МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

«Об обратной задаче для интегро-дифференциальных операторов»

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 217 группы
направления 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»

механико-математического факультета

Мельникова Никиты Алексеевича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-.м.н., доцент ____________ С.А. Бутерин

Зав. кафедрой
д.ф.-.м.н., профессор ____________ В.А. Юрко

Саратов 2021

Введение. В данной работе изучаются обратные задачи спектрального анализа для интегро-дифференциальных операторов. Обратные спектральные задачи заключаются в восстановлении операторов по некоторым их спектральным характеристам.Наиболее полные результаты в теории обратных спектральных задач получены для дифференциального оператора Штурма-Лиувилля $-y'' + q(x)y$. Обратные задачи для оператора Штурма-Лиувилля исследовались в работах В.А. Амбарцумяна, Г. Борга, М.Г. Гасымова, И.М. Гельфанда, М.Г. Крейна, Н. Левинсона, Б.М. Левитана, В.А. Марченко, Ф.С. Рофе-Бекетова, А.Н. Тихонова, Л.Д. Фаддеева и других авторов. Первый результат в этом направлении принадлежит В.А. Амбарцумяну. Он показал, что, если собственные значения краевой задачи $-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0$ суть $\lambda_k = k^2, k \geq 0$, то $q(x) = 0$. Теория обратных задач спектрального анализа является интенсивно развивающейся на протяжении последних десятилетий областью математики, поскольку интерес к таким задачам постоянно растёт.

Исследование обратных спектральных задач обычно связано с тремя основными этапами:

1) выяснение того, какие спектральные данные однозначно определяют оператор, и доказательство соответствующих теорем единственности;

2) конструктивное решение обратной задачи: разработка метода решения и построение алгоритма восстановления оператора по рассматриваемым спектральным данным;

3) нахождение характеристических свойств рассматриваемых спектральных данных, получение необходимых и достаточных условий разрешимости обратной задачи.

В данной работе исследуется обратная задача спектрального анализа для интегро-дифференциального оператора с условиями разрыва

$$\ell y = -y'' + q(x)y + \int_0^x M(x-t)y(t)\,dt = \lambda y, \quad x \in \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big) \cup \Big(\frac{\pi}{2}, \pi\Big), \quad (0.0.1)$$

$$y\Big(\frac{\pi}{2}+0\Big) = \alpha_0 y\Big(\frac{\pi}{2}-0\Big), \quad y'\Big(\frac{\pi}{2}+0\Big) = \alpha_1 y'\Big(\frac{\pi}{2}-0\Big) + \beta y\Big(\frac{\pi}{2}-0\Big), \quad (0.0.2)$$

$$y(0) = y(\pi) = 0, \tag{0.0.3}$$

Присутствие разрыва в математической модели связано с разрывными свойствами материалов или с наличием разрыва в соответствующем физическом процессе.

Обратная задача заключается в восстановлении функции $M(x)$ по спектру $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ краевой задачи (0.0.1)-(0.0.3). Доказана единственность решения этой обратной задачи и получены необходимые и достаточные условия её разрешимости. При этом доказательство конструктивно и даёт алгоритм решения обратной задачи.

В первой главе приведена постановка задачи и рассмотрена харатеристическая функция. Задача сводится к, так называемому, основному нелинейному интегральному уравнению, которому посвящена вторая глава.

Во второй главе исследуется основное нелинейное итегральное уравнение и доказывается его глобальная разрешимость.

Третья глава посвящена доказательству единственности решения обратной задачи и получению необходимых и достаточных условий её разрешимости. Последние получены в терминах асимптотики спектра.

Основное содержание работы. Пусть $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ -спектр краевой задачи $L = L(M)$ вида

$$\ell y = -y'' + q(x)y + \int_0^x M(x-t)y(t)\,dt = \lambda y, \quad x \in \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big) \cup \Big(\frac{\pi}{2}, \pi\Big), \tag{0.0.4}$$

$$y\Big(\frac{\pi}{2}+0\Big) = \alpha_0 y\Big(\frac{\pi}{2}-0\Big), \quad y'\Big(\frac{\pi}{2}+0\Big) = \alpha_1 y'\Big(\frac{\pi}{2}-0\Big) + \beta y\Big(\frac{\pi}{2}-0\Big), \tag{0.0.5}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0, \tag{0.0.6}$$

где $q(x)$, $M(x)$ - комплекснозначные функции, такие что $q(x) \in L_2(0,\pi)$ и

$$(\pi - x)M(x) \in L_2(0,\pi), \tag{0.0.7}$$

а α_0, α_1, β-комплексные числа, причем выполняется условие регулярности $\alpha_0 + \alpha_1 \neq 0$.

