МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

«Электронный образовательный курс «Применение векторов при решении задач геометрии»

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 3 курса 322 группы

направления ***44.04.01 – Математическое образование***

механико-математического факультета

Седовой Ирины Алексеевны

Научный руководитель

доцент, к.ф-м.н.		М.А.Осипцев
должность, уч.степень, уч.звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Зав.кафедрой

д. ф-м. н., профессор		Д.В.Прохоров
должность, уч.степень, уч.звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2019

Введение

В современном мире информационные технологии пронзили все сферы жизни человека, и сфера образования не является исключением. Использование интернет технологий и дистанционного обучения не является чем-то новым. На сегодняшний день дистанционное обучение позволяет взглянуть на процесс получения образования с другой стороны. С появлением интернета у людей появилась возможность прямого доступа к различным ресурсам, находящимся в сети. Потенциал таких технологий очень высок, именно поэтому не одна область человеческой деятельности сейчас не функционирует без информационных технологий. Активное использование таких технологий в образовании определило место дистанционного обучения[1].

Роль дистанционного образования в современном образовании велика, поэтому тема магистерской работы «Электронный образовательный курс «Применение векторов при решении задач геометрии» является актуальной.

Цель магистерской работы:

- разработка материала для «Электронного образовательного курса «Применение векторов при решении задач геометрии».

Задачи магистерской работы:

- Разработать теоретический и практический материал «Электронного образовательного курса «Применение векторов при решении задач геометрии» в системе «Ipsilon».

- обеспечение образовательного процесса учебно-методическими материалами по теме «Применение векторов при решении задач геометрии», реализуемого в системе дистанционного обучения;

- постоянное совершенствование и обновление комплекса учебно-методических материалов по данной теме.

Данный электронный образовательный курс прошел апробацию МОУ «СОШ с. Пигари»в 2019 году.

Планируемые результаты обучения при использовании электронного образовательного курса: «Применение векторов для решении задач геометрии», а именно цели, которые необходимо достичь, при формировании умений и навыков, выработанных данным курсом:

1. приобретение информации для обучения и установление интеллектуальных умений при изучении основных понятий, при доказательстве теорем и закреплении материала в ходе решения задач.
2. контроль усвоения теоретических знаний при решении задач геометрии.
3. применение знаний и умений при решении учебных задач разного уровня сложности.
4. формирование коммуникативных умений учащихся при работе в группах; организация взаимоконтроля и взаимопроверки на всех уровнях.
5. формирование организационных умений (определение цели, составление плана, его реализация, самоконтроль и самооценка).

Достижение указанных целей в целом приведет к успешному освоению электронного образовательного курса по теме: «Применение векторов при решении задач геометрии» и окажет помощь при сдаче Единого государственного экзамена (ЕГЭ).

Основная часть

1 Векторы на плоскости в пространстве

Одним из фундаментальных понятий современной математики является вектор. Эволюция понятия вектора осуществлялась благодаря широкому использованию этого понятия в различных областях математики, механики, а так же в технике.

Многие физические величины, например, сила, перемещение материальной точки, скорость, характеризуются не только своим числовым значением, но и направление в пространстве. Такие физические величины называются векторными величинами.

Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой – концом, называется вектором [4]. Направление вектора на рисунках изображается отрезком со стрелкой. Векторы обозначают двумя заглавными латинскими буквами со стрелкой над ними ($\overrightarrow{\mathrm{AB}}$).

Длиной или модулем ненулевого вектора $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ называется длина отрезка AB. Длина вектора $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (вектора $\vec{\mathrm{a}}$) обозначается так: $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ ($|\overrightarrow{a}|$). Длина нулевого вектора считается равной нулю: $|\vec{0}| = 0$.

Определение 1.1.*Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.*

Если два ненулевых вектора $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$и $\overrightarrow{CD}$коллинеарны и если при этом лучи AB и CDсонаправлены, то векторы $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$и $\overrightarrow{CD}$ называются *сонаправленными* ($\overrightarrow{\mathrm{AB}}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\downarrow\downarrow\overrightarrow{CD}$), а если эти лучи не являются сонаправленными, то векторы $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$и $\overrightarrow{CD}$ называются *противоположно направленными* ($\overrightarrow{\mathrm{AB}}\downarrow\uparrow\overrightarrow{CD}$). Нулевой вектор условимся считать сонаправленным с любым вектором.

Определение 1.2.*Векторы называются равными, если они сонаправлены и их длины равны.*

Множество всех векторов, равных вектору $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, называют *свободным вектором*. Свободные векторы обычно обозначают малыми латинскими буквами: $\vec{\mathrm{a}}$,$\vec{b}$, $\vec{\mathrm{c}}$, а их длины соответственно - $|\vec{\mathrm{a}}|$, $|\vec{\mathrm{в}}|$, $|\vec{\mathrm{c}}|$.

