МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

ЭФФЕКТИВНОСТЬ И ТОЧНОСТЬ МЕТОДА ЦЕПНОЙ ЛЕСТНИЦЫ ДЛЯ ОЦЕНКИ РЕЗЕРВА ПОЗДНЕГО УБЫТКА.

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета
Сытежева Александра Олеговича

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н., доцент ______________ Л. В. Борисова

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н. ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2021

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. В современном мире актуальна проблема, связанная с прогнозированием резерва позднего убытка. Этот вопрос особо сказывается в экономической сфере деятельности человека, а непосредственно в страховой отрасли, так как напрямую затрагивает финансовые вопросы страховых организаций, суммы начислений и выплат, которые они производят. Страховщик по согласованию с федеральным органом страхового надзора может использовать различные актуарные методы определения размера резерва произошедших, но не заявленных убытков, кроме описанного в Правилах Минфина России, основанные на данных о размерах оплаченных убытков (страховых выплат), значений заявленных убытков, количестве убытков и др., в случае, если на основании фактических данных о проведении операций по страхованию страховщиком может быть обосновано, что эти методы дают более точную оценку размера резерва произошедших, но не заявленных убытков.

Метод "цепной лестницы" позволяет проводить денежную оценку обязательств страховщика на отчетную дату по произошедшим, но не заявленным убыткам, включая расходы по урегулированию убытков, возникших в связи со страховыми случаями, происшедшими в отчетном или предшествующих ему периодах, о факте наступления которых в установленном законом или договором порядке не заявлено страховщику в отчетном или в предшествующих ему периодах. Такая оценка имеет особое значение, так как она влияет на формирование суммы для проведения будущих выплат страховой компании, а также формирования денежных запасов для дальнейших, не заявленных ранее затрат. Также оценка резерва поздних убытков предусмотрена страховым законодательством всех стран.

Целью бакалаврской работы является:

1. Изучение теоретических данных о методе "цепной лестницы" .
2. Сравнение и анализ методов, позволяющих оценить резервы позднего убытка.
3. Выявление сферы применимости методов.
4. Создание программного кода для реализации данных методов и их изу-

чения.

Объект исследования - метод "цепной лестницы" .

Предмет исследования - алгоритмы и суть расчетов резервов позднего убытка.

Для достижения поставленных целей в работе необходимо решить следующие **задачи**:

1. Изучить теоретический материал на данную тему.
2. Разобрать алгоритм оценки резерва с помощью метода "цепной лестницы" и его модификаций.
3. Провести сравнение полученных оценок и установить причины возможных погрешностей.
4. Написать программный код на языке C++ для моделирования работы изученных методов и применения их на конкретных примерах вычисления резервов позднего убытка.
5. Построить график для анализа данных, полученных с помощью используемого метода.

Структура и содержание бакалаврской работы. Работа состоит из введения, 5 разделов, заключения, списка используемых источников и приложения.

Основное содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы работы, формулируется цель работы и решаемые задачи, отмечается практическая значимость исследования.

В первой главе рассматривается сфера применения и основное содержание метода "цепной лестницы" .

Точная оценка резерва заявленного убытка и резерва позднего убытка применяется не только для внешней отчетности, но и для расчета премий, которые также основываются на данных о прошлом процессе убытков. Для каждого типа рассчетов применяюися разные виды резервов. IBNR-резервы необходимы для внешней отчетности, в то время, как IBNER-резервы применяются главным образом для расчета премий и внутреннего финансового учета.

За последние годы разработано большое число математических методов оценки резерва позднего убытка. В работе рассмотрен метод "цепной лестницы". В его основу заложена идея - проецирования опыта прошлых лет событий на последующие годы событий (годом события или годом договора называется год, когда убыток произошел или должен быть учтен в бухгалтерской книге). Такой подход теряет смысл, если в течение интересующего периода случались Предполагается на рассматриваемом промежутке времени отсутствие изломов тренда или структуры, как, например, изменения в урегулировании убытков, порядке определения резерва заявленного убытка, политике формирования портфеля, юрисдикции и т.д., иначе данный подход теряет смысл.

