

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математики и методики её преподавания

**Задачи по планиметрии с геометрическим параметром**

**АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студента 5 курса 521 группы  
направления 44.03.01 Педагогическое образование  
механико-математического факультета

Курышева Валентина Владимировича

Научный руководитель

доцент, к.п.н., доцент

\_\_\_\_\_

подпись, дата

Т. А. Капитонова

Зав. кафедрой

к.п.н., доцент

\_\_\_\_\_

подпись, дата

И. К. Кондаурова

Саратов 2020

**Введение.** Анализ действующего Федерального государственного образовательного стандарта основного (общего) образования показал, что в числе основных результатов освоения школьной программы по математике у выпускников должно присутствовать формирование систематических знаний о плоских фигурах и их свойствах, представлений о простейших пространственных телах; развитие умений моделирования реальных ситуаций на языке геометрии, исследования построенной модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры, решения геометрических и практических задач.

Задачи с параметрами традиционно являются одними из самых сложных в курсе математики. Среди множества различных обстоятельств, связанных с этими задачами, можно выделить следующие: во-первых, с содержательной точки зрения решение задач с параметрами закладывает основы формирования профильного (математического) мышления; во-вторых, эти задачи важны и с другой, прагматической точки зрения: умение решать их серьёзно увеличивает шансы школьников на успешную сдачу выпускных и вступительных экзаменов. Кроме того, задачи с параметром есть один из (немногих) примеров ситуаций, которые самым естественным образом возникают в математике как науке и «индуцируются» в математике как учебном предмете.

Решение задач с геометрическими параметрами в общеобразовательных классах не носит обязательный характер, но является полезным для более глубокого понимания изучаемого материала, а так же необходимым для решения второй части единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике профильного уровня.

Подобных упражнений, в которых представлена неоднозначная планиметрическая ситуация (при решении возникают два, а иногда и три возможных случая), в учебниках геометрии 8-9 классов практически (или вовсе) нет, вследствие чего для многих школьников (даже сильных), такие задачи являются достаточно трудными. Такие задачи можно назвать параметрическими из-за сходства с параметрическими заданиями алгебры.

Так как в общеобразовательных школах на изучение каждой темы отводится строго ограниченное время, то учитель не всегда имеет возможность рассматривать на уроках задачи творческого, исследовательского характера, а задачи с параметрами как раз относят к заданиям такого типа. Поэтому учащимся необходимо предлагать задачи с «геометрическими» параметрами на самостоятельных или зачетных работах (так как эти задачи относятся к задачам на закрепление), на сдвоенных уроках или на факультативных занятиях.

Решение таких задач часто вызывает у школьников затруднения. Учащиеся «не видят» всех возможных случаев, к которым сводится решение задач данного рода, так как привыкли к задачам со строго определенным условием, и нередко всякая неопределенность, условность ставит их в тупик. Это неудивительно, поскольку ни в одном из школьных учебников для общеобразовательных классов не излагается методика решений задач с параметрами.

Практика работы со школьниками показала, что решение данных задач представляет для обучающихся особую сложность. Это обстоятельство можно связать со следующими причинами: (1) в рамках урочной деятельности решению комбинированных задач повышенной сложности чаще всего уделяется недостаточное внимание; (2) отсутствие строго выделенных приёмов в решении данного класса задач и отсутствие единой методической системы подготовки к решению задач; (3) изучение курса планиметрии завершается в 9 классе, в старших классах на первое место выходит решение задач стереометрии; как следствие, материал забывается и теряет актуальность.

В силу своего богатого общекультурного потенциала и развивающего характера задачи с параметрами стали объектом изучения математиков и методистов: Моденов П.С., Новоселов С.И., Мордкович А.Г., Шарыгин И.Ф., Олехник С.Н., Потапов М.К., Розов Н.Х., Башмаков М.И., Вавилов В.В., Галицкий М.А., Гольдман А.М., Марков В. К., Звавич Л. И., Сергеев И. Н. и др.

Цель исследования: теоретически описать, практически разработать и экспериментально проверить методические материалы по теме «Геометрические задачи с параметром».

Задачи работы:

1. На основе теоретического анализа литературы описать основной понятийный аппарат по теме исследования.

