МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

«Восстановление периодических решений некорректно поставленных задач методом Тихонова»

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 217 группы
направления 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»

механико-математического факультета

Родионова Антона Станиславовича

Научный руководитель
профессор, д.ф.-.м.н., профессор ________________ Г.В. Хромова

Зав. кафедрой
д.ф.-.м.н., профессор ________________ В.А. Юрко

Саратов 2021

Введение. В качестве основного объекта рассматривается операторное уравнение

$$Au = f,$$

где - линейный оператор, действующий из гильбертова пространства Z в гильбертово пространство U. Требуется найти решение операторного уравнения u, соответствующее заданной неоднородности f. Это уравнение является типичной математической моделью для многих физических(обратных) задач, с тем предположением, что физические характеристики z не могут быть измерены, а в результате эксперимента могут быть получены только данные f, связанные с u с помощью оператора A.

Французским математиком Ж. Адамаром были сформулированы следующие условия корректности постановки математических задач, которые будем рассматривать на примере операторного уравнения. Задача решения операторного уравнения называется корректно поставленной, если выполнены следующие три условия: 1) решение существует для любого элемента f из пространства U; 2) решение единственно; 3) если $f_n \to$ f, $Au_n \to f_n$, $Au = f$, то $u_n \to u$.

Выполнение условия 2) обеспечивается тогда и только тогда, когда оператор A является взаимнооднозначным. Условия 1) и 2) означают, что существует обратный оператор A^{-1}, причём область его определения D(A^{-1}), или множество значений оператора A, совпадает с пространством U. Условие 3) означает, что оператор A^{-1} является непрерывным, то есть "малым"изменениям правой части f соответствуют "малые"изменения решения u. Более того, Ж. Адамар считал, что должны рассматриваться при решении практических задач только задачи, поставленные корректно. Но хорошо известны примеры некорректно поставленных задач, к изучению и численному решению которых прибегают при рассмотрении многочисленных прикладных задач. Необходимо заметить, что устойчивость и неустойчивость решения связаны с тем, как определяется пространство решений Z. Выбор пространства решений, включая и выбор нормы в нём, обычно определяется требованиями прикладной задачи. Задачи могут быть некорректно поставленными при одном выборе нормы и корректно поставленными при другом.

Многочисленные обратные (в том числе и некорректные) задачи можно найти в различных областях физики. Так, астрофизик не может активно воздействовать на процессы, происходящие на далеких звездах и галактиках, ему приходится делать заключения о физических характеристиках весьма удалённых объектов по их косвенным проявлениям, доступным измерениям на Земле или вблизи Земли, например, на космических станциях. Примеры некорректных задач можно найти в медицине, как самый яркий пример, вычислительная, или компьютерная, томография. Хорошо известны приложения некорректных задач в геофизике. Куда легче и дешевле судить о том, что происходит под поверхностью Земли, решая обратные задачи, чем заниматься бурением глубоких скважин и проводить оценки оттуда. Также хорошо известны приложения некорректно поставленных задач в радиоастрономии, спектроскопии, ядерной физике.

Обратные задачи представляют собой типичный пример некорректно поставленных задач, а их решение и практическое использование сопряжены с определёнными трудностями. В первую очередь это трудности разработки методов и алгоритмов, дающих возможность получать достаточно точные результаты, так как произвольно малые отклонения входных данных могут вызвать большие изменения результатов решения.

В основе физической природы неустойчивости обратной задачи лежит свойство процесса теплопроводности, заключающееся в сильном сглаживании и временном запаздывании характерных особенностей граничных функций по мере удаления рассматриваемой точки вглубь тела от теплообменной поверхности. Если характерные изменения в граничных условиях проявляют себя слабее и сглаживаются при удалении от поверхности тела, то, наоборот, наличие даже небольшиъ колебаний в температуре глубоко расположенных точек должно соответствовать значительным временным изменениям граничного условия. Такая физика распространения тепла и приводит к известной особенности обратных задач - значительно большим ошибкам решения по сравнению с ошибками входных данных.

Цель данной работы - найти интегральный вид регуляризирующих операторов в методе А.Н. Тихонова в случае периодических решений, провести математический эксперимент по выбору параметра регуляризации $\alpha(\delta)$, исходя из интегрального вида, и сравнить результаты с выбором параметра по методу Тихонова.

В данной работе главное внимание уделено задаче восстановления функции, заданной на $[-\pi, \pi]$ её среднеквадратичными приближениями.

