянно включаются в КИМы ЕГЭ, как до перехода на новую модель ЕГЭ по математике (до 2015 года), так и после указанного перехода. Представленные в 2020 году экзаменационные модели ЕГЭ по математике обоих уровней сохраняют преемственность с моделями последних нескольких лет, как по тематике, так и по уровню сложности предлагаемых заданий.

В экзаменационную работу ЕГЭ на базовом уровне показательное уравнение включено под номером 7.

В экзаменационную работу ЕГЭ на профильном уровне показательное уравнение включено под номером 5 или под номером 13; показательное неравенство – под номером 15. Кроме того, задача с параметром, включенная в экзаменационную работу под номером 18 может содержать показательное уравнение с параметром, показательное неравенство с параметром или систему показательных уравнений/неравенств с параметром.

Анализ результатов ЕГЭ показывает, что решение показательных уравнений, неравенств и задач с параметрами вызывают большие затруднения у выпускников общеобразовательных учебных заведений. Процент выполнения заданий 13, 15 стабильно не является высоким. Задание 18 относится к заданию высокого уровня, выполнение которого ожидается только от самых сильных учеников. Оно требует развитого логического мышления, умения видеть нестандартные подходы.

3. С целью подготовки обучающихся к успешной сдаче ЕГЭ по математике (базовый уровень) нами составлена серия заданий по теме «Решение показательных уравнений» базового уровня сложности.

Для подготовки к ЕГЭ по математике профильного уровня рассмотрены и решены показательные уравнения (задание С1), показательные неравенства (задание С3) и задачи с параметрами (задание С5), прошлых лет.

Разработанные материалы могут быть полезны учителям на уроках алгебры и начал анализа при изучении тем «Показательные уравнения» и «Показательные неравенства» и при подготовке обучающихся к ЕГЭ базового и профильного уровней, а также самим выпускникам общеобразовательных учебных заведений при самостоятельной подготовке к государственной итоговой аттестации.