

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математического анализа

**Электронный образовательный курс
«Вписанные и описанные четырехугольники»**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 3 курса 322 группы

направления 44.04.01 – Педагогическое образование

механико-математического факультета

Бодрилова Павла Александровича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н.

Ю.В.Матвеева

Заведующий кафедрой
и.о.зав.кафедрой, к.ф.-м.н.

А.М.Захаров

Саратов 2020

Введение. Математика развивает базовые и прикладные навыки знакового, логического, наглядно-образного, операционального видов мышления. В арифметике и алгебре числовые выражения, и выражения с переменными - это знаковые формы, использующие цифры и переменные. Цифры и буквы обозначают числа, знаки арифметических и логических операций обозначают действия. Все это создает знаковую модель реальности, помогает ее преобразовывать и развивает знаковое и логическое мышление. В процессе тождественных преобразований, решения уравнений и неравенств развивается логическое мышление. Геометрия, в свою очередь, развивает наглядно-образное мышление. Способствуют этому задачи на построение. Аккуратное построение чертежа помогает развить операциональное мышление. То есть, при изучении материала и решении задач интеллект развивается всесторонне.

Образовательный, развивающий потенциал математики огромен.

Опираясь на статистические данные результатов проведения ЕГЭ говорят о том, что наименьший процент верных ответов традиционно дается учащимися на геометрические задачи.

Повсеместное введение Единого государственного экзамена по всем предметам школьного курса и замена вступительных экзаменов на ЕГЭ во всех российских вузах делает более актуальной организацию подготовки к Единому государственному экзамену, а геометрия остается одной из самых сложных тем для выпускников. Однако единый государственный экзамен базового и профильного уровня составлен таким образом, что без специальной подготовки выполнить все задания, основываясь на базе знаний, полученных в ходе изучения школьной программы невозможно. И здесь на первое место в подготовке к экзамену выходят элективные курсы, которые направлены на углубление знаний и закрепление ранее полученных навыков по решению сложных задач.

В представленной работе 5 глав. В первой главе «Методика изучения темы вписанные и описанные четырехугольники» производится анализ материала о вписанных и описанных четырехугольниках в школьных учебниках геометрии. Во второй главе «Теоретический материал» рассмотрены основные понятия вписанных и описанных четырехугольников, их основные свойства и теоремы с доказательствами. В третьей главе «Тесты 1-го уровня

сложности» представлен один из вариантов заданий с решениями первого (начального) уровня сложности электронного образовательного курса. В четвертой главе «Тесты 2-го уровня сложности» представлен один из вариантов заданий с решениями второго (среднего) уровня сложности электронного образовательного курса. В пятой главе «Тесты 3-го уровня сложности» представлен один из вариантов заданий с решениями третьего уровня сложности (задания ЕГЭ) электронного образовательного курса. Библиографический список состоит из 14 источников.

Тема «вписанные и описанные четырехугольники» является одной из основных в курсе геометрии 7-9 классов. Однако ее изучение ограничивается вписанными и описанными треугольниками и правильными многоугольниками. В новых стандартах по математике профильного уровня обучения в курсе геометрии 10-11 классов предусматривается изучение вписанных и описанных четырехугольников, в частности, необходимых и достаточных условий вписанности и описанности, теоремы Птолемея и др. Однако, для успешного выполнения этих задач, входящих в ЕГЭ, нужна специальная подготовка. Настоящее исследование предназначено для реализации решения данной проблемы.

Целью данной работы является разработать электронный образовательный ресурс (ЭОР) по теме «вписанные и описанные четырехугольники» для 7-9 классов. При написании работы необходимо решить следующие задачи: при реализации электронного курса необходимо провести анализ литературы по выбранной теме и разработать теоретическое, и практическое содержание ЭОР «вписанные и описанные четырехугольники» в системе «Ipsilon»;

Разработанный электронный образовательный курс заданий по теме «вписанные и описанные четырехугольники» предназначен для уроков математики, а также элективных курсов по математике, подготовки к ЕГЭ и послужит хорошей основой для усвоения данной темы на более глубоком уровне.

