МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и математической экономики

Двукратное разложение по собственным функциям нерегулярного обыкновенного дифференциального пучка операторов второго порядка с распадающимися краевыми условиями

название темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 411 группы
направления 01.03.02 - Прикладная математика и информатика
код и наименование направления
механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа
Семенковой Оксаны Олеговны
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент ____________________ В.С. Рыхлов
должность, уч. степень, уч. звание | дата, подпись | инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
зав. каф.,д.ф.-м.н., профессор ____________________ С.И. Дудов
должность, уч. степень, уч. звание | дата, подпись | инициалы, фамилия

Саратов 2021

Введение. Многие вопросы современного естествознания приводят к спектральному анализу несамосопряженных операторов. Спектральный анализ таких операторов включает в себя задачи определения собственных значений, собственных и присоединенных функций или, как часто говорят, корневых функций , разложения произвольной функции в ряд по собственным присоединенным функциям. А также пучков таких операторов, в частности, асимптотику спектра, полноту и базисность корневых функций, возможность разложения в обобщенные ряды Фурье по корневым функциям и т.д.

Теория нерегулярных обыкновенных дифференциальных операторов, а также пучков таких операторов интенсивно развивалась на протяжении долгих лет. Большой вклад в создание этой теории внесли такие математики, как G. D. Birkhoff, Я. Д. Тамаркин, М. В. Келдыш, А. П. Хромов, А. А. Шкаликов и др.

Дипломная работа носит реферативный характер. Была поставлена задача — разобрать статью, в которой формулируется и доказывается теорема о двукратном разложении по собственным функциям нерегулярного обыкновенного дифференциально пучка операторов второго порядка с распадающимися краевыми условиями.

Целью бакалаврской работы является:

1. Изучение теоретического материала по теории нерегулярных обыкновенных дифференциальных пучков.
2. Разработка численного алгоритма и проведение численного эксперимента.

Работа состоит из введения, пяти разделов, заключения, списка использованных источников и приложений А и Б.

Во введении описывается область работы и формулируется общая цель исследования.

В первом разделе рассматривается постановка задачи и краткая история вопроса.

Во втором разделе приводится формулировка теоремы о двукратном разложении.

В третьем разделе рассматриваются вспомогательные результаты, а именно леммы, которые помогут при доказательстве теоремы о двукратном разложении.

В четвертом разделе приводится доказательство теоремы с помощью вспомогательных лемм из третьего раздела.

В пятом разделе приводится подробное описание численного эксперимента по исследованию теоремы о разложении.

В приложении А приводится код программы, написанный в среде MATLAB. В приложении Б приводится результат программы.

Основное содержание работы. В **первом** разделе вводится постановка задачи и краткая история вопроса.

В пространстве $L_2\,[0,1]$ рассматривается квадратичный пучок $L(\lambda)$ обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка вида:

$$l(y,\lambda) := y'' + p_1\lambda y' + p_2\lambda^2 y,$$

$$U_1(y,\lambda) := \alpha_1 y'(0) + \lambda\alpha_0 y(0) = 0,\ U_2(y,\lambda) := \beta_1 y'(1) + \lambda\beta_0 y(1) = 0,$$

где $p_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C}$.

Рассматривается задача нахождения условий для параметров пучка $L(\lambda)$ и вектор-функции $f = (f_0, f_1)^T$, для которых существует двукратное разложение f в биортогональный ряд Фурье по собственным функциям этого пучка.

Во **втором** разделе приводится формулировка теоремы о двукратном разложении.

Для начала вводятся дополнительные обозначения.

Обозначим через ω_1, ω_2 корни характеристического уравнения:

$$\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0.$$

Предполагаем, что корни ω_1, ω_2 удовлетворяют следующим неравенствам:

$$0 < \omega_1 < \omega_2, \tag{1}$$

$$2\omega_1 < \omega_2. \tag{2}$$

Фундаментальная система решений (ф.с.р.) уравнения $l(y,\lambda) = 0$ при $\lambda \neq 0$ имеет вид:

$$y_1(x,\lambda) := e^{\lambda\omega_1 x}, \;\; y_2(x,\lambda) := e^{\lambda\omega_2 x}.$$