Основное содержание работы. В основной части работы приведены история метода регуляризации А.Н. Тихонова, рассмотрены общая постановка и общий подход к задаче решения уравнения I рода, общая постановка задачи восстановления функций, рассмотрен метод регуляризации А.Н. Тихонова, получен интегральный вид регуляризирующих операторов в методе А.Н. Тихонова в случае периодических решений, на модельной задаче проведён математический эксперимент по выбору параметра регуляризации, исходя из интегрального вида, и проведено сравнение результатов с выбором параметра по методу Тихонова.

Метод регуляризации А. Н. Тихонова. В первой главе приведена история метода регуляризации А. Н. Тихонова. Рассмотрены общая постановка и общий подход к задаче решения уравнения I рода, постановка задачи восстановления функции. Рассмотрен метод регуляризации А.Н. Тихонова.

История метода регуляризации А.Н. Тихонова. Советский математик Андрей Николаевич Тихонов начал заниматься обратными задачами в 30-е и 40-е годы. Первый раз он представил свою работу по регуляризации некорректно поставленных задач на научном семинаре института. Свои основные результаты по устойчивым методам решения некорректно поставленных задач и методу регуляризации Андрей Николаевич получил в середине 60-х годов. Заслуга Андрея Николаевича состоит в том, что он по-новому посмотрел на эти задачи. Начал с того, что по-иному определил само понятие решения некорректной задачи. До него всегда пытались точно решать задачу с неточно заданной правой частью. Тихонов считал необходимым учитывать неточность задания данных. Если исходные данные известны приближённо, то оператор, описывающий процесс или явление, может быть заменён приближённо таким образом, чтобы преобразованная задача стала корректной. При этом отличие нового оператора от исходного должно быть согласовано с погрешностью входных данных. Он определил решение как результат минимизации некоторого функционала специального вида, в котором дополнительной частью является слагаемое, отражающее физические требования к решению. Им были доказаны соответствующие теоремы сходимости и получен устойчивый метод решения некорректных задач, названный методом регуляризации. Под руководством Андрея Николаевича разработанный им метод, получивший название "метода регуляризации Тихонова", был применён как для решения большого числа фундаментальных общематематических, так и актуальных прикладных задач. Первая численная реализация метода регуляризации была осуществлена В. Б. Гласко при решении обратной задачи теплопроводности. Методом регуляризации были решены задача об отыскании решения интегрального и операторного уравнения первого рода, обратные задачи теории потенциала и теплопроводности, задача об аналитическом продолжении функции, большое число фундаментальных задач геофизики, томографии, астрофизики, экономики, оптимального управления и так далее. Также метод регуляризации был использован Андреем Николаевичем для решения вырожденных и плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений, линейных и нелинейных интегральных уравнений первого рода, устойчивого суммирования рядов Фурье и других задач. Хромовой Галиной Владимировной впервые было предложено и обосновано решение задачи восстановления непрерывных функций, заданных с погрешностью, с помощью метода регуляризации А.Н. Тихонова. Галиной Владимировной получен ряд важных перспективных результатов по теории уравнений 1-го рода с привлечением методов теории приближения функций: разработан подход к получению оценок погрешности приближенных решений уравнений 1-го рода методами регуляризации, получены необходимые и достаточные условия для расширения области сходимости метода Тихонова А.Н., предложен новый подход к построению методов регуляризации на базе методов теории приближения функций.

Общая постановка и общий подход к задаче решения уравнения I рода. Будем рассматривать задачу приближённого решения уравнения первого рода, которая относится к области некорректно поставленных задач.

Пусть X_1 и X_2 - банаховы пространства. Будем рассматривать уравнение

$$Au = f, \tag{1}$$

где A - линейный ограниченный оператор, действующий из X_1 в X_2, и такой, что A^{-1} существует, но неограничен. $\overline{u}$ и $\overline{f}$ - точное решение и точная правая часть уравнения (1) соответственно. Полагаем, что правая часть $\overline{f}$ задана её δ-приближениями f_δ в пространстве X_2: $||f_\delta - \overline{f}||_{X_2} \leqslant \delta$. Задача приближённого решения уравнения (1) состоит в построении по f_δ последовательности элементов u_δ, такой, что $||u_\delta - \overline{u}||_{X_1} \to 0$ при $\delta \to 0$.