Свойства сложения векторов:

Для любых векторов $\vec{a}$,$\vec{b}$ и $\vec{c}$справедливы равенства:

1. Переместительный закон $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2. Сочетательный закон $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;

Два ненулевых вектора называются противоположными, если их длины равны и они противоположно направлены. Вектором, противоположным нулевому вектору, считается нулевой вектор. Очевидно, вектор $\overrightarrow{BA}$ является противоположным вектору $\overrightarrow{AB}$.

Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$равна вектору $\vec{a}$. Разность $\vec{a}$ - $\vec{b}$векторов $\vec{a}$и $\vec{b}$ можно найти по формуле $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(\overrightarrow{-b})$, где вектор $(\overrightarrow{-b})$, противоположный вектору $\vec{b}$[1].

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k|\cdot|\vec{a}|$, причем векторы $\vec{a}$и $\vec{b}$ сонаправлены при $k>0$ и противоположно направлены при $k<0$, $|\vec{b}|=|k|\cdot|\vec{a}|$. Произведение нулевого вектора на любое число считается любой вектор.

Из определения произведения вектора на число следует, что для любого числа k и любого вектора $\vec{a}$, векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны. Из этого определения следует также, что произведение любого вектора на число нуль есть нулевой вектор [4].

Основные свойства умножения вектора на число имеют место и для векторов в плоскости, и для векторов в пространстве. Для любых векторов $\vec{a},\vec{b}$ и любых чисел k, l справедливы равенства:

1. $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ сочетательный закон;
2. $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$первый распределительный закон;
3. $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$второй распределительный закон.

2 Компланарность и коллинеарность векторов

Векторы называются компланарными, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости. Другими словами векторы называются компланарными, если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости.

Рассмотрим признак компланарности трех векторов. Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. представить в виде $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где x и y – некоторые числа, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны (рис. 2.1, 2.2) [4].

Рисунок 2.1 - Разложение на плоскости вектор $\vec{c}$ по неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$

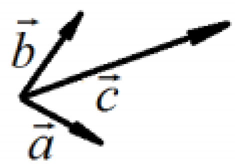

Рисунок 2.2 - Некомпланарные векторы

Если вектор $\vec{p}$ представлен в виде $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, где x, y и z – некоторые числа, то говорят, что вектор $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Числа x, y и z называются коэффициентами разложения.

Теорема 2.1 разложения вектора по трем некомпланарным векторам.

Любой вектор можно разложить по трем данным некомпланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом. [1]

Теорема 2.2 *Если конечная или бесконечная система компланарных векторов содержит хотя бы два неколлинеарных вектора* $\overrightarrow{e1}$ *и* $\overrightarrow{e2}$*, то любой вектор* $\vec{a}$ *этой системы линейно выражается через* $\overrightarrow{e1}$ *и* $\overrightarrow{e2}$*, т. е.*

$$\vec{a}\ e = \alpha\overrightarrow{e1} + \beta\overrightarrow{e2},$$

где α *и* β *— действительные числа.*

Теорема 2.3 *Для того чтобы три вектора* $\overrightarrow{a1}$, $\overrightarrow{a2}$, $\overrightarrow{a3}$ *были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы они были линейно зависимы.*

Доказательство. В самом деле, если система векторов $\overrightarrow{a1}$,$\overrightarrow{a2}$, $\overrightarrow{a3}$ компланарна, то согласно теореме она линейно зависима.

Обратно, пусть система линейно зависима: $\alpha 1\overrightarrow{a1} + \alpha 2\overrightarrow{a2} + \alpha 3\overrightarrow{a3} = 0$

Если, например, $\alpha 3 \neq 0$, то из данного соотношения получаем:

$\overrightarrow{a3} = -\alpha 1\overrightarrow{\alpha 3} \cdot \overrightarrow{a1} - \alpha 2\overrightarrow{a3} \cdot \overrightarrow{a2}$. Если π —некоторая плоскость, параллельная векторам $\overrightarrow{a1}$ и $\overrightarrow{a2}$, то отсюда видно, что $\overrightarrow{a3}$ является вектором, параллельным той же плоскости [9].

3 Координатно-векторный метод решения задач

В пространстве зададим прямоугольную систему координат $Oxyz$. От начала координат в положительных направлениях осей Ox, Oy, Oz проведем соответствующие единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, которые называются координатными векторами или ортами.