Теорема 0.0.1. Собственные значения λ_k, $k \in \mathbb{N}$, задачи L имеют вид

$$\lambda_k = \Big(k + \frac{\omega_1 - (-1)^k \omega_2}{\pi k} + \frac{\varkappa_k}{k}\Big)^2, \quad \{\varkappa_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in l_2, \tag{0.0.8}$$

где

$$\omega_1 = \frac{\beta}{\alpha_0 + \alpha_1} + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(x)\,dx,$$
$$\omega_2 = \frac{\beta}{\alpha_0 + \alpha_1} + \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2(\alpha_0 + \alpha_1)}\Big(\int_{\pi/2}^\pi q(x)\,dx - \int_0^{\pi/2} q(x)\,dx\Big). \tag{0.0.9}$$

Рассмотрим следующую обратную задачу.

Обратная задача 0.0.2. По заданному спектру $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ краевой задачи L вида (0.0.4)-(0.0.6) найти функцию $M(x)$ в предположении, что потенциал $q(x)$ и параметры разрыва $\alpha_0, \alpha_1, \beta$ известны априори.

Наложим следующее дополнительное ограничение на параметры разрыва

$$\alpha_0 + \alpha_1 \notin (-\infty, 0). \tag{0.0.10}$$

Теорема 0.0.3. (Пусть задана произвольная комплекснозначная функция $q(x) \in L_2(0,\pi)$ и комплексные числа α_0, α_1, β, причем выполнено (0.0.10). Тогда для всякой последовательности комплексных чисел $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ вида (0.0.8), (0.0.9) существует единственная (с точностью до значений на множестве нулевой меры) функция $M(x)$, $(\pi - x)M(x) \in L_2(0,\pi)$, такая что последовательность $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ является спектром соответствующей краевой задачи $L(q, M, \alpha_0, \alpha_1, \beta)$.

Таким образом, асимптотика (0.0.8), (0.0.9) является необходимым и достаточным условием разрешимости обратной задачи.

Характеристическая функция и операторы преобразования. Построим решение $y = U(x,\lambda)$ уравнения (0.0.4), удовлетворяющее начальным условиям

$$U(0,\lambda) = 0, \quad U'(0,\lambda) = 1, \tag{0.0.11}$$

а также условиям разрыва (0.0.5). Для этой цели рассмотрим непрерывно дифференцируемые решения $C(x,\lambda)=C(x,\lambda;q,M)$, $S(x,\lambda)=S(x,\lambda;q,M)$ уравнения (0.0.4), удовлетворяющие начальным условиям

$$C(0,\lambda)=S'(0,\lambda)=1,\quad C'(0,\lambda)=S(0,\lambda)=0. \tag{0.0.12}$$

Здесь и далее для того, чтобы подчеркнуть зависимость той или иной функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ от каких-либо функций $f_1,\ldots,f_m$, иногда будем писать $f(x_1,\ldots,x_n;f_1,\ldots,f_m)$. Непосредственной подстановкой в (0.0.4), (0.0.5) и (0.0.12) легко проверить, что функция $U(x,\lambda)$ имеет вид

$$U(x,\lambda)=\begin{cases} S(x,\lambda), \quad 0\le x<\dfrac{\pi}{2},\\ S(x,\lambda)+(\alpha_0-1)S\Big(\dfrac{\pi}{2},\lambda\Big)C_1\Big(x-\dfrac{\pi}{2},\lambda\Big)+\\ +\Big((\alpha_1-1)S'\Big(\dfrac{\pi}{2},\lambda\Big)+\beta S\Big(\dfrac{\pi}{2},\lambda\Big)\Big)S_1\Big(x-\dfrac{\pi}{2},\lambda\Big), \quad \dfrac{\pi}{2}<x\le\pi, \end{cases} \tag{0.0.13}$$