Методы приближённого решения уравнений I рода называются методами регуляризации и состоят из двух принципиальных шагов: 1) построения семейства линейных операторов T_α, зависящих от параметра α, действующих из пространства X_2 в пространство X_1 и обладающих следующими свойствами: а) каждый из операторов T_α определён на всём пространстве T_2; б) $||T_\alpha||_{X_2 \to X_1} < \infty$ при каждом значении α; в) для любого u$\in X_1$

$$||T_\alpha Au - u||_{X_1} \to 0, \alpha \to 0; \tag{2}$$

2) согласования параметра α с погрешностью δ $\alpha = \alpha(\delta)$ такого, что

$$\delta||T_{\alpha(\delta)}||_{X_2 \to X_1} \to 0, \delta \to 0. \tag{3}$$

Семейство линейных операторов T_α (α>0 - параметр), удовлетворяющее условиям а), б), в), называется регуляризирующим семейством для уравнения (1), а параметр α называется параметром регуляризации. Если соотношение (2) выполняется не на всём пространстве X_1, а для u $\in$ M $\subset X_1$, где M - некоторый класс элементов из X_1, то семейство $\{T_\alpha\}$ называется регуляризирующим на классе M; оператор T_α при фиксированном значении параметра α называется регуляризирующим оператором. Существование регуляризирующего семейства является условием, достаточным для разрешимости задачи приближённого решения уравнения (1). Из оценки

$$||T_\alpha f_\delta - \overline{u}||_{X_1} \leqslant \delta ||T_\alpha||_{X_2 \to X_1} + ||T_\alpha A u - \overline{u}||_{X_1} \tag{4}$$

следует, что параметр α можно так согласовать с погрешностью δ, что будет выполняться (3), а отсюда следует стремление к нулю правой части (4) при

$$\alpha = \alpha(\delta), \delta \to 0.$$

Таким образом, метод регуляризации, или метод $T_{\alpha(\delta)}$ - это метод приближённого решения уравнения 1 с помощью регуляризирующего семейства $\{T_\alpha\}$ при согласовании $\alpha = \alpha(\delta)$, обеспечивающем предельное соотношение 3. Условия же 2, 3 являются достаточными для сходимости приближённого решения $T_{\alpha(\delta)} f_\delta$ к точному. Рассмотрим величину

$$\Delta(\delta, T_\alpha, \overline{u}) = \sup\{||T_\alpha f_\delta - \overline{u}||_{X_1} : ||f_\delta - \overline{u}||_{X_2} \leqslant \delta\}. \tag{5}$$

Справедлива теорема

Теорема 1. Условия 2 и 3 являются необходимыми и достаточными для того, чтобы $\Delta(\delta, T_\alpha, \overline{u}) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Одним из наиболее известных методов регуляризации является регуляризация Тихонова. А.Н. Тихонов рассматривал случай, когда

$$X_1 = C^{(r-1)}[a,b], X_2 = L_2[a,b],$$

а решение удовлетворяет дополнительным условиям гладкости:

$$\overline{u} \in W_2^r[a,b], r \geqslant 1$$

- целое, где $W_2^r[a,b]$ - одномерное пространство Соболева с нормой:

$$||u||_{W_2^r} = (\int_a^b [\sum_{i=0}^r k_i(x)(u^{(i)}(x))^2] dx)^{1/2},$$

$k_i(x) > 0$ - непрерывны. В этом методе в качестве операторов T_α выступают операторы

$$T_\alpha f = \arg\inf M^\alpha[u, f]; \tag{6}$$

$$M^\alpha[u, f] = ||Au - f||^2_{L_2} + \alpha||u||^2_{W_2^r}. \tag{7}$$

Тихоновым было доказано, что для любой функции $f(x) \in L_2[a, b]$ существует единственная непрерывная, дифференцируемая функция $u^\alpha(x)$, реализующая минимум сглаживающего функционала $M^\alpha[u, \overline{f}]$. Им же было показано, что если параметр регуляризации α согласовать с погрешностью δ так, что $\alpha(\delta) = C\delta^2$, где C - произвольная константа, то $||u^\alpha_\delta - \overline{u}||_{C[a,b]} \underset{\delta\to 0}{\to} 0$. Хромовой Галиной Владимировной было показано, что для нескольких типов уравнения (1) дополнительное условие гладкости на точное решение может быть снято и сходимость погрешности метода Тихонова

$$||T_\alpha Au - u||_{C[a,b]} \to 0$$

к нулю при $\alpha \to 0$ имеет место для любой непрерывной функции $u(x)$. Если точное решение удовлетворяет краевым условиям, то эта сходимость выполняется для любой $u(x)$, удовлетворяющей этим краевым условиям. При отсутствии краевых условий сходимость будет выполняться для любой непрерывной $u(x)$.