2. Разработать и апробировать факультативный курс для учащихся 10-х классов общеобразовательных учреждений по теме «Геометрические задачи с параметром».

Методы исследования: изучение нормативных документов, анализ учебной и методико-математической литературы; разработка методических материалов, педагогический эксперимент.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух разделов («Задачи с геометрическим параметром: теоретические аспекты», «Задачи с геометрическим параметром: практические аспекты»), заключения, списка использованных источников.

Практическая значимость исследования заключается в возможности использования разработанных методических материалов для подготовки учащихся к ЕГЭ на профильном уровне.

**Основное содержание работы.** Первая глава («Задачи с геометрическим параметром: основные понятия») была посвящена решению первой задачи выпускной квалификационной работы.

В последние годы в школьной практике обучения математики наблюдается значительное повышение интереса к задачам с параметрами. Решение задач с параметрами является одним из инструментов формирования мышления вообще и математического в частности, поскольку эти задачи обладают большими потенциальными возможностями для развития умственных операций (сравнения, аналогии, классификации, конкретизации, обобщения), способностей к анализу и синтезу, формируют культуру логических рассуждений.

Дидактически тема «Задачи с параметрами» не обязательно должна рассматриваться как единый блок.

Этот раздел можно изучать по всему школьному курсу. При подготовке к изложению задач с параметрами учителю необходимо учитывать различные учебные цели, которые не ограничиваются лишь научением решению задач с параметрами.

Во многих учебниках и учебных пособиях даны различные формулировки определения параметра.

Параметр (от греческого слова *parametron* – отмеривающий) – величина, числовые значения которой позволяют выделить определенный элемент из множества элементов того же рода.

В «Толковом словаре математических терминов» сказано: «Параметр – величина, входящая в формулы и выражения, значение которой является постоянным в пределах рассматриваемой задачи, но которое в другой задаче меняет свои значения».

П. С. Моденов, С. И. Новоселов дают следующее определение: «Если в уравнение, кроме неизвестных, входят числа, обозначенные буквами, то они называются параметрами».

Г. А. Ястребинецкий пишет: «переменные  $a, b, c \dots k$ , которые при решении уравнения или неравенства считаются постоянными, называют параметрами, а само уравнение (неравенство) называют уравнением (неравенством), содержащим параметры».

В учебнике Н. Я Виленкина говорится: «Иногда в уравнениях некоторые коэффициенты заданы не конкретными числовыми значениями, а обозначены буквами. Такие буквы называются параметрами».

В. И. Голубев под параметром понимает независимую переменную, значение которой в задаче считается заданным фиксированным или произвольным действительным числом, или числом, принадлежащим заранее оговоренному множеству.

Все вышеизложенное относится к параметру «алгебраическому».

В нашей работе, вслед за А. А. Прокофьевым, под геометрическим параметром будем понимать: «В задачах с геометрическими параметрами в

качестве параметра выступает либо геометрическая фигура (иными словами задачи на выбор нужной конфигурации), либо геометрические отношения между фигурами и элементами фигур».

Такие задачи с геометрическими параметрами часто называют многовариантными задачами или задачами на выбор нужной конфигурации.

В планиметрических задачах под конфигурацией понимается конечное множество точек и прямых, принадлежащих одной плоскости и связанных между собой отношением принадлежности. Иначе ее называют геометрической фигурой.

Анализ содержания задачной базы школьных учебников по геометрии показывает, что многовариантных задач практически нет и они довольно непривычны для школьников. Поэтому задачи с геометрическим параметром нужно решать, начав с достаточно простых и постепенно увеличивая их сложность.

Следует учесть, что при построении чертежа бывает полезно рисовать не примерный эскиз, дающий общее представление о данной геометрической конфигурации, а стремиться именно конструировать чертеж, опираясь на известные геометрические факты. При таком подходе к построению чертежа легче увидеть те идеи, на которых можно «сыграть» в решении. Необходимо изобразить все возможности, формально отвечающие описанной в условии ситуации, а затем, проводя рассуждения параллельно по этим чертежам, выяснить истинную геометрическую конфигурацию.

