МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики ее преподавания

Задачи повышенной сложности по алгебре в курсе «Методика углубленного обучения математике»

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 3 курса 323 группы

направления 44.04.01 Педагогическое образование

механико-математического факультета

Мартыновой Екатерины Максимовны

Научный руководитель

доцент, к.п.н., доцент ____________________ Т. А. Капитонова

подпись, дата

Зав. кафедрой

к.п.н., доцент ____________________ И. К. Кондаурова

подпись, дата

Саратов 2020

Введение. Одной из составляющих основ профессионализма учителя является знание преподаваемого предмета, о чем говорится в работах С.Н. Дорофеева, И.В. Егорченко, Т.А. Ивановой, А.Г.Мордковича, И.А. Новик, М.А. Родионова, Г.И. Саранцева, Р.А. Утеевой и др. Собственно, во многом для формирования такого знания в учебные планы вузов был введен курс «Методика углубленного обучения математике», что, однако, не решило всех проблем. Необходима, в частности, целенаправленная и последовательная работа преподавателей педвузов по подготовке будущих учителей математики к обучению учащихся общеобразовательных учреждений методам решения задач повышенной сложности по алгебре.

Анализ методической литературы в контексте темы нашего исследования показал, что имеются работы, посвященные вопросам методики изучения задач повышенной сложности по алгебре: изучения в средней школе функциональных понятий (А.И. Жаворонкова, Ю.Н. Макарычева, Е.И. Лященко, И. В. Антоновой и др.); решений различных видов уравнений и неравенств, связанных с использованием равносильных замен (А.Н. Бекаревича, Н.Я. Виленкина, Р.А. Рыбаковой, В.А. Герлингера и др.); взаимосвязи понятия функции с понятиями линии уравнений и неравенств с параметром (А.А. Ундуск, Л.И. Токаревой, Л.П. Афонькиной, Н.А. Ильиной и др.); интеграции алгебраических и графических методов в обучении математике (М.И. Башмакова,.С. Капкаевой, Н.А. Резник и др.); решению задач с параметрами (И.Н. Литвинова, В.В. Мирошин, М.В.Фалиева и др.).

В СГУ имени Н, Г. Чернышевского подготовка будущих педагогов-математиков складывается из предметной и профессиональной (психолого-педагогической и методической). В структуру предметной подготовки входят курсы «Элементарная математика» и «Практикум по решению математических задач», в которых, в частности, рассматриваются методы решения задач повышенной сложности по алгебре. Эти дисциплины изучаются параллельно с дисциплинами профессионально-методической подготовки, одна из которых – «Методика углубленного обучения математике».

Цель магистерской работы: провести анализ тематики задач повышенной сложности по алгебре в курсе «Методика углубленного обучения математике» и разработать дидактические материалы по теме «Задачи с параметрами» курса «Методика углубленного обучения математике» для бакалавров направления подготовки «Педагогическое образование» (профиль – математическое образование).

Для достижения поставленной цели были поставлены следующие задачи:

1. Проанализировать тематику задач повышенной сложности по алгебре в рабочей программе дисциплины «Методика углубленного обучения математике».

2. Рассмотреть теоретическое и практическое содержание темы «Задачи с параметрами» в курсе «Методика углубленного обучения математике».

3. Разработать варианты входного и итогового тестов и задания для самостоятельной работы по теме «Задачи с параметром» курса «Методика углубленного обучения математике».

Методы работы: изучение нормативных документов, анализ учебной и методико-математической литературы, разработка и апробация дидактических материалов.

Практическая значимость исследования заключается в том, что разработанные дидактические материалы по теме «Задачи с параметром» могут быть использованы в курсе «Методика углубленного обучения математики» при обучении бакалавров направления «Педагогическое образование» (профиль – математическое образование).

Структура магистерской работы: титульный лист, введение, два раздела («Задачи повышенной сложности по алгебре в курсе «Методика углубленного обучения математике»: теоретические аспекты»; «Задачи повышенной сложности по алгебре в курсе «Методика углубленного обучения математике»: практические аспекты», заключение, список использованных источников.

