МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Электронный образовательный курс

Опорные задачи в геометрии

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 3 курса 322 группы
направления 44.04.01 – Педагогическое образование
механико-математического факультета
Гуреева Владислава Сергеевича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент ____________ В. Г. Тимофеев
подпись, дата

Зав. кафедрой
и. о. зав. кафедрой, к.ф.-м.н. ____________ А. М. Захаров
подпись, дата

Саратов 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Планиметрия, пожалуй, один из самых интересных и вместе с тем один из самых сложных разделов школьной математики. Геометрию, как предмета, боятся и ученики, и учителя. Нет ни алгоритмов, ни единых правил, зато есть много формул и теорем. Впрочем, одно правило можно сформулировать: чтобы научиться решать геометрические задачи, надо их решать. Можно предложить и некоторые приемы, которые могут помочь найти «ключ» к геометрическим задачам.

Например, полезно начать решение с того, что отметить на чертеже все равные элементы (углы, отрезки), затем вычислить «все, что можно», то есть найти те величины, которые легко определяются исходя из условия задачи. Затем продолжить решать задачу «с конца»: ответить на вопрос, что надо знать, чтобы получить искомую величину. Возможно, окажется, что все необходимые элементы вы уже знаете или можете легко их получить.

Можно попробовать решить задачу с помощью алгебры. Для этого обозначить все неизвестные элементы за x, y, z и. т.д., а затем составить систему уравнений и/или неравенств, связывающих эти неизвестные.

Конечно, наиболее красивые и короткие решения получаются, если удается провести удачные дополнительные построения. А как их увидеть? Как понять какой метод подойдет к данной конкретной задаче? Здесь можно провести аналогию с шахматной игрой. Хороший шахматист знает наизусть много шахматных партий. Чтобы научиться хорошо решать геометрические (особенно планиметрические) задачи надо знать решения многих задач. Именно решения, а не только результат.

В данной работе приводятся задачи, которые могут оказаться полезными не только своим содержанием, но и методами решения. Это так называемые «опорные задачи». Каждая из них может либо подсказать метод решения аналогичной задачи, либо помочь найти какую-либо новую величину, необходимую для решения, то есть сыграть роль дебюта в шахматной партии.

Известны трудности, которые возникают у начинающих изучать стереометрию из-за неумения сделать «удобный» рисунок – верно, наглядно и «просто» изобразить фигуру, расположенную в пространстве. Ещё большую трудность вызывают дополнительные построения на уже построенном изображении. Таким образом, выполнение правильных, наглядных чертежей и рисунков к задачам по стереометрии является необходимой составляющей умения решать эти задачи. При этом необходимо аргументированно объяснять «шаги» первоначального и дополнительного построения изображения фигур, так как эти «шаги» составляют своеобразный анализ решения геометрической задачи, «открывают путь» к её решению: при этих объяснениях устанавливаются необходимые аффинные и метрические взаимосвязи (задача называется метрической, если в ней фигурируют метрические свойства фигур, т.е. свойства, которые можно выявить непосредственным измерением; в аффинных задачах метрические свойства не рассматриваются), соотношения между данными и искомыми фигурами.

Нахождение расстояний в пространстве является той важнейшей частью раздела стереометрии, на которой основываются, базируются все её метрические вопросы, в том числе нахождение углов, площадей и объёмов. Умение «видеть» и вычислять различные расстояния, углы между прямыми и плоскостями является фундаментом, «опорой» для успешного изучения всей метрической стереометрии. Поэтому необходимо научиться «видеть в пространстве» эти расстояния и углы, верно изображать их на рисунке.

Решение стереометрических задач на определение расстояний и углов (задач метрического характера) становится возможным лишь на метрически определённом чертеже. Метрическая определённость (метризация) чертежа (рисунка) обеспечивается изображением на этом чертеже (рисунке) многогранника заданной формы. Именно вследствие того, что правильный тетраэдр, куб, правильные пирамиды и призма являются многогранниками известной формы, их использование для выработки навыков «видеть» и находить расстояния и углы в пространстве способствует эффективному «вхождению в метрическую стереометрию».

Магистерская работа представляет собой материалы для разработки электронного образовательного курса «Опорные задачи геометрии». Данный образовательный курс предназначен для учащихся с 8-го класса основного общего образования, и содержит элементы, относящиеся как к обучению на базовом уровне, так и в классах с профильной подготовкой.