Задачи, к которым применяется метод "цепной лестницы" обычно имеют следущий вид. Пусть S_{ik}, $1 \leq i \leq I$ - суммарная выплата в k-м году развития по убыткам, произошедшим в i-м году события. Первый год развития ($k = 1$) совпадает с годом события. Вторым годом развития ($k = 2$) является календарный год, следующий за годом события, и т. д. За I лет, предшествующих текущему году, становятся известны значения $S_{ik}, i+k \leq I+1$, образующие так называемый треугольник развития, по данным которого строятся дальнейшие вычисления.

Ближайший год события $i = I$ предшествует текущему году. Из всех убытков, произошедших в году I, известны только заявленные в том же году. Для самого отдаленного года события $i = 1$ известны $k = 1$ лет развития. Развитие первого года события предполагается полностью завершенным, то есть показатели S_{1I+1}, S_{1I+2}, ... будущих лет развития равняются нулю. По прошествии одного года треугольник развития приобретает только новую гипотенузу, значения которой

S_{I1}, S_{I-12}, ..., S_{iI+1-i}, S_{1I}
соответствуют последнему календарному году.

Особенностью построения модели является тенденция значений S_{ik} каждого года события i к уменьшению (до нуля) с ростом k (возможно, после небольшого роста в начале развития), которая обусловленна снижением вероятности изменения уровня убытка по мере увеличения срока развития. Если по истечении I лет развития все убытки одного года события известны и

S_{11}	S_{12}	...	S_{1k}	...	$S_{1,I+1-i}$	...	$S_{1,I-1}$	S_{1I}
S_{21}	S_{22}		S_{2k}	...	$S_{2,I+1-i}$	...	$S_{2,I-1}$	
...	...	...	...		...			
S_{i1}	S_{i2}		S_{ik}	...	$S_{i,I+1-i}$			
...	...	...	...					
$S_{I+1-k,1}$	$S_{I+1-k,2}$		$S_{I+1-k,k}$					
...	...							
$S_{I-1,1}$	$S_{I-1,2}$							
S_{I1}								

Примечание. Строка — год события; столбец — год развития.

полностью урегулированы, то величина

$$S_{i+} = S_{i1} + S_{i2} + ... + S_{iI}$$

представляет собой совокупный убыток i-го года события, необходимый, в частности, для расчета премий. От суммы S_{i+} на текущий момент известна только часть

$$S_{i1} + S_{i2} + ... + S_{iI+1-i}.$$

Цель метода "цепной летсницы оценить неизвестную часть

$$R_i = S_{iI+2-i} + S_{iI+3-i} + ... + S_{iI},$$

определяющую фактически требуемый размер резерва позднего убытка i-го года события. Часто треугольник развития строится в кумулятивной форме, когда на месте (i, k) стоит не приращение S_{ik} а аккумулированный уровень убытка

$$C_{ik} = S_{i1} + S_{i2} + ... + S_{ik}.$$

Из кумулятивного треугольника развития приращения получаются по формуле

$$S_{ik} = C_{ik} - C_{ik-1} \text{ (причем } C_{i0} = 0)$$

Отклонения от основной формы треугольника развития возможны, к примеру, если данные S_{ik} отдаленных календарных лет $i + k \leq r < I$ неизвестны, или последние годы событий $i \geq s > 1$ не сопоставимы с предыдущими и не должны участвовать в расчете.

Как правило, все треугольники развития строятся по двум основным видам данных:

1. C_{ik} обозначают сумму убытков, оплаченных в течении k лет развития без каких-либо резервов заявленных убытков. Данный треугольник раз-

вития более надежен для рассчетов, так как не имеет оцененных значений в своем содержании. Он дает возможность предвидеть порядок расходования оцененного резерва во времени.

Кумулятивный треугольник развития оплаченных убытков

i	C_{i1}	C_{i2}	C_{i3}	C_{i4}	C_{i5}	C_{i6}	Премия
1	45	1 968	4 442	4 831	5 199	6 302	13 085
2	30	260	480	865	1 111		14 258
3	81	500	969	1 621			16 114
4	0	1 281	2 415				15 142
5	20	131					16 905
6	14						20 224

2. C_{ik} обозначают сумму убытков, произошедших в течении k лет развития, куда входят все оущественные выплаты, а также сформированные к этому моменту резервы заявленных убытков. Данный треугольник развития позволяет намного раньше узнать порядок величины окончательного убытка C_{iI} по каждому году события. Также для построения прогнозов, необходимо привлечение меньшего количества информации прошедших лет, но при условии достаточно точной оценки заявленных убытков.