Основное содержание работы. В первой главе «Задачи повышенной сложности по алгебре в курсе «Методика углубленного обучения математике»: теоретические аспекты» решались первые две задачи магистерской работы.

Согласно рабочей программе, целью освоения дисциплины «Методика углубленного обучения математике» бакалаврами ФГБОУ ВО «Саратовского национального исследовательского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского», механико-математического факультета, направление подготовки «Педагогическое образование», профиль подготовки «Математическое образование», является овладение профессиональными знаниями и умениями для формирования готовности решать следующие профессиональные задачи в области педагогической деятельности: (1) использование технологий, соответствующих возрастным особенностям обучающихся и отражающих специфику предметной области «математика»; (2) осуществление профессионального самообразования и личностного роста.

Дисциплина по выбору «Методика углубленного обучения математике» изучается в течение VII-VIII семестров и включает в себя два модуля: «Методика углубленного обучения геометрии» и «Методика углубленного обучения алгебре и началам анализа».

Содержание данного модуля включает в себя следующие темы: «Требования ФГОС СОО к предметным результатам освоения углубленного курса математики. Основные содержательные линии ШКМ (алгебра и начала анализа)»; «Методика изучения комплексных чисел»; «Методика изучения уравнений, неравенств с параметрами»; «Методика решения задач ЕГЭ «типа С»; «Методика изучения взаимно обратных функций»; «Изучение бесконечно убывающей геометрической прогрессии»; «Методика изучения предела и непрерывности функции»; «Методика изучения производной и ее приложений»; «Методика изучения интеграла и его приложений»; «Изучение дифференциальных уравнений в ШКМ»; «Изучение классических неравенств и их применения к решению задач».

На изучение темы «Методика изучения уравнений, неравенств с параметрами» отводится 3-4 часа, что явно недостаточно и требует дополнительного времени, который рабочей программой отводится на самостоятельную работу студентов.

Программой предусматриваются следущие формы промежуточной аттестации: контрольная работа, дифференцированный зачет.

Возникает необходимость, на наш взгляд, разнообразить существующие формы контроля и оценки знаний бакалавров, обучающихся по направлению подготовки «Педагогическое образование» (профиль «математическое образование»), дополнив их тестами для осуществления диагностического (входного) и итогового контроля знаний.

Задачам с параметрами посвящена отдельная тема курса и, кроме того, они рассматриваются в следующей теме, так как задачи с параметрами обязательно включены в материалы ЕГЭ профильного уровня. Дисциплина «Методика углубленного обучения математике» изучается параллельно с курсом элементарной математики (дисциплина «Практикум по решению математических задач»), в котором, в частности, рассматриваются методы решения задач повышенной сложности по алгебре, в том числе методы решения уравнений, неравенств и систем с параметром.

Н.В. Кострикина под задачей повышенной сложности понимает:

– задачи, для решения которых не требуются знания программного материала соответствующего класса;

– задачи, тесно связанные с изучаемым на уроках алгебры материалом. Задачи первого типа могут быть решены учениками в любое время учебного года, а задачи второго типа могут быть использованы по мере изучения соответствующего программного материала.

В отличие от задач базового уровня простой тренировкой «натаскать» на задачи повышенного уровня сложности невозможно. Однако рассмотрение большого числа примеров, иллюстрирующих различные методы, безусловно, способствует овладению навыком решения таких задач.

Решение задач с параметрами является одним из самых трудных разделов математики. При решении задач с параметрами требуется, кроме хорошего знания стандартных методов решений уравнений и неравенств, умение проводить довольно разветвленные логические построения, аккуратность и внимательность для того, чтобы не потерять решений и не приобрести лишних. Это требует от учащихся более развитого логического мышления и математической культуры, но, в свою очередь, эти задачи сами же способствуют их развитию.