где

$$C_1(x,\lambda)=C(x,\lambda;q_1,M),\quad S_1(x,\lambda)=S(x,\lambda;q_1,M),$$
$$q_1(x)=q\Big(x+\frac{\pi}{2}\Big),\quad 0<x<\frac{\pi}{2}. \tag{0.0.14}$$

Нетрудно видеть, что в силу единственности решения задачи Коши (0.0.4), (0.0.5), (0.0.6) собственные значения краевой задачи L совпадает с нулями целой функции

$$\Delta(\lambda):=U(\pi,\lambda) \tag{0.0.15}$$

с учетом кратности, которая называется *характеристической функцией* задачи L.

Операторы преобразования.

Лемма 0.0.4. Интегральные уравнения

$$\left.\begin{aligned}
&F(x,t,\tau)=F_0(x,t,\tau)+\frac{1}{2}\Big(\int_t^x q(s)\,ds\int_\tau^t F(s,\xi,\tau)\,d\xi+\int_{\frac{t+\tau}{2}}^t q(s)\,ds\\
&\int_\tau^{2s-t}F(s,\xi,\tau)\,d\xi-\int_{\frac{\tau-t}{2}+x}^x q(s)\,ds\int_\tau^{2(s-x)+t}F(s,\xi,\tau)\,d\xi+\int_0^{t-\tau}M(s)\,ds\\
&\int_t^x d\xi\int_\tau^{t-s}F(\xi-s,\eta,\tau)\,d\eta+\\
&+\int_0^{t-\tau}M(s)\,ds\int_{\frac{t+\tau+s}{2}}^t d\xi\int_\tau^{2\xi-t-s}F(\xi-s,\eta,\tau)\,d\eta-\\
&-\int_0^{t-\tau}M(s)\,ds\int_{\frac{s+\tau-t}{2}+x}^x d\xi\int_\tau^{2(\xi-x)+t-s}F(\xi-s,\eta,\tau)\,d\eta\Big),\quad 0\le\tau\le t\le x\le\pi,
\end{aligned}\right\}\tag{0.0.16}$$

$$\left.\begin{aligned}
&G(x,t,\tau)=G_0(x,t,\tau)+\frac{1}{2}\Big(\int_0^{x-t}ds\int_{\tau+s}^{t+s}q(\xi)G(\xi,\xi-s,\tau)\,d\xi+\\
&+\int_0^{\frac{t-\tau}{2}}ds\int_{\tau+s}^{t-s}q(\xi)G(\xi,\xi-s,\tau)\,d\xi+\\
&+\int_{x-t}^{x-\frac{t+\tau}{2}}ds\int_{\tau+s}^{2x-t-s}q(\xi)G(\xi,\xi-s,\tau)\,d\xi+\\
&+\int_0^{t-\tau}M(s)\,ds\int_0^{x-t}d\xi\int_\tau^{t-s}G(\xi+\eta,\eta,\tau)\,d\eta+\\
&+\int_0^{t-\tau}M(s)\,ds\int_0^{\frac{t-\tau-s}{2}}d\xi\int_\tau^{t-s-2\xi}G(\xi+\eta,\eta,\tau)\,d\eta+\\
&+\int_0^{t-\tau}M(s)\,ds\int_{x-t}^{x-\frac{t+\tau+s}{2}}d\xi\int_\tau^{2(x-\xi)-t-s}G(\xi+\eta,\eta,\tau)\,d\eta\Big),\quad 0\le\tau\le t\le x\le\pi,
\end{aligned}\right\}\tag{0.0.17}$$

с непрерывными свободными членами $F_0(x,t,\tau)$ и $G_0(x,t,\tau)$ имеют единственные решения $F(x,t,\tau)=F(x,t,\tau;q,M)$ и $G(x,t,\tau)=G(x,t,\tau;q,M)$, соответственно, также являющиеся, в свою очередь, непрерывными функциями.