Для определенности полагаем, что $\alpha_1 \neq 0$ или $\beta_1 \neq 0$. Обозначения:

$$\upsilon_j = \alpha_1\omega_j + \alpha_0, \;\; w_j = \beta_j + \beta_0, V_j = \begin{pmatrix} \upsilon_j \\ 0 \end{pmatrix}, W_j = \begin{pmatrix} 0 \\ w_j \end{pmatrix}, \; j = 1, 2;$$

$$a_{sk} = |W_s, W_k|, a_{\overline{s}k} = |V_s, W_k|, a_{s\overline{k}} = |W_s, V_k|, a_{\overline{s}\overline{k}} = |V_s, V_k|, s, k = 1, 2.$$

Характеристический определитель пучка $L(\lambda)$ имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) = det\left(U_\nu(y_j,\lambda)\right)^2_{\nu,j=1} = \lambda^2 \left|V_1 + e^{\lambda\omega_1}W_1; V_2 + e^{\lambda\omega_2}W_2\right| = \\ = \lambda^2\left(a_{\overline{1}\overline{2}} + e^{\lambda\omega_1}a_{1\overline{2}} + e^{\lambda\omega_2}a_{\overline{1}2} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)}a_{12}\right) = \\ = \lambda^2\left(e^{\lambda\omega_1}a_{1\overline{2}} + e^{\lambda\omega_2}a_{\overline{1}2}\right) = \lambda^2\Delta_0(\lambda),\end{aligned} \tag{3}$$

где $a_{1\overline{2}} = \upsilon_2 w_1$, $a_{\overline{1}2} = \upsilon_1 w_2$, а коэффициенты $a_{\overline{1}\overline{2}}$ и a_{12} в рассматриваемом случае очевидно, равны нулю, в виду распадаемости граничных условий. **Определение 2.1** Те значения λ, для которых краевая задача $L(\lambda)y = 0$ имеет нетривиальные решения, называются собственными значениями краевой задачи (пучка $L(\lambda)$), а соответствующие им нетривиальные решения y – собственными функциями. Далее пусть выполняются условия:

$$\upsilon_1 \neq 0, \; \upsilon_2 \neq 0, \; w_1 \neq 0, \; w_2 \neq 0. \tag{4}$$

Собственные функции пучка $L(\lambda)$ порождаются следующей функцией для $\lambda = \lambda_k \neq 0$

$$\gamma(x,\lambda) = \begin{vmatrix} \upsilon_1 & \upsilon_2 \\ e^{\lambda\omega_1 x} & e^{\lambda\omega_2 x} \end{vmatrix} = -\upsilon_2 e^{\lambda\omega_1 x} + \upsilon_1 e^{\lambda\omega_2 x}.$$

Из (3)–(4) следует, что корни уравнения $\Delta_0(\lambda) = 0$ имеют вид

$$\lambda_k = \frac{2k\pi i + d_0}{\omega_2 - \omega_1}, k \in \mathbb{Z},$$

где $d_0 := \ln_0 c_0$, $c_0 = -a_{1\bar{2}}/a_{\bar{1}2} = (\upsilon_2 w_1)/(\upsilon_1 w_2)$ ($\ln_0$ есть фиксированная ветвь натурального логарифма такая, что $\ln_0 1 = 0$).

Пусть $\Lambda := \{\lambda_k | k \in \mathbb{Z}\}$. $\Lambda \backslash \{0\}$ есть множество ненулевых собственных значений пучка $L(\lambda)$. Точка $\lambda = 0$ может быть собственным значением, а может и не быть, даже если $0 \in \Lambda$. Линеаризуем пучок $L(\lambda)$: $z_0 = y$, $z_1 = \lambda z_0$. Задача $L(\lambda)y = 0$ затем преобразуется в следующую задачу на собственные значения в пространстве вектор-функций для дифференциального оператора $\widehat{L}$:

$$\widehat{L}z = \lambda z,$$

где $z = (z_0, z_1)^T$

$$z \in D_{\widehat{L}} = \left\{ z = (z_0, z_1)^T | z_0', z_1 \in L_1[0,1], U_j(z) = 0, j = 1, 2 \right\},$$

$$U_1(z) := \alpha_1 z_0'(0) + \alpha_0 z_1(0), U_2(z) := \beta_1 z_0'(1) + \beta_0 z_1(1), i = 1, 2.$$

