МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики её преподавания

Разработка модуля «Многочлены и уравнения» для дисциплины «Практикум по решению математических задач»

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 3 курса 323 группы

направления 44.04.01 Педагогическое образование

механико-математического факультета

Тугушевой Замиры Жумагалиевны

Научный руководитель

доцент, к.п.н., доцент __________________ Т. А. Капитонова

подпись, дата

Зав. кафедрой

к.п.н., доцент __________________ И. К. Кондаурова

подпись, дата

Саратов 2020

Введение. На протяжении всей истории человеческой культуры, математика является ключом к познанию окружающего мира. Математические знания и навыки необходимы практически во всех профессиях, прежде всего, в тех, которые связаны с естественными науками, техникой и экономикой.

Поэтому «изучение и преподавание математики, с одной стороны, обеспечивают готовность учащихся к применению математики в других областях, с другой стороны, имеют системообразующую функцию, существенно влияют на интеллектуальную готовность школьников и студентов к обучению, а также на содержание и преподавание других предметов». В связи с этим одной из задач развития математического образования в Российской Федерации является повышение качества работы преподавателей математики, как действующих, так и будущих; последнее, во многом, обеспечивается и определяется качеством подготовки будущих учителей математики в вузе.

Теория многочленов и алгебраические уравнения высших порядков занимают важное место в алгебре и математике в целом. Многие задания математических олимпиад связаны с темой «Многочлены и уравнения» (В.Г. Болтянский, И.М. Яглом, А.Н. Андреева, А.И. Барабанов, И.Я. Чернявский, Н.Х. Агаханов, И.Л. Бабинская и др.).

Теории многочленов и ее применению при решении уравнений, систем, посвящены многочисленные труды (В.Г. Болтянский, Н.Я. Виленкин, Э.В. Винберг, В.В. Прасолов, С.Л. Табачников, сборники и учебные пособия). Исторически теория многочленов и была создана для решения разных вопросов, связанных с решением алгебраических уравнений произвольной степени.

В СГУ имени Н.Г. Чернышевского в курсах по элементарной математике теме «Многочлены и уравнения» уделяется недостаточно внимания в силу ограниченности аудиторного времени. С целью устранения этого «пробела» возникла необходимость разработать модуль «Многочлены и уравнения».

Все сказанное выше определяет актуальность темы магистерской работы.

Цель магистерской работы: разработать методическое обеспечение модуля «Многочлены и уравнения» курса «Практикум по решению математических задач».

Задачи работы:

1. Проанализировать содержание темы «Многочлены. Алгебраические уравнения» в рабочей программе курса «Практикум по решению математических задач» для педагогов-математиков.

2. Рассмотреть математическое содержание модуля «Многочлены и уравнения».

3. Разработать варианты тренировочных заданий для самостоятельной работы по модулю «Многочлены и уравнения».

4. Разработать итоговый тест по модулю «Многочлены и уравнения» курса «Практикум по решению математических задач».

Методы исследования: анализ учебной и методико-математической литературы; изучение нормативных документов; разработка и апробация методических материалов.

Практическая значимость результатов исследования заключается в том, что разработанный модуль «Многочлены и уравнение» может быть использован при обучении бакалавров направления «Педагогическое образование», профиль «Математическое образование» при изучении курса «Практикум по решению математических задач».

Структура работы: титульный лист, введение, два раздела («Теоретические аспекты модуля «Многочлены и уравнения» в курсе «Практикум по решению математических задач»», «Разработка модуля «Многочлены и уравнения» в курсе «Практикум по решению математических задач»: практические аспекты»), заключение, список использованных источников.

Основное содержание работы. В первом разделе «Теоретические аспекты модуля «Многочлены и уравнения» в курсе «Практикум по решению математических задач»» решались первые две задачи магистерской работы.

В ходе анализа содержания рабочей программы дисциплины «Практикум по решению математических задач» было выявлено, что дисциплина изучается в течение 7 семестров (I-VI, VIII) и состоит из 6 модулей:

1. Практикум по решению задач школьного курса алгебры (I семестр);
2. Практикум по решению задач школьного курса тригонометрии (II);
3. Практикум по решению задач школьного курса анализа (III-IV);
4. Практикум по решению задач школьного курса планиметрии (V);
5. Практикум по решению задач школьного курса стереометрии (VI);
6. Избранные вопросы (VIII).

Содержание модуля «Практикум по решению задач школьного курса алгебры»:

Тема 1. Многочлены.

Тема 2. Рациональные уравнения, неравенства и системы.