Постановка задачи восстановления функций. Пусть X_1 и X_2 - два банаховых пространства, таких, что $X_1 \subset X_2$ и выполняется оценка:

$$|| \cdot ||_{X_2} \leqslant C|| \cdot ||_{X_1}. \tag{8}$$

Пусть элемент $u \in X_1$ задан с его δ-приближениями f_δ в метрике пространства X_2:

$$||f_\delta - u|| \leqslant \delta.$$

Требуется по f_δ и δ построить последовательность элементов $\widetilde{u_\delta}$ так, чтобы

$$||\widetilde{u_\delta} - u||_{X_1} \to 0$$

при $\delta \to 0$.

Поставленная задача называется задачей восстановления из X_2 в X_1. Такая задача возникает, в частности, при обработке исходных данных физических задач. Если, например, $X_1 = \mathrm{C[a, b]}$, $X_2 = L_2\mathrm{[a, b]}$, то мы приходим к некорректно поставленной задаче восстановления непрерывной функции по её среднеквадратическим δ-приближениям. Поставленная в общем виде задача рассматривается как задача решения операторного уравнения (1), где A - оператор вложения из X_1 в X_2, а правая часть её задана δ-приближениями f_δ в X_2. Решение уравнения (1) существует и единственно. Также заметим, что из оценки (8) следует справедливость утверждения: оператор A^{-1}, обратный к оператору вложения из X_1 в X_2, неограничен тогда и только тогда, когда нормы в пространствах X_1 и X_2 неэквивалентны. Поскольку в этом случае уравнение (1) является уравнением I-го рода, то отсюда следует, что для приближённого решения задачи восстановления из X_1 в X_2 можно применить любой из методов регуляризации, подходящий к данной ситуации. Отсюда следует также, что задача восстановления может служить модельной задачей при исследовании различных вопросов решения уравнений I-го рода.

Во второй главе рассматривается применение метода А.Н. Тихонова к задаче восстановления непрерывной 2π-периодичной функции. Получен интегральный вид регуляризирующих операторов в методе А.Н. Тихонова в случае периодических решений. Получено условие для подбора параметра $\alpha(\delta)$, исходя из интегрального вида.

Применение метода регуляризации А.Н. Тихонова. Рассмотрим задачу восстановления из $L_2[-\pi, \pi]$ в $C[-\pi, \pi]$.

Пусть элемент $\overline{u}(x) \in C[-\pi, \pi]$ задан с его δ-приближениями $f_\delta(x)$ в метрике пространства $L_2[-\pi, \pi]$. $\overline{u}$ - 2π-периодичная функция, и $\overline{u}(-\pi) = \overline{u}(\pi)$. По f_δ и δ будем строить последовательность элементов $\tilde{u}_\delta$ так, чтобы

$$||\tilde{u}_\delta - \overline{u}||_{C[-\pi,\pi]} \underset{\delta\to 0}{\to} 0.$$

Считаем, что исходные данные $f_\delta(x)$ - это δ-приближения правой части (1), образ $\overline{u}$ в $L_2[-\pi,\pi]$, поэтому выполняется

$$||f_\delta(x)-\overline{u}||\leqslant\delta. \tag{9}$$

Для нахождения приближённого решения применим метод регуляризации Тихонова. Построим семейство операторов R_α, удовлетворяющее применяемому методу.

Для решения задачи восстановления непрерывной функции в общем случае Хромовой Галиной Владимировной было получено следующее условие для подбора параметра регуляризации α:

Теорема 2. Для того, чтобы погрешность метода А. Н. Тихонова в точке $\Delta(\delta,R_{\alpha(\delta)},\overline{u})\to 0$ при $\delta\to 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\delta(\alpha(\delta))^{-1/4}\underset{\delta\to 0}{\to}0.$$

В методе регуляризации А.Н. Тихонова рассматривается функционал

$$M^\alpha_\delta[u,f_\delta]=||u-f_\delta||^2_{L_2}+\alpha||u||^2_{W^1_2}. \tag{10}$$