Определение 2.2 Пусть λ — собственное значение оператора L, а $y_0(x)$ — соответствующая собственная функция. Система функций $y_1(x), \ldots, y_k(x)$ называется цепочкой функций, присоединенных к собственной функции $y_0(x)$, если функции $y_0(x), y_1(x), \ldots, y_k(x)$ являются решениями следующих задач

$$Ly_q - \lambda y_q = y_{q-1},\ q = 0, \ldots, k.$$

Пусть $\widehat{R}_\lambda = (\widehat{L} - \lambda \widehat{E})^{-1}$ будет резольвентой оператора $\widehat{L}$ и $f = (f_0, f_1)^T$. Известно, что

$$I(f) := -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \int_{\gamma_\nu} \widehat{R}_\lambda f \, d\lambda$$

является разложением вектор-функции f в биортогональный ряд Фурье по собственным вектор-функциям оператора $\widehat{L}$ или, что то же самое, по производным цепочкам пучка $L(\lambda)$, построенным по системе его собственных функций. Здесь γ_ν является простым замкнутым контуром, окружающим только одну точку λ_ν. Чтобы сформулировать теорему о двукратном разложении в терминах собственных функций пучка $L(\lambda)$, для краткости введем следующие обозначения:

$$e_1 := \frac{a_{\bar{1}1}}{a_{1\bar{2}}} \left(= -\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\right), \quad e_2 := \frac{a_{2\bar{2}}}{a_{1\bar{2}}} \left(= \frac{w_2}{w_1}\right), \quad d_1 := \frac{a_{\bar{1}2}}{a_{1\bar{2}}} \left(= e_1 e_2\right), \quad \tau := \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

$$\theta := \frac{1}{\omega_2 - \omega_1}, \alpha_x := 1 - \frac{1-x}{\tau}, \quad \beta_x := \tau x, \quad \gamma_x := x + 1 - \frac{1}{\tau}$$

$$\widetilde{\alpha}_x := 1 - \tau(1-x) \quad , \widetilde{\beta}_x := \frac{x}{\tau} \quad , \widetilde{\gamma}_x := x - 1 + \frac{1}{\tau}.$$

Пусть $F_1(x) := \int\limits_0^x f_1(t)\,dt$. Обозначим:

$$H_1(x, F_1) := -2F_1(x) + e_2 F_1(\alpha_x) - e_1 F_1(\beta_x) + d_1 F_1(\gamma_x) + \\ + \frac{1}{e_2} F_1(\widetilde{\alpha}_x) - \frac{1}{e_1} F_1(\widetilde{\beta}_x) + \frac{1}{d_1} F_1(\widetilde{\gamma}_x),$$

$$H_2(x, f_0) := 2\omega_1 f_0(x) - e_2 \omega_2 f_0(\alpha_x) + e_1 \omega_1 f_0(\beta_x) - d_1 \omega_2 f_0(\gamma_x) - \\ - \frac{\omega_1}{e_2} f_0(\widetilde{\alpha}_x) + \frac{\omega_2}{e_1} f_0(\widetilde{\beta}_x) - \frac{\omega_2}{d_1} f_0(\widetilde{\gamma}_x),$$

$$H_3(x, f_1) := -\frac{2}{\omega_1} f_1(x) + \frac{e_2}{\omega_2} f_1(\alpha_x) - \frac{e_1}{\omega_1} f_1(\beta_x) + \frac{d_1}{\omega_2} f_1(\gamma_x) + \\ + \frac{1}{\omega_1 e_2} f_1(\widetilde{\alpha}_x) - \frac{1}{\omega_2 e_1} f_1(\widetilde{\beta}_x) + \frac{1}{\omega_2 d_1} f_1(\widetilde{\gamma}_x),$$

$$H_4(x, f_0') := 2f_0'(x) - e_2 f_0'(\alpha_x) + e_1 f_0'(\beta_x) - d_1 f_0'(\gamma_x) - \\ - \frac{1}{e_2} f_0'(\widetilde{\alpha}_x) + \frac{1}{e_1} f_0'(\widetilde{\beta}_x) - \frac{1}{d_1} f_0'(\widetilde{\gamma}_x).$$

Приходим к формулировке основной теоремы бакалаврской работы.