Лемма 0.0.5. Положим $\rho^2 = \lambda$. Имеют место следующие представления

$$S(x,\lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_0^x P(x,t)\frac{\sin \rho(x-t)}{\rho}\,dt, \tag{0.0.18}$$

$$C(x,\lambda) = \cos \rho x + \int_0^x Q(x,t)\cos \rho(x-t)\,dt, \tag{0.0.19}$$

где функции

$$P(x,t) = P(x,t;q,M) = F(x,t,0;q,M), \quad Q(x,t) = Q(x,t;q,M) = G(x,t,0;q,M) \tag{0.0.20}$$

являются решениями уравнений (0.0.13) и (0.0.14), соответственно, при $\tau = 0$ и

$$F_0(x,t,0) = \frac{1}{2}\Big(\int_{\frac{t}{2}}^{x-\frac{t}{2}} q(s)\,ds + \int_0^t (x-t)M(s)\,ds\Big), \tag{0.0.21}$$

$$G_0(x,t,0) = \frac{1}{2}\Big(\int_0^{x-\frac{t}{2}} q(s)\,ds + \int_0^{\frac{t}{2}} q(s)\,ds + \int_0^t (x-s)M(s)\,ds\Big).$$

При этом функции $P(x,t)$ и $Q(x,t)$ непрерывны в треугольнике $0 \le t \le x \le \pi$. Кроме того, $P(x,\cdot),\, Q(x,\cdot) \in W_2^1[0,x]$ для всех $x \in (0,\pi]$ и $P(\cdot,t),\, Q(\cdot,t) \in W_2^1[t,\pi]$ для всех $t \in [0,\pi)$, а также

$$P(x,0) = Q(x,0) = \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt, \quad P(x,x) = 0, \quad 0 \le x \le \pi. \tag{0.0.22}$$

Различные представления характеристической функции.

Лемма 0.0.6. Характеристическая функция краевой задачи L имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}\frac{\sin \rho\pi}{\rho} + \int_0^\pi w(x)\frac{\sin \rho x}{\rho}\,dx, \quad w(x) \in W_2^1[0,\pi], \tag{0.0.23}$$

причем функция $w(x)$ удовлетворяет краевым условиям

$$w(0) = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{4}\Big(\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi q(x)\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} q(x)\,dx\Big), \quad w(\pi) = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{4}\int_0^\pi q(x)\,dx. \tag{0.0.24}$$

При этом имеет место представление

$$w(\pi - x) = \frac{\beta}{2} + w_1(x) + V(x), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{0.0.25}$$

где

$$V(x) = V(x;M) = \frac{1}{2}\begin{cases} (\alpha_0 - 1)\Big(w_2 + w_3 + w_2 * w_3\Big)(x) + \\ \quad +(\alpha_1 - 1)\Big(w_4 + w_5 + w_4 * w_5\Big)(x) + \\ \qquad +\beta\Big(w_2 + w_4 + w_2 * w_4\Big) * 1(x), \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ (\alpha_0 - 1)V_1(x) + (\alpha_1 - 1)V_2(x) + \beta V_3(x), \quad \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi, \end{cases} \tag{0.0.26}$$

$$w_1(x) = w_1(x;M) = P(\pi, x; q, M), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{0.0.27}$$

$$\left.\begin{aligned} w_2(x) = w_2(x;M) = P\Big(\frac{\pi}{2}, x; q, M\Big), \\ w_3(x) = w_3(x;M) = Q\Big(\tfrac{\pi}{2}, x; q_1, M\Big), \\ w_4(x) = w_4(x;M) = P\Big(\frac{\pi}{2}, x; q_1, M\Big), \\ w_5(x) = w_5(x;M) = K\Big(\tfrac{\pi}{2}, x; q, M\Big), \\ w_6(x) = w_6(x;M) = w_4 * 1(x), \end{aligned}\right\} 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \tag{0.0.28}$$

$$K(x, t; q, M) = P(x, t; q, M) + \int_0^t P_x(x, \tau; q, M)\, d\tau, \tag{0.0.29}$$