Теорема 3. Функция, минимизирующая функционал (10), удовлетворяет краевой задаче

$$-y''+(1+\frac{1}{\alpha})y=\frac{1}{\alpha}f_\delta(x), \tag{11}$$

$$y(-\pi)=y(\pi),y'(-\pi)=y'(\pi). \tag{12}$$

$$u^\alpha_\delta(x)=\arg\inf_u M^\alpha_\delta[u,f_\delta]$$

Решение (11),(12) можно представить через функцию Грина в следующем виде

$$y(x)=\tilde{u}_\delta(x)=u^\alpha_\delta(x)=\frac{1}{\alpha}\int_{-\pi}^{\pi}G(x,t,-\frac{1}{\alpha})f_\delta(t)dt. \tag{13}$$

Таким образом, получаем, что R_α имеет вид

$$R_\alpha f_\delta = \frac{1}{\alpha}\int\limits_{-\pi}^{\pi} G(x,t,-\frac{1}{\alpha}) f_\delta(t)dt. \tag{14}$$

Функция Грина задачи (11)-(12). Функция Грина задачи (11)-(12) имеет вид

$$G(x,t,-\frac{1}{\alpha}) = \begin{cases} \frac{\operatorname{ch}\alpha_1(\pi-t+x)}{2\alpha_1 \operatorname{sh}\alpha_1\pi}, -\pi \leqslant x < t, \\ \frac{\operatorname{ch}\alpha_1(\pi+t-x)}{2\alpha_1 \operatorname{sh}\alpha_1\pi}, t < x \leqslant \pi, \end{cases} \tag{15}$$

где $\alpha_1 = \sqrt{1+\frac{1}{\alpha}}$.

Условие для выбора параметра регуляризации $\alpha(\delta)$, исходя из интегрального вида регуляризирующих операторов. По методу А.Н. Тихонова параметр α необходимо согласовать с погрешностью δ так, чтобы выполнялись (2), (3).

Теорема 4. Если $\alpha(\delta) = C\delta^2, C = const$, то

$$||u_\delta^{\alpha(\delta)} - \overline{u}||_{C[-\pi,\pi]} \to 0$$

при $\delta \to 0$.

Теорема 5. Для того, чтобы $\Delta(\delta, T_{\alpha(\delta)}, \overline{u}) \to 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\delta(\alpha(\delta))^{-1/4} \underset{\delta\to 0}{\to} 0. \tag{16}$$

А норма регуляризирующего оператора в случае периодических решений равна

$$||R_\alpha||_{L_2[-\pi;\pi]\to C[-\pi;\pi]} = \frac{1}{2}\alpha^{-1/4} + O(\alpha^{3/4}). \tag{17}$$

Математический эксперимент на модельной задаче. На основании изложенного в предыдущей главе можно сделать вывод, что если на отрезке $[-\pi,\pi]$ получены исходные данные $f_\delta(x), x \in [-\pi,\pi]$, то мы можем восстановить значения функции, воспользовавшись (13). Имеем

$$u_\delta^{\alpha(\delta)} = \frac{1}{\alpha(\delta)}\int_{-\pi}^{\pi} G(x,t,-\frac{1}{\alpha}) f_\delta(t)dt, \tag{18}$$

где функция Грина $G(x,t,-\frac{1}{\alpha})$ имеет вид (15).

Необходимо по заданным значениям функции $f_\delta(x)$ в точках отрезка $[-\pi;\pi]$, заданной погрешности δ и заданному количеству точек на отрезке $[-\pi;\pi]$ восстановить значения функции $f(x) \approx \tilde{f}(x)$ по формуле (18). Подбирать параметр $\alpha(\delta)$ будем по методу Тихонова и из условия (16). Полученные результаты отобразим на графике вместе с графиками точной $f(x)$ и $f_\delta(x)$.

Пусть задана $f(x)$, такая, что $f(-\pi) = f(\pi)$. Разобьём отрезок $[-\pi,\pi]$ на N точек и в каждой из этих точек вычислим значение $f(x)$. $f_{\delta,j}$ - приближенно заданное значение функции f в точке x_j. Попробуем восстановить значения функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$, применив к f_δ оператор, имеющий вид (18). $\tilde{f}_i$ - восстановленное значение функции f в точке x_i. Параметр регуляризации $\alpha(\delta)$ будем вычислять по формулам

$$\alpha_1(\delta) = C_1\delta^2, \alpha_2(\delta) = C_2\sqrt{\delta}, \alpha_3(\delta) = C_3\sqrt[3]{\delta}, \alpha_4(\delta) = C_4\sqrt[4]{\delta}, \qquad (19)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 - положительные действительные числа. Выражение для $\alpha_1(\delta)$ соответствует выбору параметра регуляризации по Тихонову, а выражения для $\alpha_2(\delta)$, $\alpha_3(\delta)$, $\alpha_4(\delta)$ составлены из условия (16). С учетом этого расчетная составная формула по методу трапеций приобретает вид

