МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

Представление конечных детерминированных автоматов конечными рядами Фурье-Хаара

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента(ки) 4 курса 411 группы
направления 01.03.02 - Прикладная математика и информатика
код и наименование направления
механико-математического факультета
Серегина Кирилла Андреевича
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
Старший преподаватель ____________ С.И. Поликарпов
должность, уч. степень, уч. звание | дата, подпись | инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
д.ф-м.н., профессор ____________ В.А. Юрко
должность, уч. степень, уч. звание | дата, подпись | инициалы, фамилия

Саратов 2021

Введение. Распространенные способы задания автоматов основываются на рекурсии: последовательно определяются такты функционирования автомата и указы-ваются правила рекурсивного совмещения тактов в процессе функциониро-вания. При таком способе задания автоматов явно выделяются только на-чальные фрагменты возможын вариантов функционирования. Для заменырекурсивного задания законов функционирования автоматов явным опреде-лением функций переходов и выходов, Твердохлебов В.А. предложил представление автоматов геометрическими образами.

В данной работе рассмотрено представление конечного детерминированного автомата рядами Фурье-Хаара. Это достигается путем разложения геометрического образа исходного автомата в конечный ряд Фурье-Хаара по системе функций Хаара и сопоставления каждой из этих функций автомата, геометрический образ которого совпадает с данной функцией.

Целями бакалаврской работы являются:

1. Изучение теоретического материала по теории геометрических образов конечных детерминированных автоматов.
2. Проведение численного эксперимента и сравнение результатов.

Работа состоит из введения, четырех теоретических разделов, практического раздела, заключения и списка использованных источников.

Во введении формулируется общая цель исследования.

В первом разделе рассматриваются основные понятия и определения автомата.

Во втором разделе описываются методы построения геометрических образов автоматов и законы ихфункционирования.

В третьем разделе рассматриваются функции Хаара и их свойства.

В четвертом разделе рассматриваются ряды Фурье-Хаара и некоторые их свойства.

В пятом разделе описывается метод представления геометрических образов автоматов рядами, а также проводится численный эксперимент.

Основное содержание работы. В **первой** части мы введем основное определение автомата.

Абстрактный автомат — математическая абстракция, модель дискретного устройства, имеющего один вход, один выход и в каждый момент времени находящегося в одном состоянии из множества возможных. На вход этому устройству поступают символы одного алфавита, на выходе оно выдаёт символы (в общем случае) другого алфавита.

Формально абстрактный автомат определяется как пятёрка

$\mathbf{A} = (\mathbf{S},\mathbf{X},\mathbf{Y},\delta,\lambda)$

Где S — конечное множество состояний автомата, X, Y — конечные входной и выходной алфавиты соответственно, из которых формируются строки, считываемые и выдаваемые автоматом, $\delta : \mathrm{S} \times \mathrm{X} \longrightarrow S$ — функция переходов. $\lambda : S \times Y \longrightarrow Y$ — функция выходов.

Абстрактный автомат с выделенным начальным состоянием называется **инициальным автоматом**. Таким образом, абстрактный автомат определяет семейство инициальных автоматов $(s_i, A), s_i \in S$

Если функции переходов и выходов однозначно определены для каждой пары $(s, x) \in S \times X$, то автомат называют детерминированным.

Во **второй** части рассмотрим построение геометрических образов автоматов и законы их функционирования.

Геометрический образ γ_s, где $s \in S$, инициального автомата (A, s) представляется заданным явно и полностью на всём множестве последовательностей входных сигналов X'. Целью геометрического подхода является исключение рекурсии в построении форм поведения автомата и переориентация методов решения задач распознавания, анализа и синтеза автоматов, управления автоматами на явное полное представление законов функционирования автоматов геометрическими фигурами.

Определение 1. Пусть $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ — конечный детерминированный автомат и $s \in S$. Ломаной линией, определяющей в геометрии G_0 внешнее поведение инициального автомата (A, s) будем называть граф $R = (W, U)$, где множество вершин графа $W = \cup_{p \in X'} \{p, \lambda(s, p)\}$, а множество U ребер графа состоит из ребер, соединяющих вершины с первыми компонентами, непосредственно соседними по порядку ω_1. Для так определенных ломаных линий будем использовать обозначение γ_s.

Геометрический образ γ_s инициального конечного детерминированного автомата (A, s) определяет функционирование автомата А для состояния

$\delta(s,p)$, где $p \in X'$ Следовательно, если $p \in X'$, то геометрический образ γ_d для $d = \delta(s,p)$ может быть извлечён из линии γ_s.

Законы функционирования конечных детерминированных автоматов, представленные геометрическими образами, выделяют во множестве ломаных линий подмножество линий.