Но часто, приступая к решению, мы не в состоянии построить чертеж, абсолютно точно отображающий всю специфику конфигурации, о которой идет речь в условии, многие ее особенности бывают завуалированы и вскрываются только в ходе рассуждений. Поэтому важно уметь, прежде всего, выявлять геометрические свойства, существенные в рассматриваемой задаче. Это требует особого внимания и осторожности, поскольку с первого взгляда не всегда очевидно, какие именно особенности конфигурации окажутся существенными и в какой мере допустимо несоответствие между данной конфигурацией и

чертежом. Разумеется, если в процессе решения выясняется, что чертеж явно не соответствует данным задачи, его следует заменить на правильный.

Вторая глава «Разработка факультативного курса «Геометрические задачи с параметром»: практические аспекты» посвящена решению второй задачи исследования. Она включает в себя теоретическое и практическое содержание разработанного школьного факультатива «Геометрические задачи с параметром», описание хода и результата проведенной экспериментальной работы.

В разработанном нами факультативном курсе «Геометрические задачи с параметром» представлены: (1) теоретические сведения; (2) практические задания разных видов («тестовые» и письменные) двух уровней (первого и второго). К первому уровню отнесены «тестовые» задания, которые изучаются в школьном курсе геометрии на базовом уровне. В письменные задания (второй уровень) включены задачи исследовательского характера.

Основная трудность при решении этих задач обычно возникает по следующим причинам:

- планиметрический материал либо был плохо усвоен в основной школе, либо плохо сохранился в памяти;
- для решения задач нужно знать некоторые методы и приемы решения, которые либо не рассматриваются при изучении планиметрии, либо не отрабатываются;
- в «нетипичных» задачах, в которых представлены не самые знакомые конфигурации, надо уметь применять известные факты и решать базисные задачи, которые входят как составной элемент во многие задачи.

Представленный курс «Геометрические задачи с параметром» является практико-ориентированным и предназначен для учащихся 10–11 классов. Количество учебных часов – 34.

Основное содержание курса соответствует современным тенденциям развития школьного курса геометрии, идеям дифференциации, углубления и расширения знаний учащихся. Данный курс дает возможность познакомиться с

нестандартными способами решения планиметрических задач, способствует формированию и развитию таких качеств, как интеллектуальная восприимчивость и способность к усвоению новой информации, гибкость и независимость логического мышления.

Цель курса:

– формирование исследовательских умений посредством решения геометрических задач с параметром.

Структура курса представляет собой пять логически законченных и содержательно взаимосвязанных тем, изучение которых обеспечит системность и практическую направленность знаний и умений учеников. Разнообразный дидактический материал дает возможность отбирать дополнительные задания для учащихся различной степени подготовки. Все занятия направлены на расширение и углубление базового курса. Содержание курса можно варьировать с учетом склонностей, интересов и уровня подготовленности учеников.

*Содержание программы курса*

Тема 1. Взаимное расположение линейных фигур (9 часов).

Взаимное расположение различных точек на прямой. Взаимное расположение точки и отрезка, лежащих на одной прямой. Взаимное расположение прямой и точки вне прямой. Взаимное расположение прямой и двух точек вне прямой. Взаимное расположение точки и двух параллельных прямых.

Тема 2. Взаимное расположение прямолинейных фигур (3 часа).

Взаимное расположение треугольников. Взаимное расположение многоугольников.

Тема 3. Взаимное расположение окружностей (7 часов).

Расположение центров окружностей относительно общей касательной. Расположение центров окружностей относительно их общей точки касания. Расположение центров окружностей относительно общей хорды. Расположение

центров окружностей относительно хорды большей окружности. Расположение точек касания окружности и прямой.

Тема 4. Взаимное расположение элементов фигуры (6 часов).

Выбор обозначений вершин многоугольника. Выбор линейного элемента. Выбор углового элемента. Выбор кругового элемента (дуги). Выбор плоской фигуры.

Тема 5. Соответствие между множеством фигур и множеством их свойств (5 часов).

Неопределенность между значением синуса (косинуса) угла и видом угла. Интерпретация алгебраического решения. Решение задач с параметрами.

Тема 6. Повторение (4 часа).

Подведение итогов. Решение задач. Итоговая контрольная.

Экспериментальная работа проходила на базе МОУ «СОШ №10» Волжского района г. Саратова в 10 классе.

На вводном занятии проводилось тестирование, а также учащимся предлагалось решить две задачи (задачи 1 и 2 из раздела 1).