$$
\left.\begin{aligned}
V_1(x) = V_1(x; M) &= w_3(\pi - x) - w_2(\pi - x) + \int_{x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} w_2(t) w_3(x - t)\, dt - \\
&- \int_{\pi - x}^{\frac{\pi}{2}} w_2(t) w_3(x - \pi + t)\, dt + \int_0^{x-\frac{\pi}{2}} w_2(t) w_3(\pi - x + t)\, dt, \\
V_2(x) = V_2(x; M) &= w_5(\pi - x) - w_4(\pi - x) + \int_{x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} w_4(t) w_5(x - t)\, dt - \\
&- \int_{\pi - x}^{\frac{\pi}{2}} w_4(t) w_5(x - \pi + t)\, dt + \int_0^{x-\frac{\pi}{2}} w_4(t) w_5(\pi - x + t)\, dt, \\
V_3(x) = V_3(x; M) &= w_6(\pi - x) + w_2 * 1(\pi - x) + \int_{x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} w_2(t) w_6(x - t)\, dt - \\
&- \int_{\pi - x}^{\frac{\pi}{2}} w_2(t) w_6(x - \pi + t)\, dt + \int_0^{x-\frac{\pi}{2}} w_2(t) w_6(\pi - x + t)\, dt.
\end{aligned}\right\} \tag{0.0.30}
$$

Лемма 0.0.7. Всякая функция $\Delta(\lambda)$ вида (0.0.23), (0.0.24) имеет бесконечное множество нулей λ_k, $k \in \mathbb{N}$, вида (0.0.8), (0.0.9).

Лемма 0.0.8. Всякая функция $\Delta(\lambda)$ вида (0.0.23) определяется своими нулями однозначно. При этом

$$
\Delta(\lambda) = \pi \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda}{k^2}. \tag{0.0.31}
$$

Дополнительные свойства ядер операторов преобразования.

Лемма 0.0.9. Существуют $\delta_q \in (0, \pi]$ и $C_q > 0$, зависящие только от функции $q(x)$, такие что для любого $\delta \in (0, \delta_q]$ и для всех M, $\tilde{M} \in B_\delta$ при $(x,t) \in D_\delta$ справедливы оценки

$$
|P(x,t)| \le C_q, \quad |\hat{P}(x,t)| \le C_q \sqrt{\delta} \|\hat{M}\|_\delta, \quad |Q(x,t)| \le C_q, \quad |\hat{Q}(x,t)| \le C_q \sqrt{\delta} \|\hat{M}\|_\delta, \tag{0.0.32}
$$

где $\hat{P}(x,t) = P(x,t;q,M) - P(x,t;q,\tilde{M})$, $\hat{Q}(x,t) = Q(x,t;q,M) - Q(x,t;q,\tilde{M})$, $\hat{M} = M - \tilde{M}$.

В дальнейшем для каждого фиксированного $\delta \in (0,\pi]$ будем использовать обозначения

$$M_1(x) = \begin{cases} M(x), & x \in (0,\delta), \\ 0, & x \in (\delta,\sigma), \end{cases} \qquad M_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0,\delta), \\ M(x), & x \in (\delta,\sigma), \end{cases} \tag{0.0.33}$$

где $\sigma = \min\{2\delta, \pi\}$.

Лемма 0.0.10. Для всякого $\delta \in (0,\pi/2]$ имеет место представление

$$P(x,t;q,M) = P(x,t;q,M_1) + \int_0^t F(x,t,\tau;q,M_1) M_2(\tau)\, d\tau, \quad (x,t) \in D_{2\delta}, \tag{0.0.34}$$

где функция $F(x,t,\tau;q,M_1)$ является решением уравнения (0.0.16) при $M_1(x)$ вместо $M(x)$, $(x,t,\tau) \in \mathcal{D}_{2\delta}$ и

$$\left.\begin{aligned} F_0(x,t,\tau) = \frac{1}{2}\Big(x - t + \int_t^x ds \int_0^{t-\tau} P(s-\tau,\xi;q,M_1)\, d\xi + \int_{\frac{t+\tau}{2}}^t ds \\ \int_0^{2s-t-\tau} P(s-\tau,\xi;q,M_1)\, d\xi - \int_{\frac{\tau-t}{2}+x}^x ds \int_0^{2(s-x)+t-\tau} P(s-\tau,\xi;q,M_1)\, d\xi\Big). \end{aligned}\right\} \tag{0.0.35}$$