Исследователи в области теории и методики обучения математике подчеркивают важность обучения учащихся методам решения уравнений с параметрами, так как задания такого рода содержаться в ЕГЭ, олимпиадных заданиях

При решении задач с параметрами происходит систематизация математических знаний таких линий, как функциональная линия, линия уравнений, неравенств и их систем, с другой стороны, параметры привносят богатейший спектр идей, методов и подходов. «Уравнения и неравенства с параметрами – это тема, на которой проверяется не уровень «натасканности» ученика, а подлинное понимание им материала».

Сталкиваясь с задачами с параметром можно убедиться, что авторы учебных пособий свободно трактуют это понятие. Приведем несколько определений, данных разными авторами в различных пособиях.

С. И. Новоселов в «Специальном курсе элементарной алгебры» привел определение «Рассмотрим некоторое аналитическое выражение, содержащие две группы аргументов. Будем для определенности обозначать аргументы одной группы последними буквами латинского алфавита, например $x,y,z...$ и называть их по-прежнему аргументами, а аргументы второй группы обозначать первыми буквами алфавита, например $a,b,c...$ и называть их параметрами».

Моденов П.С., Новоселов С.И. «Если в уравнении кроме неизвестных входят числа, обозначенные буквами, то они называются параметрами».

В.И. Голубев дает следующее определение понятия «параметр»: «Параметром называется независимая переменная, значение которой в данной задаче считается фиксированным».

Основные виды уравнений (систем уравнений) содержащих параметр.

1. Линейные и квадратные уравнения, содержащие параметр.

2. Дробно-рациональные уравнения, содержащие параметр, сводящиеся к линейным и квадратным.

3. Иррациональные уравнения, содержащие параметр.

4. Показательные уравнения, содержащие параметр

5. Логарифмические уравнения, содержащие параметр

6. Тригонометрические уравнения, содержащие параметр

7. Системы уравнений с параметрами

Основные виды неравенств (систем неравенств) содержащих параметр.

1. Линейные неравенства и неравенства, приводимые к линейным

2. Квадратные неравенства.

3. Иррациональные неравенства, содержащие параметр

4. Показательные и логарифмические неравенства, содержащие параметр

5. Тригонометрические неравенства, содержащие параметр

6. Системы неравенств с параметрами

Основные методы решения задач с параметром.

I. Аналитический метод. Это метод так называемого прямого решения, повторяющего стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра. По мнению авторов, аналитический метод решения задач с параметром есть самый трудный метод, требующий высокой грамотности и наибольших усилий по овладению им .

II. Графический метод. В зависимости от задачи (с переменной x и параметром a) рассматриваются графики или в координатной плоскости $(x; y)$, или в координатной плоскости $(x; a)$. Исключительная наглядность и красота графического способа решения задач с параметром настолько увлекает изучающих тему «Задачи с параметром», что они начинают игнорировать другие способы решения, забывая общеизвестный факт: для любого класса задач их авторы могут сформулировать такую, которая блестяще решается данным способом и с колоссальными трудностями остальными способами. Поэтому на начальной стадии изучения опасно начинать с графических приемов решения задач с параметром.

Чаще всего используется комбинация этих двух методов. В рамках каждого метода существуют различные приемы (например, прием выделения полного квадрата), способы (например, решение относительно параметра).

Во второй главе «Задачи повышенной сложности по алгебре в курсе «Методика углубленного обучения математике»: практические аспекты» решалась третья задача магистерской работы.

Были разработаны три варианта задач различного уровня сложности: базового – вариант А, среднего – вариант В и повышенного уровня – вариант С.

В качестве примера приведем несколько задач:

<u>Вариант А –1.</u>

1. Решить уравнение $5 + ax = 4x + 2$.

Решение. $ax - 4x = -7 \Leftrightarrow x(a - 4) = -7$.

Если $a - 4 = 0$, то есть $a = 4$, то нет действительных корней; если $a - 4 \neq 0$, то есть $a \neq 4$, то $x = \frac{-7}{a-4}$.

Ответ. При $a = 4$ нет действительных корней; при $a \neq 4 -$ корень $x = \frac{-7}{a-4}$.

2. При каких значениях m уравнение $0{,}5(5x - 1) = 4{,}5 - 2m(x - 2)$ имеет корень? Найдите этот корень.