Тема 3. Дробно-рациональные уравнения, неравенства, системы.

Тема 4. Иррациональные уравнения, неравенства, системы.

Тема 5. Показательные и логарифмические уравнения, неравенства и системы.

Тема 6.Уравнения, неравенства и системы с параметром.

Трудоемкость модуля «Практикум по решению задач школьного курса алгебры» составляет 18 лекционных часов и 36 часов практических занятий.

Тема «Многочлены» является первой темой курса и включает следующие вопросы: Алгебраические выражения (многочлены). Алгебра многочленов. Теорема о делении многочленов с остатком. Теорема о делении многочлена на двучлен (x-x_0) с остатком. Теорема Безу. Теорема о разложении многочлена на линейные множители. Теорема о разложении многочлена на неприводимые множители.

Тема «Алгебраические уравнения» – составная часть второй темы курса, изучаемого в первом семестре, – посвящена рассмотрению методов решения алгебраических уравнений, неравенств и их систем.

На изучение тем «Многочлены» и «Алгебраические уравнения» отводится 4,5 лекционных часа и 8 часов практических занятий, что явно мало и не гарантирует должного уровня подготовки будущих учителей математики по данной тематике. Заметим, что задачи по теме «Многочлены и алгебраические уравнения» – традиционные для математических олимпиад.

Для качественной подготовки по таким значимым темам школьного курса алгебры целесообразно объединить весь материал в один блок – модуль «Многочлены и уравнения» и разработать соответствующее методическое обеспечение: теоретический материал, тренировочные упражнения разного уровня сложности, включая олимпиадные задачи, итоговый тест по модулю «Многочлены и уравнения».

Во втором пункте первого раздела рассмотрено математическое содержание модуля и определены основные понятия.

Определение 1. Многочленом от одной переменной x называется выражение вида $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, (1)

где a_0, a_1, ..., a_n – некоторые действительные числа, называемые коэффициентами многочлена.

Определение 2. Пусть с – некоторое действительное число. Значением многочлена (1) при $x=c$ называется число, получаемое, если в (1) вместо переменной x подставить число c и произвести указанные действия, т. е. $a_n c^n + \cdots + a_1 c + a_0$.

Для сокращения записи используют функциональную символику для обозначения многочленов, например: $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, тогда значение этого многочлена при $x=c$ обозначают $P(c) = a_n c^n + \cdots + a_1 c + a_0$.

Отметим свойства коэффициентов, используемые при решении задач.

Свойство 1. Значение произвольного многочлена при $x=0$ равно свободному члену этого многочлена.

Действительно, при $x=0$ многочлен принимает значение $P(0)=a_0$.

Свойство 2. Значение произвольного многочлена при $x=1$ равно сумме всех коэффициентов этого многочлена.

Действительно, при $x=1$ многочлен (1) принимает значение $P(1) = a_n + \dots + a_1 + a_0$.

Определение 3. Число c называется корнем многочлена $P(x)$, если $P(\text{c}) = 0$.

Определение 4. Два многочлена n-ой степени называют *равными*, если их каноническая запись одинакова, т.е. коэффициенты этих многочленов соответственно равны.

<u>Действия над многочленами</u>

Теорема 1. Сумма, разность и произведение двух многочленов являются многочленами.

Действительно, если $\mathrm{P}(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $Q(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$ – два многочлена, то выражения

$$\mathrm{P}(x) + Q(x) = (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) + (b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0),$$

$$\mathrm{P}(x) - Q(x) = (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) - (b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0),$$

$$\mathrm{P}(x) \cdot Q(x) = (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) \cdot (b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0)$$

легко приводятся к виду (1) (раскрытием скобок и приведением подобных членов), т.е. являются многочленами.

<u>Деление многочленов</u>

Определение 5. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – два многочлена, причем многочлен $g(x)$ отличен от нуля. Если существует такой многочлен $q(x)$, что $f(x)=g(x)q(x)$, (2)

то говорят, что многочлен $f(x)$ *делится* на многочлен $g(x)$ (или что $g(x)$ является *делителем* многочлена $f(x)$), а многочлен $q(x)$ называют *частным* от деления $f(x)$ на $g(x)$.