Тестирование содержало 20 вопросов по теории планиметрии, пройденной в курсе основной школы, направленные на проверку подготовленности учащихся к использованию теоретического материала при решении задач.

Результаты тестирования показали, что в целом знания учащихся, необходимые для дальнейшего изучения задач, удовлетворяют уровню, который нужен учащимся для последующего прохождения факультативного курса. Результат решения двух задач показал, что не все учащиеся на тот момент видели многовариантность в решении, лишь 3 учащихся из 12.

Далее после каждой темы проводилось одно итоговое занятие, направленное на оценку умений видеть неоднозначность при решении задач и находить её решение в зависимости от этого. Таким образом, в ходе решения геометрических задач с параметрами на занятиях факультативного курса у обучающихся формируются определенные исследовательские умения на основе

понимания необходимости рассмотрения всех возможных вариантов решения задачи и построения нескольких чертежей геометрической фигуры, удовлетворяющих условию задачи. К сожалению, завершить апробацию полностью не удалось в связи со сложившейся эпидемиологической обстановкой, поэтому в работе представлены результаты промежуточного итогового занятия по первой теме.

Учеников, предложивших несколько вариантов решения, стало больше чем в начале изучения курса, 8 учащихся из 12. В первой группе учащиеся решили все задачи, при этом 3 и 4 задачи были решены двумя различными способами, во второй группе учащиеся решили 4 задачи из 5, при этом четвертая задача была решена двумя различными способами, третья группа решила 4 задачи из 5, при этом вторая задача была решена двумя различными способами.

При делении на группы в первую очередь был принят во внимание уровень владения теми или иными знаниями, умениями или навыком, определенный в результате входного тестирования. В каждой группе учителем был выбран лидер, ученик который обладал нестандартным мышлением и который на первых занятиях факультатива умел решать задачи разными способами. Факультативные занятия посещали 12 человек, поэтому были сформированы 3 группы по 4 человека, каждая группа включала в себя: одного ученика с высокими учебными способностями (лидера), двух учащихся со средними возможностями и одно с низкими.

Заметим, что уже после изучения первой темы учащиеся начали обращать внимание на возможность многовариантности задачи не только на факультативных занятиях, но и на обычных уроках геометрии.

Результаты экспериментальной работы показывают формирование у учащихся умений, необходимых для решения геометрических задач с параметром, что подтверждает эффективность разработанных нами методических материалов по теме «Задачи по планиметрии с геометрическим параметром».

**Заключение.** В результате проведенного исследования можно сделать следующие выводы:

1. На основе теоретического анализа литературы описан основной понятийный аппарат по теме исследования:

Параметр – величина, числовые значения которой позволяют выделить определенный элемент (например, кривую) из множества элементов (кривых) того же рода.

В задачах с «геометрическими» параметрами в качестве параметра выступает либо геометрическая фигура, либо геометрические отношения между фигурами и элементами фигур.

Такие задачи с геометрическими параметрами часто называют многовариантными задачами или задачами на выбор нужной конфигурации.

В планиметрических задачах под конфигурацией понимается конечное множество точек и прямых, принадлежащих одной плоскости и связанных между собой отношением принадлежности.

Выделены следующие причины, ведущие к неоднозначности трактовки условия задачи:

- Условие задачи не определяет взаимное расположение двух фигур.
- Условие задачи не определяет взаимное расположение точек или элементов фигуры.
- Условие задачи не определяет расположения элементов фигуры.
- В задаче фигурируют объекты, которым приписываются определенные свойства, но не указан порядок соответствия между множеством объектов и множеством их свойств.
- В условии задачи фигурируют две окружности.

2. Разработан и апробирован факультативный курс для учащихся 10-11 классов по теме «Задачи по планиметрии с геометрическим параметром». Разработанный курс состоит из следующих структурных компонентов: цель и задачи факультатива; продолжительность обучения; тематическое планирование; виды и планы некоторых занятий.

Материалы бакалаврской работы могут быть полезны учителям, работающим в 10-11 классах общеобразовательных школ, лицеев, гимназий для подготовки учащихся к ЕГЭ на профильном уровне, а также для осознания учащимися степени своего интереса к предмету и оценки возможности овладения им с точки зрения дальнейшей перспективы.