Решение. $2{,}5x - 0{,}5 = 4{,}5 - 2mx + 4m; x(2{,}5 + 2m) = 5 + 4m; x(2m + 2{,}5) = 2(2m + 2{,}5)$; если $2m + 2{,}5 \neq 0, \text{т.е.}\, m \neq -1{,}25,$ то уравнение имеет единственный корень $x = \frac{2(2m+4{,}5)}{2m+4{,}5} = 2$. Если $2m + 2{,}5 \neq 0$, т.е. $2m + 2{,}5 \neq 0$, т.е. $m = -1{,}25$, то уравнение имеет вид $x \cdot 2 = 2 \cdot 0$, т.е. $0 \cdot x = 0$. В этом случае корнем уравнения является любое $x \in R$.

Ответ. При любом m уравнение имеет корень, причем при $m \neq -1{,}25$ корень $x = 2$, при $m \neq -1{,}25$ корнем является любое действительное число.

3. При каких значениях p уравнение $2(p - 2x) = px + 3$ не имеет корней?

Решение. $2p - 4x = px + 3; px + 4x = 2p - 3; x(p + 4) = 2p - 3;$ если $p + 4 \neq 0$, т. е. $p \neq -4$, то уравнение имеет единственный корень $x = \frac{2p-3}{p+4}$. Если $p = -4$,то уравнение примет вид $x \cdot 0 = 11$, т. е. $0 = 11$, что неверно. В этом случае уравнение корней не имеет.

Ответ. При $p = -4$ уравнение не имеет корней.

4. Для каждого значения b решите уравнение: $(b + 3)(b - 1)x = b + 3$.

Решение. Если $b = 1$, то $0 \cdot x \neq 4$, нет решений.

Если $b = -3$, то имеем: $0 \cdot x = 0$, т.е. уравнение имеет бесконечное множество решений. В этом случае корнем уравнения является любое $x \in R$.

Если $b \neq 1, b \neq -3$, то $x = \frac{b+3}{(b-1)(b+3)} = \frac{1}{b-1}$ – уравнение имеет единственный корень, вычисляемый по формуле: $x = \frac{1}{b-1}$.

Ответ. При $b = 1$ нет корней; при $b = -3$ уравнение имеет бесконечное множество корней; при $b \neq -3, b \neq 1$ уравнение имеет единственный корень $x = \frac{1}{b-1}$.

5. При каких значениях k система уравнений $\begin{cases} 3x - y = 10 \\ 9x - 3y = k \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений?

Решение. Применим метод алгебраического сложения. Для этого первое уравнение системы умножим на (-3) и прибавим ко второму уравнению системы, получим: $0 = k - 30$ или $k = 30$.

Ответ. $k = 30$.

6. При каких значениях p система уравнений $\begin{cases} x - 5y = 2 \\ x - 5y = 1 - p^2 \end{cases}$ не имеет решений?

Решение. $2 = 1 - p^2 \Leftrightarrow 1 + p^2 = 0 -$ неверное равенство, т.к. $1 + p^2 > 1$.

Ответ. Ни при каких p.

Вариант В-2.

1. Для каждого значения параметра a определите количество решений уравнения $x^2 - 3|x| = a$. // при $a < -\frac{9}{4}$ решений; при $\left[\begin{array}{l} a = -\frac{9}{4} \\ a > 0 \end{array}\right.$ два корня; при $a = 0$ три корня.

2. Сколько решений имеет уравнение $a\,\mathrm{ct}g\,x - 1 = \cos 2x$ на отрезке $0 \le x \le 2\pi$? // 2 решения при $a = 0$ и $|a| > 1$, 4 решений при $|a| = 1$, 6 решений при $0 < |a| < 1$.

3. Решите неравенство $|x - a| \le a + 1$. // при $a < -1, x \in \emptyset$; при $a = -1, x = -1$; при $a > -1, -1 \le x \le 2a + 1$.