Кумулятивный треугольник развития произошедших убытков

i	C_{i1}	C_{i2}	C_{i3}	C_{i4}	C_{i5}	C_{i6}	Премия
1	4 370	6 293	10 292	12 460	13 660	14 307	13 085
2	2 701	5 291	7 162	8 945	9 338		14 258
3	4 483	6 729	10 074	11 142			16 114
4	3 254	5 804	8 351				15 142
5	8 010	12 118					16 905
6	5 582						20 224

Соответственно, S_{ik} представляет собой либо сумму выплат, произведенных в k году развития по убыткам i-го года, либо сумму этих же выплат с добавлением изменнеий резервов убытков.

Во второй главе рассматривается суть метода "цепной лестницы" , приводятся утверждения и теоремы, по которым строятся вычисления.

Метод основан на независимости нормированных приращений убытка от года события, подразумевает равенство априорных математических ожиданий $m_1 + ... + m_I$ нормированных на обьем конечных убытков $(S_{i1} + ... + S_{iI}/v_i)$ всех лет событий. В данном методе для каждого года события допускаются индивидуальное математическое ожидание.

Используя обозначения обьявленные при описании треугольника развития, представим конечный убыток

$C_{iI} = S_{i1} + ... + S_{iI}$

в мультипликативной форме

$C_{iI} = C_{i1}F_{i1}F_{i2}...F_{iI-1}$,

где

$F_{ik} = C_{ik+1}/C_{ik}$ мультипликативное приращение аккумулированного уровня убытка

$C_{ik} = S_{i1} + ... + S_{ik}, 1 \leq k \leq I - 1$

i-го года события при переходе от k-го к $k+1$-му году развития. Мультипликативное представление возможно только при условии $C_{ik} > 0$ для всех i, k, иначе произведение нужно начинать не с C_{i1}, а с первого положительного C_{ik}.

Тогда предположение одинакового для всех лет событий распределения конечного убытка C_{ik} по годам развития можно трактовать как независимость математического ожидания случайно распределенной величины F_{ik} от года события i :

$E(F_{ik}) = f_k, 1 \leq k \leq I - 1$.

Параметры f_k задают среднее приращение уровня убытка при переходе от k к $k+1$-му году развития.

В методе "цепной лестницы"оценки параметров f_k определяются как взвешанные по C_{ik} арифметические средние

$$\tilde{f}_k = \sum_{i=1}^{I-k} C_{ik} Fik / \sum_{i=1}^{I-k} C_{ik} = \sum_{i=1}^{I-k} C_{ik+1} / \sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}, 1 \le k \le I-1, \qquad (1)$$

наблюдаемых значений случайных величин F_{ik}. Следущая характерная особенность метода цепной летсницы состоит в том, что конечный убыток C_{il} оценивается величиной

$$\tilde{C}_{iI} = C_{iI+1-i} \tilde{f}_{I+1-i} \cdot ... \tilde{f}_{I-1}, \quad 2 \le i \le I \qquad (2)$$

а резерв

$R_i = C_{iI} - C_{iI+1-i}$,

величиной

$\tilde{R}_i = C_{iI+1-i}(\tilde{f}_{I+1-i} \cdot ... \cdot \tilde{f}_{I-1} - 1)$,

то есть прогноз основывается только на текущем уровне убытка C_{iI+1-i} года события i, а все предыдущие состояния игнорируются.

(ЦЛ1) Существуют такие множители развития $f_1, ..., f_{I-1}$, что

$$E(\frac{C_{ik+1}}{C_{ik}} | C_{i1} ... C_{ik}) = f_k, 1 \le i \le I, 1 \le k \le I-1, C_{ik}.$$

(ЦЛ2) Годы событий $C_{i1} ... C_{iI}, 1 \le I$ независимы.

Теорема 1. *При выполнении (ЦЛ1) и (ЦЛ2) справедливо равенство*

$E(C_{iI|D}) = C_{iI+1-i} \cdot f_{I+1-i} \cdot ... \cdot f_{I-1}, \quad 2 \le i \le I.$

Теорема 2. *При справедливости ЦЛ1 и ЦЛ2 оценки $\tilde{f}_k$, заданные формулой (1), являются несмещенными и некоррелированными, причем*

$E(\tilde{f}_{I+1-i} \cdot ... \cdot \tilde{f}_{I-1}) = f_{I+1-i} \cdot ... \cdot f_{I-1}.$

На оценку резерва позднего убытка метода "цепной лестницы"и расчет показателя точности влияет оценка последнего множителя развития f_{I-1}. Она основывается только на одном наблюдении S_{1I}, из-за чего наблюдаемое приращение убытка $\tilde{f}_{I-1} = \frac{(C_{1I-1} + S_{1I})}{C_{1I-1}}$ первого года события переносится на все последующие годы событий $i = 2, ..., I$.