$$\begin{gathered}\tilde{f}_{i,k} = \frac{1}{\alpha_k(\delta)}\int\limits_{-\pi}^{\pi} G\left(x_i, t, -\frac{1}{\alpha_k(\delta)}\right) f_\delta(t)dt \approx \\ \approx \sum_{j=0}^{N-2}\frac{G\left(x_i, t_j, -\frac{1}{\alpha_k(\delta)}\right) f_{\delta,j} + G\left(x_i, t_{j+1}, -\frac{1}{\alpha_k(\delta)}\right) f_{\delta,j+1}}{2\alpha_k(\delta)}(t_{j+1} - t_j).\end{gathered} \qquad (20)$$

Погрешность измерений δ, числа C_1, C_2, C_3, C_4, N, выражение для $f(x)$ и количество всплесков задаются в пользовательском графическом интерфейсе программы, и в нём же строятся графики $f(x)$, $f_\delta(x)$ и графики решений поставленной задачи, полученные использованием указанных выше формул для $\alpha(\delta)$. Приложение, реализующее представленный выше численный алгоритм, разработано на языке Java. Графический интерфейс с полями для ввода, выпадающими списками, кнопками и окном для вывода графиков разработан с использованием библиотеки JavaFX.

Красным цветом на графиках показаны значения $f(x)$, желтым - $f_\delta(x)$, зелёным - $\tilde{f}_1(x)$, голубым - $\tilde{f}_2(x)$, синим - $\tilde{f}_3(x)$, фиолетовым - $\tilde{f}_4(x)$.

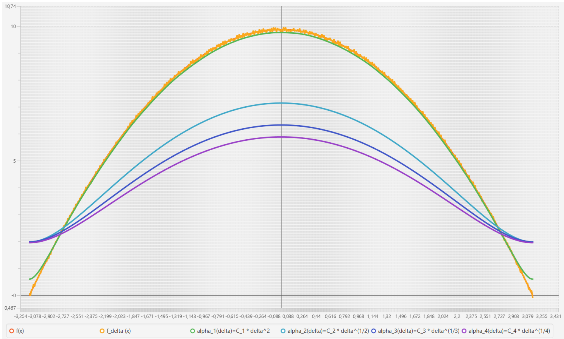

Рисунок 1: $N = 500$, $\delta = 0.1$, $C_1 = 1.0$, $C_2 = 1.0$, $C_3 = 1.0$, $C_4 = 1.0$, $f(x) = \pi^2 - x^2$

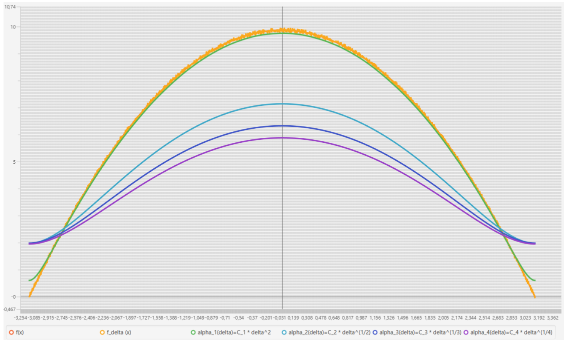

Рисунок 2: $N = 1000$, $\delta = 0.1$, $C_1 = 1.0$, $C_2 = 1.0$, $C_3 = 1.0$, $C_4 = 1.0$, $f(x) = \pi^2 - x^2$

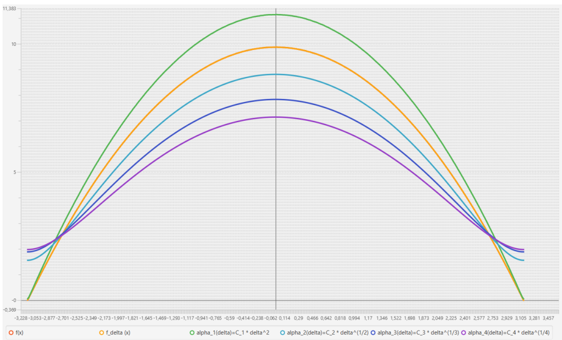

Рисунок 3: $N = 500$, $\delta = 0.01$, $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 =$1.0, $f(x) = \pi^2 - x^2$