Цель магистерской работы – разработать электронный образовательный ресурс (ЭОР) «Опорные задачи геометрии» для учеников 8-11 классов и учителей школ.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Провести анализ литературы по выбранной теме.
2. Разработать теоретическое и практическое содержание ЭОР «Опорные задачи геометрии».

Научная новизна магистерской работы состоит в разработке дидактического материала.

После проведения тестирования проведена соответствующая корректировка тестов базового, среднего и повышенного уровня сложности. Были получены следующие результаты.

Результат апробации тестов базового уровня сложности:

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
% выполненных заданий	89,9	89,9	96,7	83,3	57	76,7	66,7	66,7	60	53,4

Результат апробации тестов среднего уровня сложности:

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
% выполненных заданий	75,8	74,9	69,7	56	63,3	58,9	56,6	49,8	46,7	45

Результат апробации тестов повышенного уровня:

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
% выполненных заданий	45,6	51,2	43,5	42	43,3	39,3	36,4	37,1	35	30

Ср. вз. = 58 %.

Средневзвешенное значение показывает, что 58 % учащихся успешно прошли тестирование. После проведение тестирования была проведена соответствующая корректировка курса для более оптимального изучения.

При апробации пришли к выводу, что разработанный курс заданий по теме «Опорные задачи геометрии», предназначенный для уроков математики, а также элективных курсов по математике, послужит хорошей основой для получения навыков в решении геометрических задач.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка использованных источников.

Во введении обоснована актуальность исследования, сформулированы его цель, задачи, практическая значимость, описана структура работы по главам.

В первой главе «Треугольники» рассмотрены важные свойства медианы, биссектрисы и высоты треугольника и основные методы решения задач.

Во второй главе «Четырехугольники» преимущественно рассмотрены различные свойства трапеции, а также выпуклых четырёхугольников.

В третьей главе «Окружности, связанные с треугольником и четырехугольником» рассмотрены основные задачи и теоремы на вписанную, описанную и вневписанную окружности.

В четвертой главе «Расстояния в пространстве» рассмотрены задачи на нахождение расстояний между точкой и прямой, точкой и плоскостью, скрещивающимися прямыми в пространстве. Показаны основные методы решения таких задач.

В пятой главе «Тренировочные задания» разработаны тесты трех уровней сложности для ступенчатого контроля, даны решения первых вариантов всех тестов.

В заключении работы сформулированы основные выводы.

Список использованных источников состоит из 20 наименований.

Далее приведем основные задачи из описанных выше глав.

1 Треугольники

Определение 1. *Медианой треугольника* называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Задача 1. Вычислить длину медианы треугольника, если известны длины трех его сторон.

Решение. Будем решать задачу *методом дополнительных построений*. Пусть в треугольнике ABC известно, что $AB = c, BC = a, AC = b$. Обозначим медиану AD через m_a, требуется вычислить длину m_a. Отложим на продолжении луча AD за точку D отрезок $DE = AD$ и соединим точки B, E и C (рисунок 1). Так как в полученном четырехугольнике $ABEC$ диагонали точкой пересечения делятся пополам, то $ABEC$ – параллелограмм.

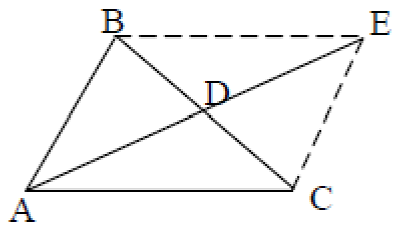


Рисунок 1

По следствию из теоремы косинусов (сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон) получаем:

$AE^2 + BC^2 = 2(AC^2 + AB^2)$ или $(2m_a)^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2)$, отсюда

$$m_a = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2}.$$

Ответ: $m_a = \frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{2}$.

Определение 2. *Биссектрисой треугольника* называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой на противолежащей стороне этого треугольника.

Задача 2. Вычислить длину биссектрисы треугольника, если известны длинны двух прилежащих сторон треугольника и угол между ними.

Решение. Пусть в треугольнике ABC известно, что $AB = c$, $BC = a$, $\angle ABC = \beta$. Обозначим биссектрису BD через l_b. Требуется найти l_b (рисунок 2).