Основное содержание работы. В евклидовой геометрии описанный четырёхугольник — это выпуклый четырёхугольник, стороны которого являются касательными к одной окружности внутри четырёхугольника. Эта

окружность называется вписанной в четырёхугольник. Описанные четырёхугольники являются частным случаем описанных многоугольников.

Все треугольники имеют вписанные окружности, но не все четырёхугольники. Примером четырёхугольника, в который нельзя вписать окружность, может служить прямоугольник, не являющийся квадратом.

В описанном четырёхугольнике четыре биссектрисы пересекаются в центре окружности. И наоборот, выпуклый четырёхугольник, в котором четыре биссектрисы пересекаются в одной точке, должен быть описанным, и точка пересечения биссектрис является центром вписанной окружности.

Если противоположные стороны в выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ (не являющийся трапецией) пересекаются в точках E и F , то они являются касательными к окружности тогда и только тогда, когда:

$$BE + BF = DE + DF \text{ или } AE - EC = AF - FC$$

Другое необходимое и достаточное условие — выпуклый четырёхугольник $ABCD$ является описанным в том и только в том случае, когда вписанные в треугольники ABC и ADC окружности касаются друг друга.

Теорема 1. В описанном выпуклом четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны.

Теорема 2 (Обратная к теореме 1). Если в выпуклом четырёхугольнике равны суммы противоположных сторон, то в него можно вписать окружность.

Основные свойства четырёхугольника, описанного около окружности:

1. Четырёхугольник $ABCD$ можно описать около окружности, если суммы противоположных сторон равны $AB + CD = BC + AD$.
2. Если четырёхугольник описан около окружности, то суммы противоположных сторон равны.
3. Площадь: $S = p \cdot r$, где r - радиус вписанной окружности, а $p = \frac{(a + b + c + d)}{2}$ - полупериметр.

Теорема 3. Если в параллелограмм вписана окружность, то он - ромб.

Теорема 4. Если в прямоугольник вписана окружность, то он - квадрат.

Теорема 5. Биссектрисы всех внутренних углов описанного четырёхугольника пересекаются в одной точке - центре вписанной окружности.

Дельтоид (от др.-греч. дельтовидный, напоминающий заглавную букву дельта) - четырёхугольник, четыре стороны которого можно сгруппировать в две пары равных смежных сторон.

Свойства дельтоида:

1. Углы между сторонами неравной длины равны.
2. Диагонали взаимно перпендикулярны.
3. Точка пересечения диагоналей делит одну из них пополам.
4. Одна диагональ делит дельтоид на два равных треугольника.
5. В любой выпуклый дельтоид можно вписать окружность.

Четырёхугольник называется вписанным в окружность, если окружность проходит через все его вершины. Пусть четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Эта окружность называется описанной.

Выпуклый четырёхугольник является вписанным тогда и только тогда, когда четыре серединных перпендикуляра, проведённых к каждой из сторон, пересекаются в одной точке.

Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда противоположные углы в сумме дают 180° .

Верно и обратное: если сумма противолежащих углов четырёхугольника равна 180° , то около этого четырёхугольника можно описать окружность. Докажем это.

Теорема 6. Около параллелограмма можно описать окружность тогда и только тогда, когда этот параллелограмм есть прямоугольник.

Теорема 7. Около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда она равнобедренная.

Теорема 8. Если около ромба описана окружность, то он – квадрат.

Определение (Неравенство Птолемея). Для любых точек A, B, C, D плоскости выполнено неравенство

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $ABCD$ выпуклый вписанный четырёхугольник или точки A, B, C, D лежат на одной прямой.