Лемма 0.0.11. Для всякого $\delta \in (0,\pi/2]$ имеет место представление

$$Q(x,t;q,M) = Q(x,t;q,M_1) + \int_0^t G(x,t,\tau;q,M_1) M_2(\tau)\, d\tau, \quad (x,t) \in D_{2\delta},$$

где функция $G(x,t,\tau;q,M_1)$ является решением уравнения (0.0.17) при $M_1(x)$ вместо $M(x)$, $(x,t,\tau) \in \mathcal{D}_{2\delta}$ и

$$G_0(x,t,\tau) = \frac{1}{2}\Big(x - \tau + \int_0^{x-t} ds \int_0^{t-\tau} Q(\xi+s,\xi;q,M_1)\, d\xi +$$

$$+ \int_0^{\frac{t-\tau}{2}} ds \int_0^{t-\tau-2s} Q(\xi+s,\xi;q,M_1)\, d\xi + \int_{x-t}^{x-\frac{t+\tau}{2}} ds \int_0^{2(x-s)-t-\tau} Q(\xi+s,\xi;q,M_1)\, d\xi\Big).$$

Основное нелинейное интегральное уравнение. Дифференцируя соотношение (0.0.25) по x, получаем

$$-w'(\pi - x) = w_1'(x; M) + V'(x; M), \quad 0 < x < \pi. \tag{0.0.36}$$

Теорема 1. Пусть выполнено условие (0.0.10). Тогда для любой функции $w(x) \in W_2^1[0, \pi]$, удовлетворяющей краевым условиям (0.0.24), уравнение (0.0.36) имеет единственное решение $M(x)$, удовлетворяющее условию (0.0.7).

Для каждого $k = \overline{1, 5}$ разложим функцию $w_k(x)$ на сумму трех функций:

$$w_k(x) = w_{k,1}(x) + w_{k,2}(x) + w_{k,3}(x),$$

Кроме того, положим

$$w_{k,4}(x) := w_{k,2}(x) + w_{k,3}(x), \quad k = \overline{2, 5}. \tag{0.0.37}$$

С учетом введенных обозначений, а также формул (0.0.26)-(0.0.29) уравнение (0.0.36) на первой половине интервала $(0, \pi)$ примет вид

$$g(x) = A(x)M(x) + \mathcal{F}M(x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \tag{0.0.38}$$

где $g(x) \in L_2(0, \pi/2)$ - свободный член.

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{F}M(x) = \frac{1 - \alpha_0 - 2\alpha_1}{4} \int_0^x M(t)\,dt + w_{1,3}'(x) + \\ + \frac{\alpha_0 - 1}{2}\Big(w_{2,3}' + w_{3,3}' + w_2(0)w_{3,4} + w_{2,1}' * w_{3,4} + w_{2,4}' * w_3\Big)(x) + \\ + \frac{\alpha_1 - 1}{2}\Big(w_{4,3}' + w_{5,3}' + w_4(0)w_{5,4} + w_{4,1}' * w_{5,4} + w_{4,4}' * w_5\Big)(x) + \\ + \frac{\beta}{2}\Big(w_{2,4} + w_{4,4} + w_{2,1} * w_{4,4} + w_{2,4} * w_4\Big)(x). \end{aligned}\right\} \tag{0.0.39}$$

Лемма 0.0.12. Коэффициент $A(x)$ в уравнении (0.0.38) удовлетворяет условию

$$A(x) \neq 0, \quad x \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big], \tag{0.0.40}$$

тогда и только тогда, когда выполняется условие (0.0.10).