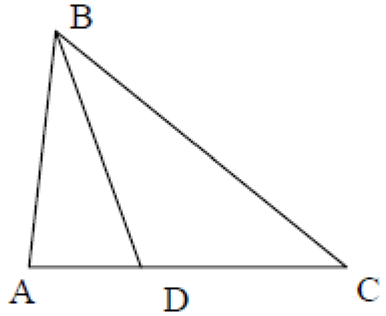


Рисунок 2

Будем решать задачу *методом площадей*. Основываясь на свойстве аддитивности площади, получаем следующее равенство: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta DBC}$ или

$$\frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot sin\angle ABC = \frac{1}{2}AB \cdot BD \cdot sin\angle ABD + \frac{1}{2}BD \cdot BC \cdot sin\angle DBC\,.$$

Отсюда $c \cdot a \cdot \sin\beta = c \cdot l_b \cdot \sin\frac{\beta}{2} + l_b \cdot a \cdot \sin\frac{\beta}{2}$.

Используя формулу синуса двойного угла после несложных алгебраических преобразований, получаем:

$$l_b = \frac{2ac}{a+c} \cdot \cos\frac{\beta}{2}.$$

Ответ: $l_b = \frac{2ac}{a+c} \cdot \cos\frac{\beta}{2}$.

Определение 3. *Высотой треугольника* называется перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону.

Задача 3. Известны длины сторон остроугольного треугольника ABC. Вычислить длину высоты, опущенной из вершины B.

Решение. Пусть в треугольнике ABC $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Обозначим высоту BH через h_b (рисунок 3). Требуется найти h_b.

Вычислим сначала AH, имеем: $AB^2 - AH^2 = BC^2 - (AC - AH)^2$, или

$$AH = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}.$$

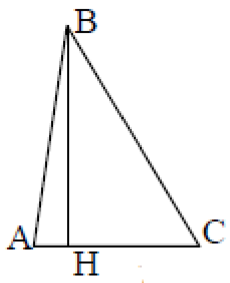


Рисунок 3

Поэтому

$$h_b = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{c^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right)^2}$$

или после несложных преобразований

$$h_b = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{2b}.$$

Ответ: $h_b = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{2b}$.

2 Четырехугольники

Задача 4. Доказать, что четырехугольник, вершинами которого являются середины сторон выпуклого четырехугольника является параллелограммом и вычислить его площадь, если площадь данного четырехугольника равна S.

Решение. Пусть дан четырехугольник $ABCD$, M, N, P, Q – середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно (рисунок 4).

Проведем диагонали AC и BD. Тогда MN – средняя линия ΔABC , поэтому $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$; QP – средняя линия ΔACD, поэтому $QP \parallel AC$ и $QP = \frac{1}{2}AC$. Следовательно, $MN \parallel QP$ и $MN = QP$ и по признаку параллелограмма $MNPQ$ – параллелограмм. Вычислим его площадь.

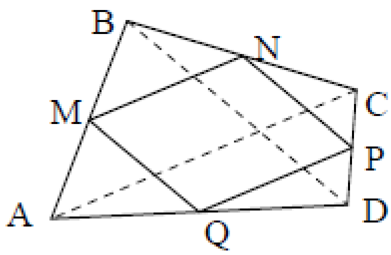


Рисунок 4

$\Delta MBN \sim \Delta ABC$ и $\frac{MB}{AB} = \frac{1}{2}$ следовательно,

$$\frac{S_{\Delta MBN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{4} \text{ т. е. } S_{\Delta MBN} = \frac{1}{4}S_{\Delta ABC}.$$

Аналогично, $S_{\Delta PQD} = \frac{1}{4}S_{\Delta ADC}$, $S_{\Delta MAQ} = \frac{1}{4}S_{\Delta ABD}$, $S_{\Delta NCP} = \frac{1}{4}S_{\Delta BCD}$.

$S_{\Delta MBN} + S_{\Delta PQD} + S_{\Delta MAQ} + S_{\Delta NCP} = \frac{1}{4}(S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ADC} + S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD}) =$

$= \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}S$. Следовательно, $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}S$. Что и требовалось доказать.

3 Окружности, связанные с треугольником и четырехугольником

Определение 4. Окружность называется *вписанной* в выпуклый многоугольник, если она касается всех его сторон.

Задача 5. Вычислить радиус окружности, вписанной в треугольник, если известны длины его высот h_a, h_b и h_c.

Решение. Пусть дан треугольник ABC, h_a, h_b, h_c – высоты, опущенные на стороны BC, AC и AB соответственно. Обозначим через r радиус вписанной окружности, тогда для вычисления площади треугольника ABC справедливы следующие формулы:

$$S = \frac{1}{2}BC \cdot h_a, \quad S = \frac{1}{2}AC \cdot h_b, \quad S = \frac{1}{2}AB \cdot h_c, \quad S = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) \cdot r\ .$$

Выразим из первых трех равенств BC, AC и AB соответственно и подставим в последнее равенство, получим:

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{2S}{h_c} + \frac{2S}{h_a} + \frac{2S}{h_b}\right) \cdot r \quad \text{или} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\,.$$

Из последней формулы можно получить искомое значение радиуса.