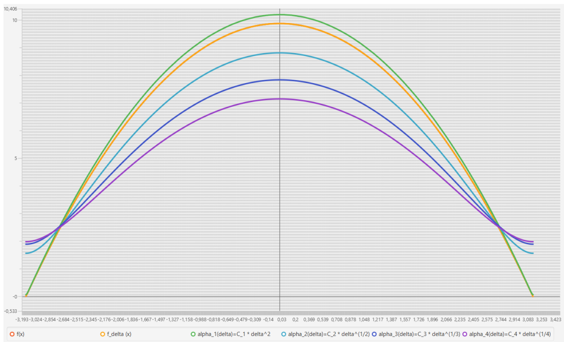

Рисунок 4: $N = 1000$, $\delta = 0.01$, $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 =$1.0, $f(x) = \pi^2 - x^2$

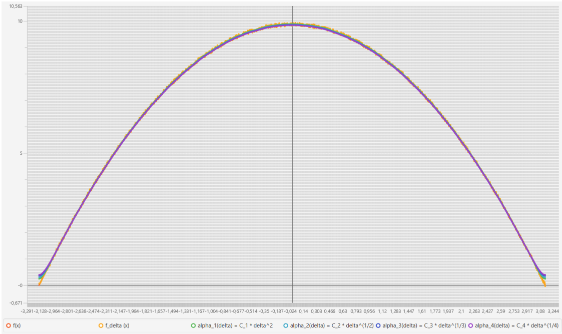

Рисунок 5: $N = 1000$,
$\delta = 0.1$,
$C_1 = 0.14$, $C_2 = 0.007$,
$C_3 = 0.007$, $C_4 = 0.007$,
$f(x) = \pi^2 - x^2$

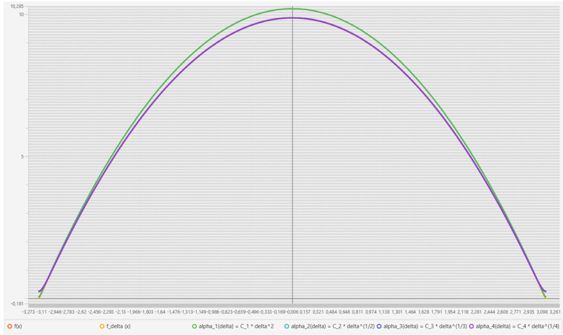

Рисунок 6: $N = 1000$,
$\delta = 0.01$,
$C_1 = 1.0$, $C_2 = 0.016$,
$C_3 = 0.0072$, $C_4 = 0.0055$,
$f(x) = \pi^2 - x^2$

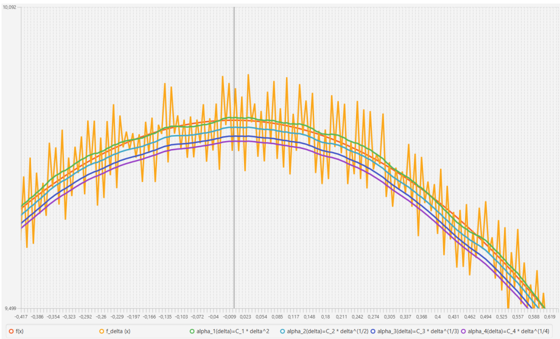

Рисунок 7: $N = 1000$,
$\delta = 0.1$,
$C_1 = 0.14$, $C_2 = 0.007$,
$C_3 = 0.007$, $C_4 = 0.007$,
$f(x) = \pi^2 - x^2$

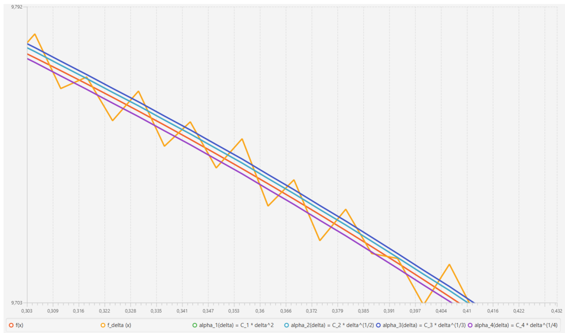

Рисунок 8: $N = 1000$,
$\delta = 0.01$,
$C_1 = 1.0$, $C_2 = 0.016$,
$C_3 = 0.0072$, $C_4 = 0.0055$,
$f(x) = \pi^2 - x^2$