Лемма 0.0.13. Пусть $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in \mathcal{E}_b$, а $g_1(x)$ и $g_2(x)$ – ограниченные на интервале $(0, b)$ функции. Тогда $\mathcal{D} \in \mathcal{E}_b$, где оператор $\mathcal{D}$ определен любым из следующих способов:

$a)$ $\mathcal{D}f(x) = g_1(x)\mathcal{D}_1 f(x) + g_2(x)\mathcal{D}_2 f(x);$

$b)$ $\mathcal{D}f(x) = \mathcal{D}_1 f * \mathcal{D}_2 f(x);$

$c)$ $\mathcal{D}f(x) = \mathcal{D}_1 f * (g_1 f)(x);$

$d)$ $\mathcal{D}f(x) = \int_0^x K(x,t) f(t)\, dt;$

$e)$ $\mathcal{D}f(x) = \int_0^x K(x,t)\mathcal{D}_1 f(t)\, dt;$

$f)$ $\mathcal{D}f(x) = f_1(x).$

Здесь функция $K(x,t)$ суммируема с квадратом в треугольнике $0 < t < x < b$, а функция $f_1(x) \in L_2(0, b)$ не зависит от $f(x)$.

Теорема 2. Пусть $f(x) \in L_2(0, b)$ и $\mathcal{D} \in \mathcal{E}_b$. Тогда уравнение

$$f(x) = y(x) + \mathcal{D}y(x), \quad 0 < x < b, \tag{0.0.41}$$

имеет единственное решение $y(x) \in L_2(0, b)$.

Решение основного уравнения на первой половине интервала.

Лемма 0.0.14. Оператор $\mathcal{F}$, определенный формулой (0.0.39), принадлежит классу $\mathcal{E}_{\pi/2}$.

Решение основного уравнения на второй половине интервала. Согласно (0.0.27) и (0.0.34) имеем

$$w_1(x; M) = w_1(x; M_1) + \int_0^x F(\pi, x, t; q, M_1) M_2(t)\, dt, \quad 0 \le x \le \pi, \tag{0.0.42}$$

где функции $M_1(x)$ и $M_2(x)$ определены по формулам (0.0.33) при $\delta = \pi/2$, $\sigma = \pi$. В силу (0.0.16) и (0.0.35) справедливо тождество

$$F(\pi, x, x; q, M_1) = \frac{\pi - x}{2}. \tag{0.0.43}$$

Дифференцируя представление (0.0.42) по x и учитывая (0.0.43), получаем

$$w_1'(x; M) = w_1'(x; M_1) + \frac{\pi - x}{2} M_2(x) + \int_0^x \Phi(x, t; q, M_1) M_2(t)\, dt, \quad 0 < x < \pi, \tag{0.0.44}$$

где функция

$$\Phi(x, t; q, M) = \frac{\partial}{\partial x} F(\pi, x, t; q, M) \tag{0.0.45}$$

суммируема с квадратом в треугольнике $0 < t < x < \pi$. Используя (0.0.44), можно записать основное уравнение (0.0.36) следующим образом:

$$g_1(x) = (\pi - x) M_2(x) + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^x \Phi(x, t; q, M_1) M_2(t)\, dt, \quad 0 < x < \pi, \tag{0.0.46}$$

где функция $g_1(x) \in L_2(0, \pi)$ имеет вид

$$g_1(x) = -2w'(\pi - x) - 2w_1'(x; M_1) - 2V'(x; M), \quad 0 < x < \pi. \tag{0.0.47}$$

Решение обратной задачи.

Лемма 0.0.15. Пусть заданы произвольные комплексные числа λ_k, $k \geq 1$, вида (0.0.8), (0.0.9). Тогда функция $\Delta(\lambda)$, определенная по формуле (0.0.31), имеет вид (0.0.23), (0.0.24).

Алгоритм 6.1. Пусть заданы спектр $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ некоторой краевой задачи $L(q, M, \alpha_0, \alpha_1, \beta)$, функция $q(x)$ и числа α_0, α_1, β.

1) Строим функцию $\Delta(\lambda)$ по формуле (0.0.31);

2) В соответствии с (0.0.23) вычисляем функцию $w(x)$ по формуле

$$w(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} k \Delta(k^2) \sin kx;$$

3) Находим функцию $M(x)$ из основного уравнения (0.0.36).

Заключение. В работе рассмотрена краевая задача вида (0.0.1)–(0.0.3). Был разработан метод решения соответствующей обратной спектральной задачи и построен алгоритм восстановления оператора по рассматриваемым спектральным данным. Таким образом, было построено конструктивное решение обратной задачи спектрального анализа для интегро-дифференциальных операторов второго порядка с уловиями разрыва.