Теорема 1. *Если*

$$f_0'', f_1' \in L_p[0,1], p > 1,$$

и выполняются условия (1), (2), (4) и

$$f_0(0) = f_0(1) = f_0'(0) = f_0'(1) = f_1(0) = f_1(1) = F(1) = 0$$

тогда для $x \in [0,1]$ *имеет место равномерная сходимость*

$$I(f)(x) = f(x) + \theta h(x, f),$$

где

$$I(f)(x) := (I_0(f)(x), I_1(f)(x))^T \,, h(x,f) := (h_0(x,f), h_1(x,f))^T \,,$$

$$h_0(x,f) := p_2 H_1(x, F_1) + H_2(x, f_0), h_1(x,f) := p_2 H_3(x, f_1) + H_4(x, f_0').$$

В третьем разделе рассматриваются вспомогательные результаты, а именно леммы, которые помогут при доказательстве теоремы 1.

Лемма 3.1 *Если* $f_0, f_1' \in L_1[0,1]$ *и*

$$f_0(0) = f_0(1) = 0, \tag{5}$$

то $z_0(x, \lambda; f)$ *удовлетворяет следующим двум представлениям для* $\lambda \notin \Lambda$

$$z_0(x,\lambda;f) = (\frac{a_{1\bar{2}}\theta}{\lambda\Delta_0(\lambda)} \int\limits_0^1 e^{\lambda\omega_1(x+1-t)} f_\lambda(t)\,dt - \frac{a_{2\bar{2}}\theta}{\lambda\Delta_0(\lambda)} \int\limits_0^1 e^{\lambda(\omega_1 x + \omega_2(1-t))} f_\lambda(t)\,dt +$$

$$+\frac{a_{1\bar{1}}\theta}{\lambda\Delta_0(\lambda)} \int\limits_0^1 e^{\lambda(\omega_1(1-t)+\omega_2 x)} f_\lambda(t)\,dt - \frac{a_{\bar{1}2}\theta}{\lambda\Delta_0(\lambda)} \int\limits_0^1 e^{\lambda\omega_2(x+1-t)} f_\lambda(t)\,dt) -$$

$$-\left(\frac{\theta}{\lambda} \int\limits_0^x e^{\lambda\omega_1(x-t)} f_\lambda(t)\,dt - \frac{\theta}{\lambda} \int\limits_0^x e^{\lambda\omega_2(x+1-t)} f_\lambda(t)\,dt \right),$$

$$z_0(x,\lambda;f) = (\frac{a_{2\bar{2}}\theta}{\lambda\Delta_0(\lambda)} \int\limits_0^1 e^{\lambda(\omega_1 x + \omega_2(1-t))} f_\lambda(t)\,dt + \frac{a_{\bar{1}1}\theta}{\lambda\Delta_0(\lambda)} \int\limits_0^1 e^{\lambda(\omega_1(1-t)+\omega_2 x)} f_\lambda(t)\,dt -$$

$$-\frac{a_{\overline{1}2}\theta}{\lambda\Delta_0(\lambda)}\int\limits_0^1 e^{\lambda(\omega_1(x-t)+\omega_2)}f_\lambda(t)\,dt+\frac{a_{1\overline{2}}\theta}{\lambda\Delta_0(\lambda)}\int\limits_0^1 e^{\lambda(\omega_1+\omega_2(x-t))}f_\lambda(t)\,dt)+$$

$$+\left(\frac{\theta}{\lambda}\int\limits_x^1 e^{\lambda\omega_1(x-t)}f_\lambda(t)\,dt-\frac{\theta}{\lambda}\int\limits_x^1 e^{\lambda\omega_2(x-t)}f_\lambda(t)\,dt\right),$$

$$z_1(x,\lambda;f)=\lambda z_0(x,\lambda;f)+f_0(x),$$

где

$$f_\lambda(x):=\widetilde{f}(x)-\lambda p_2 f_0,\widetilde{f}(x):=-p_2f_1(x)-p_1f_0'(x).$$

Лемма 3.2 *Существует такая положительная константа* $\mathbb{C}_\delta$*, что*

$$\forall\lambda\in\mathbb{C}_\delta^-:\left\|\Delta_0^-(\lambda)\right|\geqslant C_\delta;\qquad\forall\lambda\in\mathbb{C}_\delta^+:\left\|\Delta_0^+(\lambda)\right|\geqslant C_\delta$$