Определение 2. Ломаная линия γ геометрии G_0 называется регулярной, если существуют такие КД-автоматы $= (S, X, Y, \delta, \lambda)$ и $s \in S$, что $\gamma = \gamma_s$.

Определение 3. Ломаную линию геометрии G_0 будем называть функциональной, если определяющий ее граф является цепью.

Определение 4. Ломаная линия γ геометрии G_0 называется диагональной, если для каждой точки $(p,q) \in \{\gamma\}$ выполняется равенство $|p| = |q|$.

Определение 5. Для любых слов $p \in X'$ и $q \in Y'$ введем обозначение

$$K(p,q) = \{p\} \cdot X \times \{q\} \cdot Y.$$

Множества точек $K(p,q)$ будем называть базовой клеткой (или просто клеткой) геометрии G_0.

Определение 6. Ломаная линия γ геометрии G_0 называется связной, если для любой её точки (p,q), где $p \in X'$ и $q \in Y'$, и для любого$x \in X$ существует $y \in Y$, такой, что точка (px, qy) является точкой линии γ.

Определение 7. Пусть γ_s — геометрический образ инициального конечного детерминированного автомата (A, s). Введём обозначение: для любого $p \in X'$ $\gamma_s(p)$ часть линии γ_s, определённая на множестве точек $\{px_1, px_2, \ldots, px_m,\}$ оси абсцисс.

Теорема 1. Для того чтобы ломаная линия γ геометрии G_0 была регулярной, необходимо, чтобы 1) граф, определяющий ломаную γ, был цепью, 2) для любого слова $p \in X'$ существовало слово $q \in Y'$, где |p| = |q|, при котором $\{\gamma(p)\} \subset \{K(p,q)\}$

Теорема 2. Ломаная линия γ геометрии G_0 является регулярной тогда и только тогда, когда она функциональная, диагональная и связная.

Принципиально важным оказалось, что критерий регулярности ломаной линии в геометрии G_1 выражается через простое условие: ломаная линия γ

геометрии G_1 является регулярной тогда и только тогда, когда для каждого $p \in X'$ линия Y определена и определена однозначно.

Теорема 3. Для каждой регулярной ломаной линии γ геометрии G_0 и для каждого слова $p \in X'$ ломаная линия $\gamma(p)$ конгруэнтна некоторой ломаной линии вида $\gamma'(\varepsilon)$, где $\gamma'(\varepsilon)$ — начальный отрезок геометрического образа для некоторого $s \in S$.

Порядки расположения входных и выходных слов на осях словарных геометрий позволяют слова взаимно однозначно заменить числами на основании следующей теоремы.

Теорема 4. Пусть $p \in X'$ и $p = x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}$, где $k \in N^+$ Тогда номер $r(p)$ слова p по порядку ω_1 определяется равенством

$$r(p) = \sum_{j=1}^{k} r(x_{i_j}) \cdot |X|^{j-1} - 1.$$

В **третьей** части рассмотрим вид функций Хаара и некоторые их свойства.

Последовательность функций $\{\chi_k(x)\}$, называемых функциями Хаара, была первой ортогональной системой. Она имела свойство: *любая непрерывная на отрезке [0,1] функция $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд по функциям системы:*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_k(x)$$

Опеределение функций Хаара. *Двоичными* отрезками называются отрезки, которые могут быть получены путем деления отрезка [0,1] на 2^m равных частей.

Левую и правую половины l_{mj} условимся обозначать l_{mj}^- и l_{mj}^+, так что $l_{mj}^- + l_{mj}^+ = l_{mj}$. Можно проверить, что $l_{mj}^- = l_{m+1,2j-1}$, $l_{mj}^+ = l_{m+1,2j}$.

Для двоичных отрезков введем следующее обозначение:

$$l_{mj} = \left[\frac{j-1}{2^{m-1}}, \frac{j}{2^{m-1}}\right),$$

где j меняется от 1 до 2^{m-1}, а $m = 1, 2, ...$

Систему функций Хаара $\{\chi_k(x)\}$ удобно строить группами: группа группа номер m содержит 2^{m-1} функций $\{\chi_{mj}(x)\}$, $j = 1, 2, ..., 2^{m-1}$; $m = 1, 2, ...$ Связь между двойной нумерацией (m, j) и обычной (k) выражается соотношением, причем первая функция $\chi_1(x) \equiv 1$ остается вне групп.

$$\chi_{mj}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{m-1}{2}} \text{ при} x \in l_{mj}^-, \\ -2^{\frac{m-1}{2}} \text{ при} x \in l_{mj}^+, \\ 0 \text{ при} x \notin l_{mj}. \end{cases} \tag{1}$$