Любой вектор $\vec{a}$ можно разложить по координатным векторам, т.е. представить в виде:

$$a = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

при этом коэффициенты разложения x, y, z определяются единственным образом (рис. 3.1)

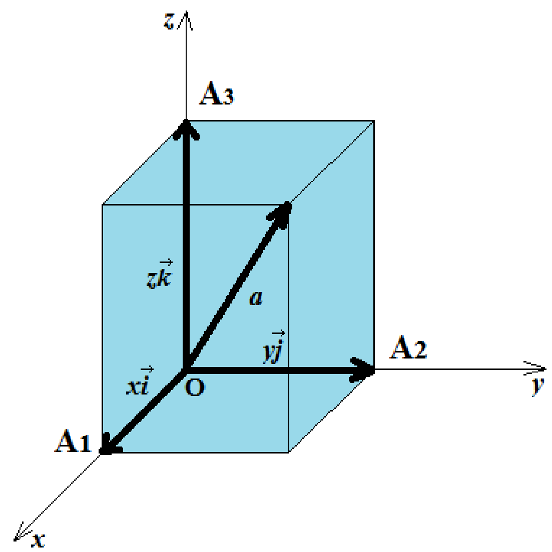

Рисунок 3.1 – Разложение вектора по координатным векторам

Определение 3.1 *Коэффициенты* x,y *и* z *в разложении вектора* $\vec{a}$ *по координатным векторам называются координатами вектора* $\vec{a}$ *в данной системе координат:* $\vec{a}(x;\ y;\ z)$.

Теорема 3.1 *Пусть векторы* $\vec{a}$ *и*$\vec{b}$ *имеют координаты* $\vec{a}(x1;\ y1;\ z1)$, $\vec{b}(x2;\ y2;\ z2)$, α *– данное число,тогда векторы* $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\alpha\vec{a}$ *имеют координаты*$\vec{a} \pm \vec{b} = (x1 \pm x2;\ y1 \pm y2;\ z1 \pm z2)$, $\alpha\vec{a} = (\alpha x1;\ \alpha y1;\ \alpha z1)$.

Теорема 3.2 *Пусть* $A(x1;\ y1;\ z1)$,$B(x2;\ y2;\ z2)$ *тогда, если точка* C *делит отрезок* AB *в отношении* $m:n$, *то координаты точки С вычисляются по формулам:*

$$xc = \left(\frac{1}{m+n}\right)(nx1 + mx2)\ ,$$

$$yc = \left(\frac{1}{m+n}\right)(ny1 + my2)\ ,$$

$$zc = \left(\frac{1}{m+n}\right)(nz1 + mz2)\ .$$

Теорема 3.3. *Пусть* $\vec{a}$ *имеет координаты* $(x;\ y;\ z)$, *тогда длина вектора вычисляется по формуле*

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

Скалярным произведением $\vec{a} \cdot \vec{b}$ двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$между ними: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| * Cos\ \varphi$

Векторным произведением $\vec{a} \times \vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, перпендикулярный к плоскости этих векторов и направленный так, что наименьший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ происходит против хода часовой стрелки, если смотреть с конца вектора (рис.3.2), причем $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| * Sin(\vec{a}\^\vec{b})$.

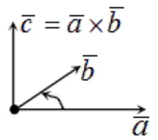

Рис. 3.2- Векторное произведение двух векторов

Метод координат – весьма эффективный и универсальный способ нахождения любых углов или расстояний между стереометрическими объектами в пространстве.

Данный метод решения заключается во введении прямоугольной системы координат, а затем – исчислении образующихся векторов, их длин и углов между ними.

Для вычисления угла между двумя прямыми, а также между прямой и плоскостью во многих случаях удобно использовать скалярное произведение.

Определение 3.2 *Ненулевой вектор называется направляющим вектором прямой* a*, если он лежит либо на прямой* a*, либо на прямой параллельной* a*.*

Определение 3.3 *Две прямые в трехмерном пространстве называются скрещивающимися в случае, если они не находятся в одной плоскости* [11].

Определение 3.4 *Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между проекциями этих прямых в плоскость параллельную обеим прямым.*

Теорема 3.4 *Косинус угла между прямыми AB и CD может быть вычислен по формуле*

$$Cos\alpha = \left|\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|}\right|.$$

Определение 3.5 *Углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее проекцией на эту плоскость*[11].

Теорема 3.5*Синус угла между прямой и плоскостью может быть вычислен по формуле*

$$Sin\varphi = \frac{|n\cdot\vec{a}|}{|n||\vec{a}|},$$

где $\vec{n}$ *– направляющий вектор прямой, перпендикулярный данной плоскости.*

Определение 3.6 *Углом между двумя пересекающимися плоскостями α1 и α2 называется величина меньшего двугранного угла, образованного этими плоскостями* [11].