Лемма 3.3 *Если* $\gamma(x,t)=\gamma_0+\gamma_1x+\gamma_2t(\gamma_2\neq 0)$ *и* $\gamma(x,t)\operatorname{Re}\lambda\leqslant 0\quad\forall\lambda\in\Gamma_\nu^+(\Gamma_\nu^-)$ *при* $x\in[0,1]$, $t\in[a(x),b(x)]$, *где* $a(x),b(x)$ *заданные линейные функции,* $f\in L_p[0,1],p>1$, $\chi_p(\nu)=\nu^{1/p}$ *при* $1<p<\infty$ *и* $\chi_\infty(\nu)=\ln\nu$, *то*

$$\left|-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu^+(\Gamma_\nu^-)}\left(\int_{a(x)}^{b(x)}e^{\gamma(x,t)\lambda}h(t)\,dt\right)\,d\lambda\right|\leqslant C\left|\left|h\right|\right|_p\chi_p(\nu).$$

Лемма 3.4 *Если* f_0', $f_1\in L_1[0,1]$ *и (5) действительны, то в случае* $\operatorname{Re}\lambda<0$ *выполняется следующая формула при* $\lambda\notin\Lambda$

$$z_0(x,\lambda;f)=$$

$$=\Big(-\frac{d_1\theta}{\lambda\Delta_0^-(\lambda)}\int\limits_0^1 e^{\lambda\omega_1(x-t-1)+\omega_2}f_\lambda(t)\,dt+\frac{e_2d_1\theta}{\lambda\Delta_0^-(\lambda)}\int\limits_0^1 e^{\lambda(\omega_1(x-2)+\omega_2(2-t))}f_\lambda(t)\,dt-$$

$$+\frac{e_1\theta}{\lambda}\int\limits_0^1 e^{\lambda(\omega_2 x-\omega_1 t)}f_\lambda(t)\,dt-\frac{d_1\theta}{\lambda}\int\limits_0^1 e^{\lambda(\omega_2(x-t+1)-\omega_1)}f_\lambda(t)\,dt\Big)+$$

$$+(-\frac{\theta}{\lambda}\int\limits_0^x e^{\lambda\omega_1(x-t)}f_\lambda(t)\,dt+\frac{\theta}{\lambda}\int\limits_0^x e^{\lambda\omega_2(x-t)}f_\lambda(t)\,dt)=$$

$$=A(x,\lambda;f_\lambda)+a(x,\lambda;f_\lambda)+\alpha(x,\lambda;f_\lambda).$$

Лемма 3.5 *Если f_0', $f_1\in L_1[0,1]$ и (5) действительны, то в случае* $\operatorname{Re}\lambda>0$ *выполняется следующая формула при* $\lambda\notin\Lambda$

$$z_0(x,\lambda;f)=\Big(\frac{\theta}{\lambda e_1 d_1\Delta_0^+(\lambda)}\int\limits_0^1 e^{\lambda(\omega_1(x+1)-\omega_2(t+1))}f_\lambda(t)\,dt-$$

$$-\frac{\theta}{\lambda e_2 d_1\Delta_0^+(\lambda)}\int\limits_0^1 e^{\lambda(\omega_1(2-t)-\omega_2(x-2))}f_\lambda(t)\,dt+\frac{\theta}{\lambda d_1\Delta_0^+(\lambda)}\int\limits_0^1 e^{\lambda(\omega_1(x-t+1)-\omega_2)}f_\lambda(t)\,dt-$$

$$-\frac{\theta}{\lambda d_1^2\Delta_0^+(\lambda)}\int\limits_0^1 e^{\lambda(2\omega_1(x+1)+\omega_2(x-t-2))}f_\lambda(t)\,dt\Big)+$$

$$+\Big(-\frac{\theta}{\lambda}\int\limits_0^1 e^{\lambda\omega_1(x-t)}f_\lambda(t)\,dt+\frac{\theta}{e_2\lambda}\int\limits_0^1 e^{\lambda(\omega_1(1-t)+\omega_2(x-1))}f_\lambda(t)\,dt-$$

$$-\frac{\theta}{e_1\lambda}\int\limits_0^1 e^{\lambda(\omega_1 x-\omega_2 t)}f_\lambda(t)\,dt+\frac{\theta}{\lambda d_1}\int\limits_0^1 e^{\lambda(\omega_1+\omega_2(x-t-1))}f_\lambda(t)\,dt\Big)+$$