Свойства функций Хаара

- Функции Хаара ортогональны друг другу.
- Функции Хаара нормированы.
- Для функции, интегрируемой по Лебегу, разложение Хаара сходится к этой функции почти всюду.
- Разложение Хаара для функции сходится к этой функции в каждой точке непрерывности этой функции и равномерно сходится на каждом интервале, на котором функция равномерно непрерывна.
- Система Хаара является системой сходимости. Это значит, что если числа $\{a_k\}$ удовлетворяет условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(x)$ сходится почти во всех точках отрезка $[0, 1]$.
- *Система Хаара полна в L_p при любом $p \in [1, \infty]$.* Это означает, что в L_p нет такой функции, которая была бы ортогональна ко всем $\chi_k(x)$ и не равнялась бы почти во всех точках нулю.
- Система Хаара образует базис в L_p при любом $p \in [1, \infty]$. Это значит, что для каждой функции $f(x)$ из L_p ряд Фурье-Хаара сходится к ней по норме:
$$\lim_{n \to \infty} \|f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_k(x)\|_{L_p} = 0.$$

В **четвертой** части рассмотрим ряды Фурье-Хаара и некоторые их свойства.

Пусть $f(x)$ - произвольная интегрируемая функция, определенная на отрезке [0,1]. Коэффициентами Фурье-Хаара этой функции называются числа

$$c_k = \int_0^1 f(x)\chi_k(x)dx. \tag{2}$$

Для любой интегрируемой функции $f(x)$ можно вычислить коэффициенты Фурье-Хаара $\{c_k\}$ и составить ряд Фурье-Хаара

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\chi_k(x). \tag{3}$$

Рассмотрим частичную сумму ряда:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\chi_k(x).$$

С помощью (2) и $K_n(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} \chi_k(x)\chi_k(y)$ можно получить следующее:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \chi_k(x) \int\limits_0^1 \chi_k(y)f(y)dy = \int\limits_0^1 K_n(x,y)f(y)dy.$$

Теорема 5. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [0,1]. Тогда ряд (3) сходится к $f(x)$ равномерно на [0,1].

Теорема 6. Предположим, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке [0,1]. Тогда: (I) Ряд (3) сходится к $f(x)$ почти во всех точках отрезка [0,1]. (II) Если в точке $x = x_0$ функция $f(x)$ непрерывна, то в этой точке ряд 3 сходится к $f(x_0)$. (III) Если в двоично рациональной точке $x = r$ функция $f(x)$ непрерывна справа, то в этой точке ряд (3) сходится к $f(r)$. (IV) Если $f(x)$ равномерно непрерывна при $r_1 \le x < r_2$, где r_1, r_2 - двочино рациональные точки, то ряд (3) сходится равномерно при $r_1 \le x < r_2$.

Рядом Хаара называется ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\chi_k(x) \tag{4}$$

с произвольными действительными коэффициентами a_k.

Для того чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\chi_k(x)$ был рядом Фурье-Хаара функции $f(x)$ из $L_p(1 < p < \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы его частичные суммы были равномерно ограничены по норме:

$$\| \sum_{k-1}^{n} a_k\chi_k(x) \|_{L_p} \leq \text{const}.$$

Теорема 7. Если ряд Хаара (4) сходится равномерно на отрезке [0,1], то он есть ряд Фурье-Хаара для своей суммы.

Теорема 8. Свойство локализации

Существует принцип локализации Римана: если разложить функцию $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье, то сходимость этого ряда в точке x_0 зависит только от поведения $f(x)$ в окрестности точки $x = x_0$. Хаар показал, что этим свойством обладают и ряды Фурье-Хаара.

В **пятой** части рассмотрим метод разложения геометрических образов автоматов в ряды и проведем численный эксперимент.

Рассматривается метод представления конечного детерминированного автомата Мили в виде композиций простейших автоматов. Это достигается путем разложения геометрического образа исходного автомата в конечный ряд Фурье-Хаара и сопоставление каждой из этих функций автомата, геометрический образ которого совпадает с данной функцией.

Рассмотрим инициальный автомат Мили $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$ с начальным состоянием s_0, геометрический образ которого является периодическим.

Заменим геометрический образом γ_{s_0} исходного автомата его разложением в ряд Фурье-Хаара:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\chi_k(x). \tag{5}$$

при этом значения суммы ряда в точках 0,1,...,31 точно совпадают со значениями геометрического образа.

Коэффициенты c_k можно вычислить,используя свойство ортогональности функций Уолша, следующим образом:

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} \chi_k(x)F(x). \tag{6}$$

Затем сравниваем полученные в результате разложения значения со значениями исходного автомата.

Заключение. Проведенный численный эксперимент показал, что геометрический образ конечного детерминированного автомата можно представить в виде ряда, причем такой метод является точным.

В работе приводятся результаты численного эксперимента.