<u>Деление многочленов с остатком</u>

Определение 6. Пусть *f(x)* и *g(x)* – два многочлена, причем многочлен *g(x)* отличен от нуля. *Разделить многочлен f(x) на многочлен g(x) с остатком* означает записать многочлен *f(x)* в виде $f(x) = g(x)q(x) + r(x),$ **(**3**)**
где *q(x)* и *r(x)* – некоторые многочлены, причем *r(x)* либо равен нулю, либо имеет меньшую степень, чем многочлен g(x). Многочлен *q(x)* называется частным**,** а многочлен *r(x)* **–** остатком от деления многочлена *f(x)* на *g(x).*

Заметим, что *f(x)* делится на *g(x)* тогда и только тогда, когда остаток от деления *f(x)* на *g(x)* равен нулю.

Теорема Безу и ее следствия

Теорема 7. Остаток от деления многочлена *f (x)* на двучлен $x - a$ равен значению этого многочлена при $x = a$, т.е. равен *f (a).*

Теорема 8 (теорема Безу). Многочлен *f (x)* делится на $x - a$ тогда и только тогда, когда число *a* является его корнем.

Кратность корней и число корней многочлена

Определение 7. Число a называется корнем кратности k для многочлена $f(x)$, если многочлен делится на $(x-a)^k$, но не делится на $(x-a)^{k+1}$.

Если $k = 1$, то корень называется *простым*, если $k > 1$, то корень называется кратным.

Многочлены с целыми коэффициентами

Теорема 10. Если все коэффициенты многочлена $\mathrm{P}(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, являются целыми числами, то всякий целый корень этого многочлена является делителем свободного члена a_0.

Определение 8. Алгебраическим уравнением называется уравнение *f(x)=0*, где *f(x)* – некоторый многочлен. Если *f(x)* – многочлен *n*-ой степени, то уравнение *f(x)=0* называется алгебраическим уравнением *n*-ой степени.

Теорема Виета

Теорема 15 (теорема Виета о корнях). Если $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$, где α_i – корни многочлена *f(x), i=1, 2,…,n*, то имеют место следующие формулы:

$a_0 = (-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n,$

$a_1 = (-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n-1} + \alpha_1 \dots \alpha_{n-2}\alpha_n + \cdots + \alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_n),$

………………………………………………………………

$a_{n-2} = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n,$

$a_{n-1} = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n).$

Во втором разделе «Разработка модуля «Многочлены и уравнения» в курсе «Практикум по решению математических задач»: практические аспекты» решались оставшиеся задачи магистерской работы.

Разработанный модуль по теме «Многочлены и уравнения» включает в себя: теоретический материал; контрольные вопросы для самопроверки; примеры решения задач; задачи для самостоятельного решения; тестирование.

Для закрепления пройденного теоретического материала по теме «Многочлены и уравнения» нами были разработаны три варианта тренировочных упражнений, различающихся по уровню сложности. Уровень А (базовый уровень) – задачи данного уровня сложности позволяют провести оценку минимального уровня подготовленности студента. Уровень В (средний уровень) – представлен задачами повышенной сложности. В уровень С (повышенный уровень) включены задачи повышенной сложности и задания олимпиадного уровня. Для каждого уровня приведем примеры нескольких задач.

Примеры задач уровня А.

Задача. Найти сумму коэффициентов многочлена, полученного после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в выражении

$(x-3)^{2010}(x-2)^{2009}(x-1)^{2008}.$

Решение. Обозначим данное выражение через *f(x).* Используя то, что значение *f(1)* равно сумме коэффициентов многочлена *f(x),* получаем $f(1) = (1-3)^{2010}(1-2)^{2009}(1-1)^{2008} = 0.$

Задача. Разделить многочлен $6x^4 + 5x^3 - 17x^2 + 9x - 5$ на многочлен $3x^2 + 4x - 5.$

Решение.

Произведя деление уголком, находим, что частное равно $2x^2 - x - 1$, остаток равен $8x - 10$.

Ответ. $6x^4 + 5x^3 - 17x^2 + 9x - 5 = (3x^2 + 4x - 5)(2x^2 - x - 1) +$ $+8x - 10$.

Задача. Найти значение многочлена *f(x)* при *x*=a:
$f(x) = x^4 + 5x^3 - 3x + 6, a = 2.$

Примеры задач уровня B.

Задача. Определить все такие целые числа a и b, для которых один из корней уравнения $3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$ равен $1 + \sqrt{3}$.

Задача. Найти действительные решения уравнения $(x+2)^4 + x^4 = 82$.

Задача. При каких значениях *A, B, C* многочлен $f(x) = 2x^3 + Ax^2 - Bx + C$ имеет двукратный корень $x = -3$ и простой корень $x = 2$.

Примеры задач уровня С.

Задача. При каких значениях m корни уравнения $x^3 - 9x^2 + 11x + m = 0$ образуют арифметическую прогрессию? Найдите все корни этого уравнения.