Неравенство Птолемея утверждает, что произведение длин двух диагоналей p и q четырёхугольника равно сумме произведений противоположных сторон, только если четырёхугольник вписан: $p \cdot q = a \cdot c + b \cdot d$.

Теорема 9 (О пересекающихся хордах). Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда:

$$\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} = \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{D}{2} = 1$$

Теорема 10 (Птолемея). Произведение диагоналей вписанного четырёхугольника равно сумме произведений противоположных сторон.

Теорема 11. Если четырёхугольник вписан в окружность, то суммы противоположных углов равны 180° .

Теорема 12 (Обратная). Если в четырёхугольнике сумма двух противоположных углов равна 180° , то около такого четырёхугольника можно описать окружность.

Теорема 13. В описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны.

Теорема 14. Около выпуклого четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность тогда и только тогда, когда $\angle ABD = \angle ACD$. В соответствии с рисунком представлен выпуклый четырёхугольник $ABCD$.

1. Четырёхугольник можно вписать в окружность, если сумма противоположных углов равна 180° : $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$;
2. Сумма произведений противоположных сторон четырёхугольника $ABCD$ равна произведению диагоналей: $AB \cdot DC + AD \cdot BC = BD \cdot AC$;
3. Площадь: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где $p = \frac{(a+b+c+d)}{2}$ - полупериметр четырёхугольника.

Проведем анализ материала по данной теме из учебников геометрии, рекомендованных Министерством Образования и Науки Российской Федерации к применению в образовательном процессе в общеобразовательных учреждениях.

Наиболее подробно тема «Вписанные четырехугольники» изложена в учебнике И.Ф. Шарыгина в параграфе 8.5 «Вписанные и описанные четырехугольники». В остальных учебниках таких параграфов нет. Понятие вписанных и описанных четырехугольников вводится в 8 классе. Сразу после параграфа представлен материал, относящийся к практической части по данной теме: задачи, задания, вопросы.

В учебнике геометрии под редакцией Л.С.Атанасяна нет отдельных разделов «Вписанные и описанные четырехугольники». О них говорится в параграфе 4 «Вписанная и описанная окружность» главы 8. Практический материал в данном учебнике содержится сразу после данного параграфа.

В учебнике под редакцией А.Д.Александрова нет отдельного параграфа. Параграф «Вписанные и описанные окружности» делится на несколько пунктов. В пункте «Окружность, описанная около многоугольника» говорится, что около многоугольника можно описать окружность, если найдется точка, равноудаленная от всех его вершин. Остальные признаки и свойства предлагают вывести или доказать самостоятельно в задачах. Практический материал относится ко всему параграфу.

В учебнике под редакцией И.М.Смирновой о вписанных и описанных четырехугольниках говорится в главе 6 «Многоугольники и окружность». Однако, в параграфе 36 «Многоугольники, вписанные в окружность» свойство вписанного четырехугольника вводят в качестве примера (условие задачи с решением).

В учебнике геометрия А.В.Погорелова такая тема как «Вписанные и описанные четырехугольники» не рассматривается, кроме вписанного квадрата в параграфе 13, в качестве правильного многоугольника.

Доказательства теорем в данных учебниках приводятся в готовом виде.

Данные учебники имеют значительные различия. В учебнике под редакцией И.Ф.Шарыгина на изучение в 8 классе темы «Вписанные и описанные четырехугольники» отводится 4 часа. В учебнике Л.С.Атанасяна

на изучение в 8 классе этой темы отводится всего 2 часа. В учебниках А.Д.Александрова и И.М.Смирновой на изучение этой темы отводится также не более 3 часов. Практические задания темы «Вписанные и описанные четырехугольники», предлагаемые в учебниках И.М.Смирновой, Л.С.Атанасяна и И.Ф.Шарыгина, в отличие от учебников под редакцией А.В.Погорелова и А.Д. Александрова, располагаются в конце каждого пункта после изученного материала. В учебнике под редакцией Л.С.Атанасяна в конце главы имеется список заданий, предлагаемых с целью обобщения темы.