Теорема 3.6 *Пусть* $\overrightarrow{n1}$ *и* $\overrightarrow{n2}$ *– направляющие вектора прямых перпендикулярных соответственно плоскостям* $\alpha1$*и* $\alpha2$*. Тогда косинус угола между плоскостями находится по формуле*

$$\mathrm{Cos}\varphi = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{n1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{n2}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{n1}}||\overrightarrow{\mathrm{n2}}|}.$$

Для нахождения расстояний в пространстве, необходимо использовать следующие методы.

Определение 3.7 *Расстояние от точки до прямой называют длину перпендикуляра, проведенного из данной точки к данной прямой*[11].

Теорема 3.7 *Пусть точка М не принадлежит прямой АВ. Тогда расстояние от точки до прямой вычисляется по формуле*

$$\rho(M, AB) = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{AB}|}.$$

Определение 3.8 *Расстояние от точки до плоскости называют длину перпендикуляра, который провели из заданной точки к заданной плоскости.*[13]

Теорема 3.8 *Пусть α данная плоскость проходящая через точку А перпендикулярно прямой с направляющим вектором* $\vec{n}$ *, точка* M *не принадлежит плоскости α. Тогда расстояние от точки до плоскости вычисляется по формуле*

$$\rho(M, \alpha) = \frac{|\overrightarrow{AM} \times \vec{n}|}{|\vec{n}|}.$$

Определение 3.9 *Расстояние между скрещивающимися прямыми АВ и CD называется длина общего перпендикуляра к прямым АВ и CD.*

Теорема 3. 9 *Пусть даны прямые АВи CD. Тогда*

$$\rho(AB, CD) = \frac{|(AB \times CD) \cdot AB|}{|AB \times CD|}.$$

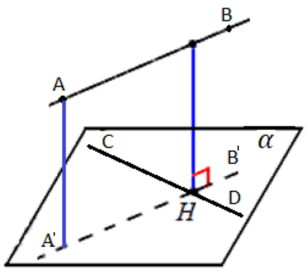

Рисунок 3.11 - Расстояние между прямой и плоскостью

Заключение

В магистерской работе приводятся материалы для электронного образовательного курса по теме «Применение векторов при решении задач геометрии». По данной теме разработана историческая справка, необходимый набор теоретического материала для самостоятельного изучения.

В электронном образовательном курсе приводятся средства контроля в виде тестов, разбитых на несколько уровней сложности. Сопровождают эти тесты полное решение всех вариантов. Данный электронный образовательный курс был апробирован в МОУ «СОШ с. Пигари» Озинского района Саратовской области и по результатам апробации были внесены изменения. Материалы курса были размещены на сайте http://ipsilon-dev.sgu.ru/.

Планируемые результаты обучения при использовании лектронного образовательного курса: «Применение векторовдля решении задач геометрии», а именно цели, которые необходимо достичь, при формировании умений и навыков, выработанных данным курсом:

1. приобретение информации для обучения и установление интеллектуальных умений при изучении основных понятий, при доказательстве теорем и закреплении материала в ходе решения задач.
2. контроль усвоения теоретических знаний при решении задач геометрии.
3. применение знаний и умений при решении учебных задач разного уровня сложности.
4. формирование коммуникативных умений учащихся при работе в группах; организация взаимоконтроля и взаимопроверки на всех уровнях.
5. формирование организационных умений (определение цели, составление плана, его реализация, самоконтроль и самооценка).

Электронный образовательный курс прошел апробацию МОУ «СОШ с. Пигари». В результате апробации получены следующие оценки эффективности курса.

Тесты первого уровня сложности:

№ вопроса	1	2	2	4	5	6	7	8	9	10
% правильных ответов	100	100	100	80	80	80	80	60	60	60

В целом проверочная работа по решению тестов первого уровня сложности показала, что в среднем учениками дано 80% правильных ответов.

Тесты второго уровня сложности:

№ вопроса	1	2	2	4	5	6	7	8	9	10
% правильных ответов	100	80	80	60	60	80	40	40	20	40

6. В целом проверочная работа по решению тестов второго уровня сложности показала, что в среднем учениками дано 60% правильных ответов. Апробация тестов второго уровня сложности показала необходимость поменять местами задания под номерами 6 и 5.

7. Тесты третьего уровня сложности:

№ вопроса	1	2	2	4	5	6
% правильных ответов	80	60	60	40	20	20

В целом проверочная работа по решению тестов третьего уровня сложности показала, что в среднем учениками дано 28% правильных ответов.