Ответ: $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$.

Определение 5. Окружность называется *описанной* около выпуклого многоугольника, если на ней лежат все его вершины.

Задача 6. Биссектриса CC_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке P. Доказать, что

a) точка P является серединой дуги APB;

b) треугольники POB и POA равнобедренные, где O – центр вписанной окружности треугольника ABC;

c) P – центр описанной окружности треугольника AOB.

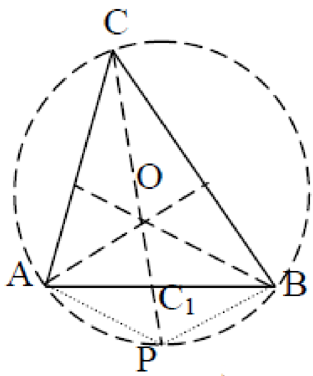


Рисунок 5

Решение.

a) Первое утверждение задачи следует из равенства углов ACP и PCB и теоремы об измерении вписанных углов (рисунок 5).

b) Отметим, что точка O – центр вписанной окружности лежит на биссектрисе CC_1. Так как угол C_1OB является внешним углом треугольника COB, а угол C_1OA – внешний угол треугольника AOC, то

$$\angle C_1OB = \angle OBC + \angle OCB = \frac{1}{2}(\angle C + \angle B) = 90° - \frac{\angle A}{2}, \qquad (1)$$

$$\angle C_1OA = \angle OCA + \angle OAC = \frac{1}{2}(\angle C + \angle A) = 90° - \frac{\angle B}{2}. \qquad (2)$$

Далее, $\angle PAB = \angle PCB$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу PB. Аналогично $\angle PBA = \angle PCA$. Поэтому

$$\angle PBO = \angle PCA + \angle ABO = \frac{1}{2}(\angle C + \angle B) = 90° - \frac{\angle A}{2},$$

$$\angle PAO = \angle PCB + \angle BAO = \frac{1}{2}(\angle C + \angle A) = 90° - \frac{\angle B}{2}.$$

Сравнивая последние равенства с (1) и (2) соответственно, получаем, что $\angle PBO = \angle POB$ и $\angle PAO = \angle POA$, то есть треугольники POB и POA равнобедренные.

Утверждение *c)* задачи является прямым следствием утверждения *b)*, так как $PA = PO = PB$.

Определение 6. *Вневписанной окружностью* называется окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других сторон.

Задача 7. Вычислить радиус вневписанной окружности, если известны площадь, полупериметр и сторона треугольника, которой касается эта окружность.

Решение. Пусть дан треугольник ABC, где $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$. Точка M – центр вневписанной окружности, касающейся стороны a. Обозначим радиус вневписанной окружности через r_a (рисунок 6).

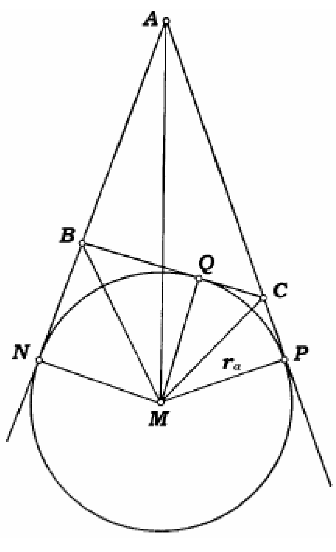


Рисунок 6

Чтобы вычислить радиус вневписанной окружности рассмотрим площади треугольников ABC, ABM, ACM, BCM.

Имеем:

$$S_{ABC} = S_{ABM} + S_{ACM} - S_{BCM} = \frac{cr_a}{2} + \frac{br_a}{2} - \frac{ar_a}{2} =$$

$$= \frac{r_a(c + b - a)}{2} = r_a(p - a)\,,$$

где p – полупериметр треугольника ABC. Следовательно,

$$r_a = \frac{S}{p - a}\,.$$

Аналогично доказывается, что $r_b = \frac{S}{p-b}$, $r_c = \frac{S}{p-c}$, где r_b и r_c – радиусы вневписанных окружностей, касающихся сторон треугольника b и c соответственно.

Задача 8. Продолжение биссектрисы угла B треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке M; O – центр вписанной окружности, I_b – центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC. Доказать, что точки A, C, O и I_b лежат на окружности с центром в точке M (рисунок 7).