Заменяя C_{I1} средним по всем годам событий $\frac{v_i \sum\limits_{i=1}^{I} C_{i1}}{\sum\limits_{i=1}^{I} v_i}$, мы можем скорректировать недопустимые значения в формуле оценки резерва:
где v_i - обьем портфеля в году события i. Если используемые при этом значения C_{i1} других лет событий тоже непоказательны, то их заменяют обратными проекциями

$$\tilde{C}_{i1} = \frac{C_{i,I+1-i}}{\tilde{f}_1 \cdot ... \cdot \tilde{f}_{I-i}}$$

соответствующих текущих уровней убытка. Тогда в качестве оценки среднего первоначального уровня убытка получим

$$\tilde{q}_i = \frac{\sum\limits_{i=1}^{I} C_{iI+1-i}}{\sum\limits_{i=1} I(\tilde{f}_1 \cdot ... \cdot \tilde{f}_{I-i} \cdot v_i)},$$

и значение C_{I1} в формуле оценки резерва $\tilde{R}_I$ заменится на $v_1 \tilde{q}_1$. Таким образом можно повысить устойчивость других состояний $C_{I-1,2}, C_{I-2,3}, ...$

(ЦЛ3) Существует постоянные коэффициэнты пропорциональности $\sigma_1^2, ..., \sigma_{I-1}^2$ такие, что

$$Var(\frac{C_{ik+1}}{C_{ik}} | C_{i1}, ..., C_{ik}) = \frac{\sigma_k^2}{C_{ik}}, \quad 1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq I-1,$$

при $C_{ik} > 0$(или $Var(C_{ik+1}|C_{i1}, ..., C_{ik}) = C_{ik}\sigma_k^2$).

Теорема 3. *При выполнении (ЦЛ1),(ЦЛ2) и (ЦЛ3) средняя квадратичная ошибка оценки резерва $\tilde{R}_i$ по методу "цепной лестницы"оценивается величиной*

$$(s.e.(\tilde{R}_i))^2 = \tilde{C}_{iI}^2 \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\tilde{\sigma}_k^2}{\tilde{f}_k^2} (\frac{1}{\tilde{C}_{ik}} + \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{I-k}} C_{jk}),$$

где $\tilde{C}_{ik} = C_{iI+1-i} \tilde{f}_{I+1-i} \cdot ... \cdot \tilde{f}_{k-1}$-оценка для $C_{ik}, k > I+1-i$ и для упрощения записи примем $\tilde{C}_{iI+1-i} = C_{iI+1-i}$.

В третьей главе рассматривается модификация метода "цепной лестницы" . Показаны алгоритм построения вычислений, а также особенности данного рода моделей.

Метод цепной лестницы, опирается на предположение

(ЦЛ1) $E(C_{ik+1}|C_{i1,...,C_{ik}}) = C_{ik} f_k, \quad 1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq I-1$

для кумулятивных убытков $C_{ik} > 0$. Применим к этому равенству оператор математического ожидания и воспользуемся его свойствами итеративности.

Получим, что модель цепной лестницы - частный случай класса моделей, удовлетворяющих условию

(A) $E(C_{ik+1}) = E(C_{ik})f_k, \quad 1 \le i \le I, \quad 1 \le k \le I-1,$

где параметры $f_1, ..., f_{I-1}$ неизвестны и положительны.