Задача. Существует ли два квадратных трехчлена $ax^2 + bx + c$ и $(a + 1)x^2 + (b + 1)x + (c + 1)$ с целыми коэффициентами, каждый из которых имеет по два целых корня?

Нами разработан вариант итогового теста по теме «Многочлены и уравнения», электронный формат которого создан в системе OnlineTestPad (URL: https://onlinetestpad.com/hm3tb23kj7hd6).

Данный тест предназначен для мониторинга остаточных знаний студентов после изучения темы «Многочлены и алгебраические уравнения».

Инструкция к тесту. Тест содержит 20 заданий. Время прохождения теста – 90 минут. Выполнение каждого из заданий оценивается в один балл. Выборка заданий производится автоматически из сформированной базы тестовых заданий.

Для получения оценки:

– «удовлетворительно» необходимо выполнить не менее 50% заданий;

– «хорошо» – не менее 70% заданий;

– «отлично» – не менее 90 % заданий.

Тест включает в себя 13 заданий с одиночным выбором верного ответа, одно задание с множественным выбором, 5 заданий с вводом числа, одно с прикреплением файла. Приведем примеры двух вопросов.

1 1 из 20

Суммой многочленов: $x^2+5x-3; x^3-5x-13; 2x^2+7,6x+8$ **является многочлен**

1) $4x^2+7,6x+8$

2) $4x^2+7,6x-8$

3) $x^3+3x^2+7,6x+8$

4) $x^3+3x^2+7,6x-8$

20 20 из 20

При каких значениях m **данные уравнения будут равносильны на множестве действительных чисел:** $2x+3=12$ **и** $2x+3=12\cdot m$

- $m=0$
- $m=1$
- $m\in\{0,1\}$
- $m=-1$

Экспериментальная проверка разработанного варианта итогового теста по теме «Многочлены и уравнения» проводилась в дистанционном режиме со студентами 262 группы механико-математического факультета СГУ им. Н.Г. Чернышевского, обучающимся по направлению Педагогическое образование (профиль – Математическое образование).

Проведение тестирования было направлено на формирование практических умений и развитие способностей применять теоретические знания в практической деятельности.

При проведении итогового теста был выявлены задания, которые вызвали наибольшее затруднение при решении. К ним относятся задания с параметром, задания на вычисление кратности корней многочлена, задания на нахождение остатка от деления многочлена на многочлен.

Заключение. В представленной магистерской работе получены следующие результаты:

1. В ходе анализа содержания темы «Многочлены. Алгебраические уравнения» в рабочей программе дисциплины «Практикум по решению математических задач» установлено, что

– темы «Многочлены», «Алгебраические уравнения, неравенства и системы» изучаются в первом семестре и являются начальными в модуле «Практикум по решению математических задач школьного курса алгебры», что обуславливает их важность в предметной подготовке будущего учителя математики;

– на изучение тем «Многочлены» и «Алгебраические уравнения» отводится 4,5 лекционных часа и 8 часов практических занятий, что явно недостаточно, так как не обеспечивает должного уровня подготовки будущих учителей математики по данной тематике;

− наряду с предусмотренной программой формой промежуточной аттестации как экзамен, целесообразно использовать тестовые задания для проведения итогового контроля по теме «Многочлены и алгебраические уравнения»;

– для осуществления качественной подготовки бакалавров направления «Педагогическое образование» (профиль – математическое образование) целесообразно объединить весь материал в один модуль «Многочлены и уравнения».

2. Рассмотрено математическое содержание модуля «Многочлены и уравнения».

3. Разработанные три варианта тренировочных задач, различающихся по уровню сложности, предназначены для самостоятельной работы студентов, но могут использоваться также на практических занятиях по модулю «Многочлены и уравнения» в курсе «Практикум по решению математических задач».

4. Разработан вариант итогового теста по модулю «Многочлены и уравнения» курса «Практикум по решению математических задач», электронный формат которого создан в системе OnlineTestPad (URL: https://onlinetestpad.com/hm3tb23kj7hd6).

Экспериментальная проверка разработанных материалов проводилась со студентами очной формы обучения механико-математического факультета СГУ им. Н.Г. Чернышевского.

По результатам исследования опубликована статья и две методические разработки: (1) «Использование модульной технологии при изучении темы «Многочлены и уравнения»», (2) «Методическая разработка учебного занятия по теме «Многочлены и уравнения»», (3) «Практическое занятие по теме «Многочлены и уравнения»».

Список использованных источников состоит из 29 наименований.