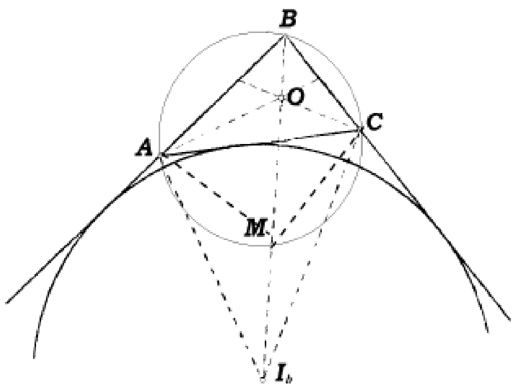


Рисунок 7

Решение. Точка M является центром окружности, описанной около треугольника AOC (задача 6). Докажем, что точка I_b лежит на этой окружности.

Так как треугольник OAI_b прямоугольный (AO и AI_b – биссектрисы смежных углов) и $\angle AOM = \angle MAO = \varphi$, то $\angle MAI_b = \angle MI_bA = 90° - \varphi$, а значит, $MA = MI_b$. Таким образом, $MI_b = MA = MO = MC$, что и требовалось доказать.

4 Расстояния в пространстве

Задача 9. Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите расстояние от точки B до прямой A_1C_1.

Решение. На рисунок 8 имеем: $\rho(B;B_1C_1)=|BB_1|$;

$\rho(B;A_1C_1)=|BM|=\sqrt{BB_1^2+B_1M^2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,

где $M=A_1C_1\cap B_1D_1$.

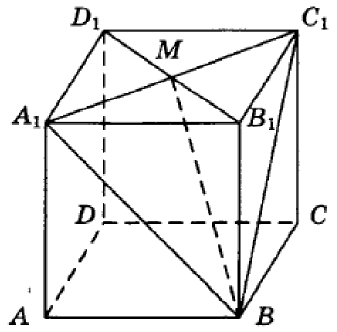


Рисунок 8

Расстояние $\rho(B;A_1C_1)$ можно найти иначе. Треугольник A_1BC_1 является правильным со стороной $\sqrt{2}$, причем $BM\perp A_1C_1 \Rightarrow BM$ – медиана в $\Delta A_1BC_1 \Rightarrow BM=\frac{A_1B\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Задача 10. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями AB_1 и BC_1 смежных граней ABB_1A_1 и BCC_1B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12.

Решение. Попытаемся «увидеть» параллельные плоскости, проходящие через прямые AB_1 и BC_1.

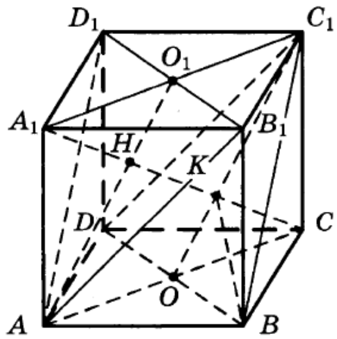


Рисунок 9

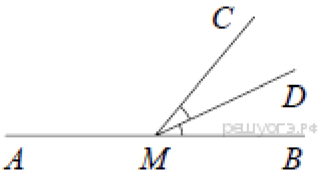
Замечаем (рисунок 9), что прямые AB_1 и BC_1 лежат в плоскостях соответственно AB_1D_1 и BC_1D, которые параллельны. Кроме того, ранее мы доказали, что $(BC_1D)\perp CA_1$, причем $A_1C\cap(AB_1D_1)=H$, $A_1C\cap(BC_1D)=K$, $KH=\frac{1}{3}A_1C=\frac{1}{3}\cdot 12\sqrt{3}=4\sqrt{3}$. Это означает, что $\rho(AB_1;BC_1)=\rho\big((AB_1D_1);(BC_1D)\big)=KH=4\sqrt{3}$.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

5 Тренировочные задания

Приведем решение заданий варианта 1 базового уровня сложности.

1. На прямой AB взята точка M. Луч MD – биссектриса угла CMB. Известно, что $\angle DMC = 44°$. Найдите угол CMA. Ответ дайте в градусах.



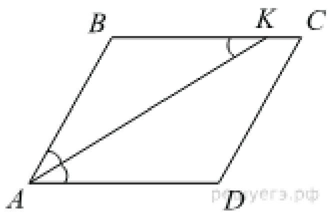
1) 88; 2) 136; 3) 92; 4) 158.

Решение.