$$+\Big(\frac{\theta}{\lambda}\int\limits_x^1 e^{\lambda\omega_1(x-t)}f_\lambda(t)\,dt-\frac{\theta}{\lambda}\int\limits_0^1 e^{\lambda(\omega_2(x-t))}f_\lambda(t)\,dt\Big)=$$

$$=B(x,\lambda;f_\lambda)+b(x,\lambda;f_\lambda)+\beta(x,\lambda;f_\lambda).$$

В **четвертом** разделе приводится подробное доказательство теоремы 1 с помощью вспомогательных лемм из третьего раздела. Сделан вывод, что следующие формулы:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu} z_0(x,\lambda;f)\,d\lambda = \\
&\qquad = f_0(x) + p_2\theta\Big(-2F_1(x) + e_2F_1(\alpha_x) - e_1F_1(\beta_x) + d_1F_1(\gamma_x) + \\
&\qquad + \frac{1}{e_2}F_1(\widetilde{\alpha}_x) - \frac{1}{e_1}F_1(\widetilde{\beta}_x) + \frac{1}{d_1}F_1(\widetilde{\gamma}_x)\Big) + \theta\Big(2\omega_1 f_0(x) - e_2\omega_2 f_0(\alpha_x) + \\
&\qquad + e_1\omega_1 f_0(\beta_x) - d_1\omega_2 f_0(\gamma_x) - \frac{\omega_1}{e_2}f_0(\widetilde{\alpha}_x) + \frac{\omega_2}{e_1}f_0(\widetilde{\beta}_x) - \frac{\omega_2}{d_1}f_0(\widetilde{\gamma}_x)\Big) + o_u(1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu^+} z_1(x,\lambda;f)\,d\lambda = \\
&\qquad = f_1(x) + p_2\theta\Big(-\frac{2}{\omega_1}f_1(x) + \frac{e_2}{\omega_2}f_1(\alpha_x) - \frac{e_1}{\omega_1}f_1(\beta_x) + \frac{d_1}{\omega_2}f_1(\gamma_x) + \\
&\qquad + \frac{1}{e_2\omega_1}f_1(\widetilde{\alpha}_x) - \frac{1}{e_1\omega_2}f_1(\widetilde{\beta}_x) + \frac{1}{d_1\omega_2}f_1(\widetilde{\gamma}_x) + \theta\Big(2f_0'(x) - e_2f_0'(\alpha_x) + \\
&\qquad + e_1f_0'(\beta_x) - d_1f_0'(\gamma_x) - \frac{1}{e_2}f_0'(\widetilde{\alpha}_x) + \frac{1}{e_1}f_0'(\widetilde{\beta}_x) - \frac{1}{d_1}f_0'(\widetilde{\gamma}_x)\Big) + o_u(1),
\end{aligned}
$$

являются формулами двукратного разложения вектора $f = (f_0, f_1)^T$ по собственным функциям рассматриваемого пучка $L(\lambda)$.

В **пятом** разделе приводится подробное описание численного эксперимента по исследованию теоремы о разложении. Целью построения программы является сравнение точного и численного решения с наперед заданной точностью. Алгоритм программы следующий: входными данными являются шаг разбиения отрезка, количество разбиений окружности и точность вычислений.

Затем, в качестве точного решения используются функции cor0 и cor1, которые в условии теоремы 1 были даны, как $I_0(f)(x)$ и $I_1(f)(x)$ соответственно. Через функции test0 и test1 обозначены численные решения для соотвествующих интегралов.

Далее, по всем узлам разбиения основого отрезка, считаются значения точного и численного решения. Численное интегрировование, использующееся в программе, происходит по методу Симпсона. После подсчета значений до тех пор, пока разность точного и численного не будет меньше заданной погрешности, происходит разбиение окружнсти вокруг собственных значений. В конце программы подсчитывается погрешность между точным и численным решениями.

Заключение. В данной бакалаврской работе рассмотрена задача нахождения условия для параметров пучка $L(\lambda)$ и вектор-функции $f = (f_0, f_1)^T$, для которых имеет место двукратное разложение f в биортогональный ряд Фурье по собственным функциям этого пучка. Так же в процессе выполнения дипломной работы был проведен численный эксперимент для исследования теоремы о двукратном разложении, который показал, что точное и численное решения совпадают с заданной погрешностью или меньше.