Теорема 4. *Каждая модель, удовлетворяющая условию (A), также удовлетворяет условию*

(B) $E(S_{ik}) = x_i y_k, 1 \le i, k \le I,$

где $S_{ik} = C_{ik} - C_{ik-1}, (C_{i0} = 0)$ *- приращение суммарного убытка* i*-го года события в* k*-м году развития, а параметры* $x_i > 0$ *и* $y_k > 0$ *неизвестны, причем* $y_1 + ... + y_I = 1$. *И наоборот, каждая модель вида (B) одновременно является моделью вида (A).*

Формально модель перекрестной параметризации, основанная на предположении модифицированного распределения Пуассона для приращений S_{ik}, представляет собой частный случай модели , когда $v_{ik} = 1$, а матрица данных s_{ik} имеет треугольную форму, $i + k \le I + 1$. Как мы уже знаем , при $s_{ik} > 0, i + k \le I + 1$, уравнения правдоподобия относительно параметров x_i,y_k совпадают с условиями маргинальных сумм

$$\sum_{k=1}^{I+1-i} x_i y_k = \sum_{k=1}^{I+1-i} s_{ik}, \quad 1 \le i \le I$$

$$\sum_{k=1}^{I+1-k} x_i y_k = \sum_{k=1}^{I+1-k} s_{ik}, \quad 1 \le k \le I$$

Для изучения модели, основанной на распределении Пуассона воспользуемся теоремой максимума правдоподобия. Статистика критерия для проверки согласованности модели с данными:

$$T = \frac{1}{w} \sum_{i,k} \frac{(s_{ik} - \tilde{x_i}\tilde{y_k})^2}{\tilde{x_i}\tilde{y_k}}$$

суммирование ведется по ячейкам $i + k \le I + 1$ треугольника развития. При проверке гипотезы параметр w должен считаться известным. Число степеней свободы хи-квадрат-распределения статистики T составляет $(I+1)I/2-2I+1$. Этот критерий особенно полезен при работе с треугольником развития числа убытков, распределенных по обычному закону Пуассона,- параметр w в этом случае 1.

Для удобства использования метода цепной лестницы с перекретсной параметризацией, нужно попытаться сократить число параметров, особенно в острыхуглах треугольника развития, где находится наименьшее количество наблюдений.

Для этого применяется экспоненциальное сглаживание параметров лет развития y_k

$y_k = ae^{-bk}$ (соответственно, $b_k = -bk$)

В четвертой главе производится сравнение двух вариантов метода "цепной лестницы" .

В ходе работы были рассмотрены метод "цепной лестницы" , не зависящий от распределения, и метод "цепной лестницы" , основанный на распределении Пуассона. Можно заметить, что получены различия стандартной ошибки оценки $\tilde{R}_i$ от стандартной ошибки метода цепной лестницы. Это указывает на то, что не смотря на схожесть данных моделей, они являются разными методами оценивания резерва позднего убытка. Хотя формально оценка максимального правдободобия в случае модифицированного распределения Пуассона схожа с оценкой по методу цепной лестницы, важно помнить, что имеются смысловые различия данных методов:

1. модель Пуассона предполагает независимые и положительные приращения, а модель цепной лестницы нет.
2. оценка ожидаемого убытка в области наблюдаемого развития $i + k \leq I + 1$ в методе Пуассона получается обратной проекцией текущих уровней c_{iI+1-i} с помощью множителей развития цепной лестницы $\tilde{f}_k$, тогда как та же величина в модели цепной лестницы оценивается прямой проекцией.

Отсюда ясно, что стандартная ошибка модели Пуассона не совпадает со стандартной ошибкой модели цепной лестницы.

Подводя итоги рассмотрения двух методов, можно сформулировать теорему:

Теорема 5. *Оценка максимального правдоподобия резерва убытка в модели с перекрестной параметризацией, основанной на распределении Пуассона, схожа с резервом по методу цепной лестницы, если приращения s_{ik}, $i+k \leq I + 1$.*

Пятый раздел посвящен вычислительному эксперименту и анализу работы программ.

Разработан программный код на языке C++, реализующий вычисления резервов на основании алгоритма метода "цепной лестницы" и его модификации, а также построен график для анализа полученных данных. Было проведено сравнение методов с аналитическим решением конкетной задачи, на основании которого были сделаны выводы о применимости каждого из методов.

В заключении приведены результаты бакалаврской работы.

В приложении представлен программный код, реализующий каждый из методов.

Основные результаты

1. Изучен теоретический материал на данную тему.
2. Разобраны алгоритмы оценки резерва с помощью метода "цепной лестницы" и его модификаций.
3. Проведено сравнение полученных оценок и установлены причины возможных погрешностей.
4. Написан программный код на языке C++ для моделирования работы изученных методов и применения их на конкретных примерах вычисления резервов позднего убытка.
5. Построен график для анализа данных, полученных с помощью используемого метода.