Поскольку MD – биссектриса, $\angle DMB = \angle DMC = 44°$. Углы AMC, CMD и DMB вместе составляют развёрнутый угол, откуда $\angle AMC = 180° - \angle DMB - \angle DMC = 180° - 44° - 44° = 92°$.

Ответ: 3.

2. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 9$, $CK = 15$.



1) 24; 2) 48; 3) 66; 4) 78.

Решение.

Углы BKA и KAD равны как накрест лежащие углы при параллельных прямых, поэтому углы BAK и BKA также равны. Следовательно, треугольник ABK – равнобедренный, откуда $AB = BK = 9$. Противоположные стороны параллелограмма равны. Периметр параллелограмма равен сумме длин всех его сторон $P = 2(BC + AB) = 2(9 + 15 + 9) = 66$.

Ответ: 3.

3. Площадь ромба равна 54, а периметр равен 36. Найдите высоту ромба.

1) 6; 2) 9; 3) 13,5; 4) 18.

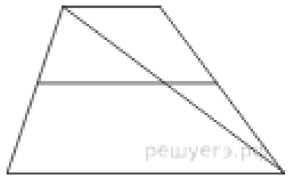
Решение.

Пусть a сторона ромба, h – его высота. Все стороны ромба равны, поэтому $a = \frac{P}{4} = \frac{36}{4} = 9$. Площадь ромба можно найти как произведение стороны на высоту:

$$S = ah \;\Leftrightarrow\; h = \frac{S}{a}, \qquad h = \frac{54}{9} = 6.$$

Ответ: 1.

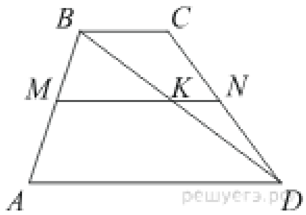
4. Основания трапеции равны 1 и 11. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.



1) 0,5; 2) 6; 3) 10; 4) 5,5.

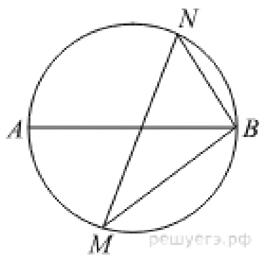
Решение.

Введём обозначения как показано на рисунке. *MN* – средняя линия, поэтому, *AM* = *MB*, откуда по теореме Фалеса *BK* = *KD*. Рассмотрим треугольник *ABD MK* – средняя линия, следовательно, $MK = \frac{AD}{2} = \frac{11}{2} = 5{,}5$.



Ответ: 4.

5. На окружности по разные стороны от диаметра *AB* взяты точки *M* и *N*. Известно, что ∠*NBA* = 73°. Найдите угол *NMB*. Ответ дайте в градусах.



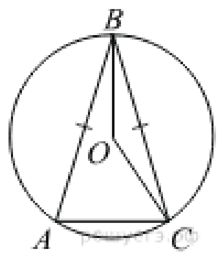
1) 146; 2) 17; 3) 34; 4) 73.

Решение.

Угол *NBA* – вписанный, поэтому он равен половине дуги, на которую он опирается. Следовательно, дуга *AN* = 2∠*NBA* = 2 · 73° = 146°. Диаметр *AB* делит окружность на две равные части, поэтому величина дуги *ANB* равна 180°. Откуда дуга *NB* = 180° − 146° = 34°. Угол *NMB* – вписанный, поэтому он равен половине дуги, на которую он опирается, то есть равен 34°/2 = 17°.

Ответ: 2.

6. Окружность с центром в точке *O* описана около равнобедренного треугольника *ABC*, в котором *AB* = *BC* и ∠*ABC* = 66°. Найдите величину угла *BOC*. Ответ дайте в градусах.



1) 114; 2) 57; 3) 147; 4) 171.

Решение.

Сумма углов треугольника равна 180°. Треугольник ABC – равнобедренный, следовательно, $\angle BAC = \angle BCA = \frac{180°-66°}{2} = 57°$. Угол BAC – вписанный, поэтому он равен половине дуги, на которую опирается. Угол BOC – центральный, поэтому он равен величине дуги, на которую опирается. Углы BAC и BOC опираются на одну и ту же дугу, следовательно, $\angle BOC = 2\angle BAC = 114°$.

Ответ: 1.

7. Сторона равностороннего треугольника равна $10\sqrt{3}$. Найдите биссектрису этого треугольника.

1) 15; 2) $5\sqrt{3}$; 3) $10\sqrt{3}$; 4) 12.

Решение.