4. Определите, при каких значениях параметра a уравнение$|\ x - 2| = a \log_2 |\ x - 2|$ имеет ровно два решения. // $a < 0,\ \ a = eln2$.

5. При каких a множество решений уравнения $(2a^2 - a - 1)x = 5a - 5$ и неравенства $(6a^2 + a - 1)x \ge 3a + 2$ совпадают? // при $a = -0{,}5$.

6. Найти все значения параметра a, при которых множество решений неравенства: $2 + \sqrt{x^2 + ax} > x$ содержит отрезок [4;7]. // $a \in (-3; +\infty)$.

В ходе экспериментальной работы студенты прошли входное и итоговое тестирование.

По результатам входного тестирования были построены диаграммы правильных ответов. С помощью данных диаграмм можно определить: количество правильных ответов теста, какие именно вопросы вызывают наибольшую сложность у студентов.

На диаграмме (рисунок 1) показано количество правильных ответов на вопросы теста.

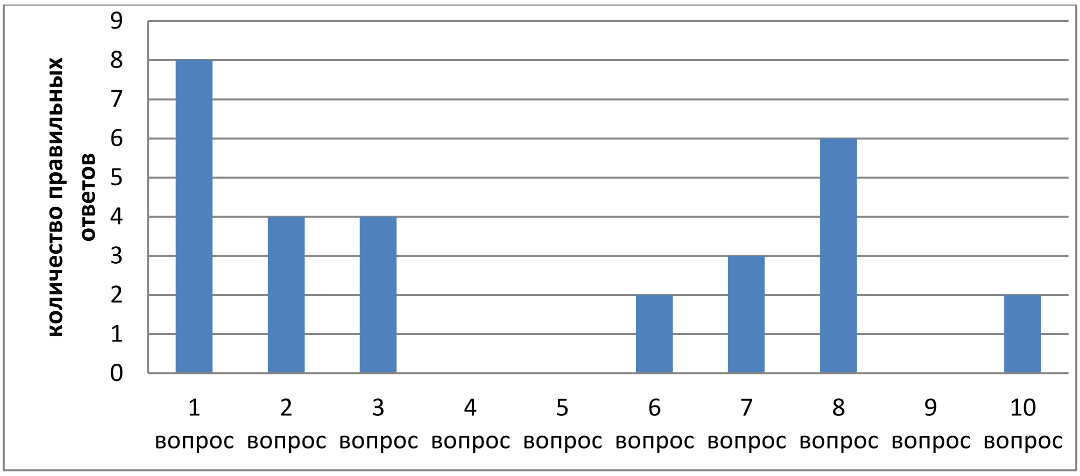

Рисунок 1 – Результаты входного тестирования (количество ответов на каждый вопрос)

По результатам итогового тестирования были построены диаграммы правильных ответов. С помощью данных диаграмм можно определить количество правильных ответов теста, какие именно вопросы вызывают наибольшую сложность у студентов.

На диаграмме (рисунок 2) показано количество правильных ответов на вопросы тестов.