Анализ школьных учебников показал, что рассмотрение этой темы в том объеме, который описан в учебниках, явно недостаточно для решения задач ЕГЭ типа 16 (С4). Следовательно, возникает необходимость в рассмотрении дополнительного материала по данной теме, т.е. необходимость в разработке и проведении элективных занятий.

Признаки и свойства вписанных и описанных четырехугольников – мощный аппарат для решения задач. Анализ решения задач по теме позволяет классифицировать их по уровню сложности следующим образом:

1. Задачи на вычисление, с применением основных определений;
2. Задачи на доказательство, что около четырехугольника можно описать окружность (в четырехугольник можно вписать окружность);
3. Задачи на доказательство и вычисление.

Чтобы помочь учащимся овладеть сложным умением решать задачи с помощью свойств и признаков вписанных и описанных четырехугольников, необходимо проанализировать, из каких операций состоит это умение.

Одновременно с выделением операций, из которых состоит действие решения задач с помощью вписанных и описанных четырехугольников, предлагаются примеры заданий по формированию этих операций. Такими операциями являются следующие:

1. Выделение в задаче условия и заключения. Подсчет количества данных и требований, что особенно эффективно в начале процесса обучения решению задач. В курсе геометрии это необходимо для выполнения последующей операции –получения следствий.
2. Перевод в тексте задачи обычной речи на математический язык геометрической модели (чертежа), на язык понятий и отношений.

Задания могут быть взаимно-обратного характера: изобразить ситуацию на чертеже или словами (в различной форме) описать ситуацию, изображенную на чертеже.

3. Замена математических понятий отношениями, содержащимися в определении понятия. Операция замены понятий отношениями, свойствами, содержащимися в определении, имеет место между двух этапов процесса решения задачи: это еще анализ условия и уже поиск решения.
4. Получение ближайших следствий из условия задачи. Такими следствиями могут быть предыдущая операция – замена терминов отношениями; приведение свойств понятий, содержащихся и не содержащихся в определении, а также получение следствий сразу из нескольких составных частей условия.

Задания на получение следствий наталкивают учащихся на самостоятельное составление задач. Задания могут иметь разное продолжение. Они обучают целеполаганию – действию, без которого трудно обойтись при решении сложных практических задач. Решая задачи полезно продемонстрировать учащимся выполнение как отдельных операций: выделение условия и заключения, замену терминов определением, получение следствий и т.д., так и в целом решение от условия к заключению и от заключения к условию. Обучение учащихся решению сложных задач с разбиением на операции дает возможность:

1. Привить интерес к изучаемому предмету;
2. Побудить учащихся к более вдумчивому изучению геометрии;
3. Развития критического и математического мышления;
4. Сильнее исследовать свойства геометрических фигур;
5. Увидеть свойство, о котором в задаче ничего не говорится;
6. Получить интересное обобщение задачи.

Заключение. В данной работе реализован электронный образовательный курс на тему «Вписанные и описанные четырехугольники».

В ходе исследования получены следующие результаты: рассмотрена методика обучения учащихся решению задач по данной теме на уроках математики в школе, изучена и проанализирована необходимая информация по данной теме и ее значимость для подготовки к экзаменам. После полученных

результатов подготовлена теоретическая часть с основными определениями, необходимыми свойствами и теоремами для успешного выполнения практических заданий. Расширена тема для учащихся, по сравнению с ограниченной информацией в учебниках. Для успешного усвоения подготовленного материала сформированы три теста с повышением уровня сложности, которые представлены в работе по одному варианту из пяти разработанных.

Таким образом, практическое значение данного курса заключается в том, что его могут использовать учащиеся средних общеобразовательных школ, студенты средних специальных учебных заведений, студенты педагогических вузов и преподаватели. Разработанный элективный курс является важной составляющей при подготовке учащихся к единому государственному экзамену.