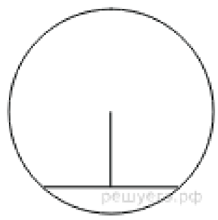
Так как треугольник ABC равносторонний, то его биссектриса BH является и медианой, и высотой. Тогда треугольник ABH – прямоугольный. Тогда:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + BH^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}AB^2 = BH^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow BH = \sqrt{\frac{3}{4}AB^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 10\sqrt{3} = 15.$$

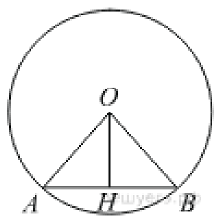
Ответ: 1.

8. Длина хорды окружности равна 96, а расстояние от центра окружности до этой хорды равно 20. Найдите диаметр окружности.



1) 52; 2) 48; 3) 40; 4) 104.

Решение.



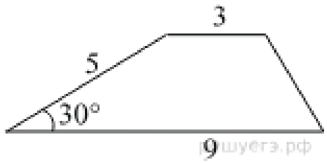
Проведём построение и введём обозначения как показано на рисунке. Рассмотрим треугольники AOH и HOB, они прямоугольные, OH – общая, AO и OB равны как радиусы окружности, следовательно, эти треугольники равны, откуда $AH = HB = \frac{AB}{2} = \frac{96}{2} = 48$. По теореме Пифагора найдем радиус окружности:

$$R = AO = \sqrt{AH^2 + OH^2} = \sqrt{48^2 + 20^2} =$$
$$= \sqrt{4^2(12^2 + 5^2)} = 4\sqrt{169} = 52.$$

Диаметр равен двум радиусам, следовательно, $D = 2R = 2 \cdot 52 = 104$.

Ответ: 4.

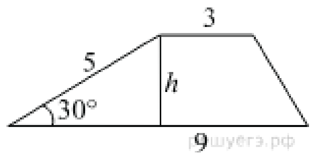
9. Боковая сторона трапеции равна 5, а один из прилегающих к ней углов равен 30°. Найдите площадь трапеции, если её основания равны 3 и 9.



1) 12; 2) 60; 3) 30; 4) 15.

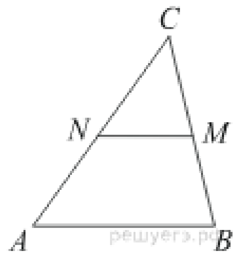
Решение.

Площадь трапеции вычисляется по формуле $S = \frac{a+b}{2}h$, где a и b – основания, а h – высота трапеции. Найдем высоту: $h = 5\sin 30° = 2{,}5$, следовательно, $S = \frac{3+9}{2} \cdot 2{,}5 = 15$.



Ответ: 4.

10. В треугольнике *ABC* отмечены середины *M* и *N* сторон *BC* и *AC* соответственно. Площадь треугольника *CNM* равна 2. Найдите площадь четырёхугольника *ABMN*.



1) 8; 2) 6; 3) 4; 4) 10.

Решение.

MN − средняя линия треугольника *ABC*. Треугольники *ABC* и *NMC* подобны по двум углам. Коэффициент подобия $k = 2$. Значит

$$S_{ABC} = k^2 S_{NMC} = 4 \cdot 2 = 8, \text{ а } S_{ABMN} = S_{ABC} - S_{NMC} = 8 - 2 = 6.$$

Ответ: 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном электронном образовательном курсе реализована тема «Опорные задачи геометрии». В основу образовательного процесса при дистанционном обучении положена целенаправленная и контролируемая интенсивная самостоятельная работа обучаемого, который мог бы учиться в удобное для себя время, по индивидуальному расписанию, имея при себе комплект специальных средств обучения и согласованную возможность контакта с преподавателем в процессе обучения.

Электронный образовательный курс «Опорные задачи геометрии» был апробирован в МАОУ «Физико-технический лицей № 1» города Саратова, в результате чего реализованы следующие задачи:

– изучен и проанализирован теоретический материал по данной теме, новизна и значимость данного материала для подготовки к текущему контролю и экзаменам;

– определены методические особенности данной темы, методику её преподавания каждый учитель подбирает для себя самостоятельно, учитывая способности учащихся;

– разработана система задач, дифференцированная по уровню сложности;

– расширен кругозор учащихся, ограниченный информацией учебника.