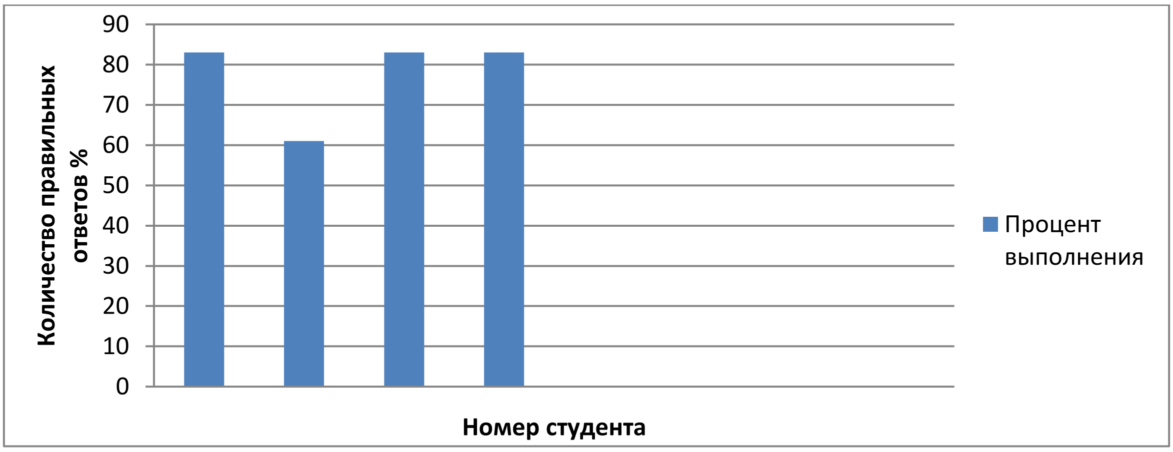

Рисунок 2 – Результаты итогового теста

После прохождения тестов студентам предлагалось «выбрать» три самых простых и три самых сложных, на их взгляд, вопроса. На диаграмме (рисунок 3) показано распределение сложности вопросов итогового теста.

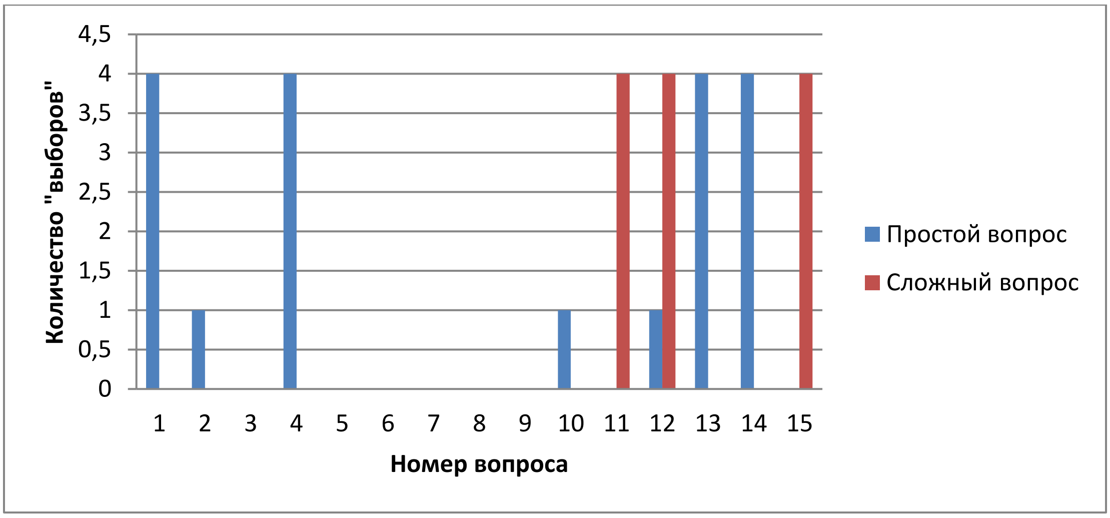

Рисунок 3 – Распределение сложности вопросов итогового теста

Заключение. Основные результаты бакалаврской работы:

1. В ходе анализа содержания рабочей программы дисциплины «Методика углубленного обучения математике» для бакалавров направления подготовки «Педагогическое образование», (профиль «Математическое образование») выбрана тема «Задачи с параметром», так как задачи с параметрами относятся к задачам повышенной сложности школьного курса алгебры.

Показана необходимость: (1) дополнить перечень заданий для самостоятельной работы студентов заданием по теме «Задачи с параметрами»; (2) разнообразить существующие формы контроля и оценки знаний студентов по курсу «Методика углубленного обучения математике», дополнив их тестами для осуществления диагностического (входного) и итогового контроля знаний.

2. Рассмотрено теоретическое и практическое содержание темы «Задачи с параметрами».

3. Разработаны варианты входного и итогового тестов и три варианта заданий различного уровня сложности для самостоятельной работы по теме «Задачи с параметром» курса «Методика углубленного обучения математике».

Экспериментальная проверка разработанных материалов проводилась со студентами заочной формы обучения механико-математического факультета СГУ им. Н.Г. Чернышевского.