Практическое значение данной темы заключается в том, что этот электронный образовательный курс могут использовать учащиеся средних общеобразовательных школ, студенты средних специальных учебных заведений, студенты педагогических вузов и преподаватели. Теоретический материал включает в себя материал, который способствует отработать методы решения задач по геометрии, а также систематизировать свойства различных фигур. Тема «Опорные задачи геометрии» является важной на этапе школьного обучения, так как данная тема является инструментом для решения многих геометрических задач.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Потоскуев, Е. В. Математика. Профильный уровень. 100 баллов. Опорные задачи по геометрии. Планиметрия. Стереометрия / Е. В. Потоскуев. М.: Экзамен, 2019, 223 с.

2 Осипенко, Л. А., Стацевичуте, Е. Э. Опорные задачи в планиметрии: методическое пособие / Л. А. Осипенко, Е. Э. Стацевичуте. Изд-во Иркутского гос. ун-та, 2010, 48 с.

3 Атнасян, Л. С., Бутузов, В. Ф., Кадомцев, С. Б. Геометрия 7-9 классы / Л. С. Атнасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев. М.: Просвещение, 2014, 383 с.

4 Атнасян, Л. С., Бутузов, В. Ф., Кадомцев, С. Б. Геометрия 10-11 классы / Л. С. Атнасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев. М.: Просвещение, 2014, 256 с.

5 Атнасян, Л. С., Бутузов, В. Ф., Кадомцев, С. Б. Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 8 класс / Л. С. Атнасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев. М.: Вита-Пресс, 2006, 161 с.

6 Атнасян, Л. С., Бутузов, В. Ф., Кадомцев, С. Б. Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 8 класс / Л. С. Атнасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев. М.: Вита-Пресс, 2004, 176 с.

7 Блинков, А. Д., Блинков, Ю. А. Вневписанная окружность / А. Д. Блинков, Ю. А. Блинков. М.: Квант, №3. 2003. 36 с.

8 Готман, Э. Х. Задачи по планиметрии и методы их решения: пособия для учащихся / Э. Х. Готман. М.: Просвещение, 1996, 240 с.

9 Гордин, Р. К. ЕГЭ 2019. Математика. Геометрия. Планиметрия. Задача 16 (профильный уровень) / Р. К. Гордин. М.: МЦНМО, 2020, 272 с.

10 Гордин, Р. К. ЕГЭ 2019. Математика. Геометрия. Стереометрия. Задача 14 (профильный уровень) / Р. К. Гордин. М.: МЦНМО, 2020, 144 с.

11 Садовничий, Ю. В. ЕГЭ 2019. Математика. Профильный уровень. 100 баллов. Планиметрия / Ю. В. Садовничий. М.: Экзамен, 2019, 144 с.

12 Семенов, А. А., Ященко, И. В. и др. Как получить максимальный балл на ЕГЭ. Математика. Решение заданий повышенного и высокого уровня сложности / А. А. Семенов, И. В. Ященко. М.: Интеллект-Центр, 2019, 144 с.

13 Прокофьев, А. А., Корянов, А. Г. Математика. ЕГЭ. Решение планиметрических задач / А. А. Прокофьев, А. Г. Корянов. Изд-во Легион, 2019, 176 с.

14 Прокофьев, А. А., Корянов, А. Г. Математика. ЕГЭ. Многогранники, круглые тела (типовое задание 14) / А. А. Прокофьев, А. Г. Корянов. Изд-во Легион, 2020, 320 с.

15 Панферов, В. С., Сергеев И. Н. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач / В. С. Панферов, И. Н. Сергеев. М.: Интеллект-Центр, 2012, 96 с.

16 Волчкевич, М. А. Уроки геометрии в задачах 7-8 классы / М. А. Волчкевич. М.: МЦНМО, 2016, 200 с.

17 Шарыгин, И. Ф. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами / И. Ф. Шарыгин. М.: Астрель, 2001, 400 с.

18 Гордин, Р. К. Теоремы и задачи школьной геометрии. Базовый и профильный уровни / Р. К. Гордин. М.: МЦНМО, 2018, 96 с.

19 Мальцев, Д. А., Мальцев. А. А., Мальцева Л. И. Математика. ЕГЭ-2021. Книга 1 / Д. А. Мальцев, А. А. Мальцев, Л. И. Мальцева. Изд-во Афина, 2020, 416 с.

20 Мальцев, Д. А., Мальцев. А. А., Мальцева Л. И. Математика. ЕГЭ-2021. Книга 2. Профильный уровень. 64 теста + задачник / Д. А. Мальцев, А. А. Мальцев, Л. И. Мальцева. Изд-во Афина, 2020, 272 с.