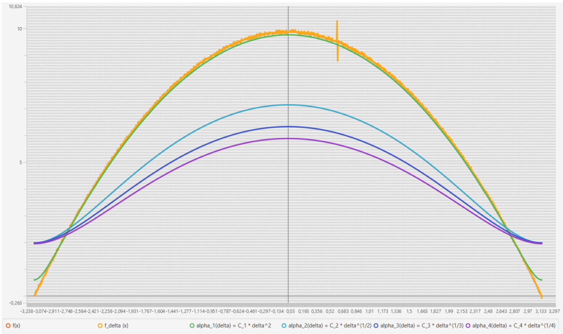

Рисунок 9: $N = 1000$, $\delta = 0.1$, $C_1 = 1.0$, $C_2 = 1.0$, $C_3 = 1.0$, $C_4 = 1.0$,
$f(x) = \pi^2 - x^2$

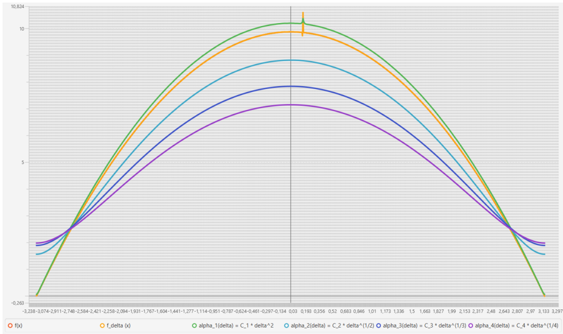

Рисунок 10: $N = 1000$, $\delta = 0.01$, $C_1 = 1.0$, $C_2 = 1.0$, $C_3 = 1.0$, $C_4 = 1.0$,
$f(x) = \pi^2 - x^2$

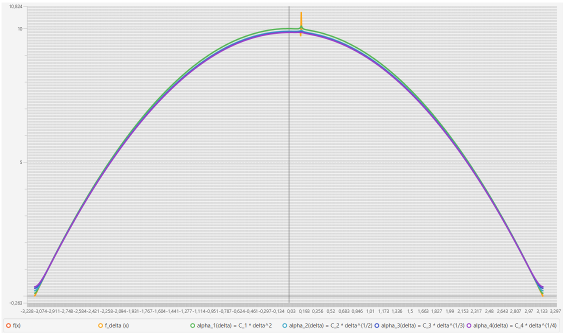

Рисунок 11: $N = 1000$, $\delta = 0.01$, $C_1 = 2.6$, $C_2 = 0.01$, $C_3 = 0.01$, $C_4 = 0.01$,
$f(x) = \pi^2 - x^2$

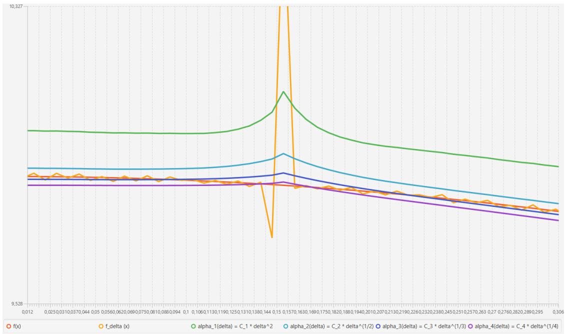

Рисунок 12: $N = 1000$, $\delta = 0.01$, $C_1 = 2.6$, $C_2 = 0.01$, $C_3 = 0.01$, $C_4 = 0.01$,
$f(x) = \pi^2 - x^2$

Рисунки 9-12 - результаты, полученные при наличии всплесков у $f_\delta(x)$.

Результаты, продемонстрированные на графиках, убеждают в том, что при уменьшении погрешности измерений δ решения, полученные в результате применения описанного в начале главы численного алгоритма, приближаются к точному решению при фиксированных $C_k, k = 1, \ldots, 4$, что убеждает в корректности рассматриваемого метода. В реальных ситуациях при фиксированной погрешности измерений δ устремить δ к нулю, как это требуется по методу Тихонова для стремления $\Delta(\delta, T_\alpha, \overline{f})$, погрешности метода Тихонова в точке, к нулю, невозможно. Но, как показано на тестовых примерах, возможно подобрать соответствующие C_k так, чтобы полученные рассматриваемыми способами результаты были ближе к точному решению. Таким образом было получено, что подбор параметра регуляризации из интегрального вида регуляризирующих операторов даёт больше возможностей для получения приближенного решения. Путём подбора соответствующих C_k возможно получить результат, который будет лучше, чем при подборе параметра регуляризации по Тихонову. Подбор параметра регуляризации по Тихонову является одним из способов подбора параметра регуляризации из интегрального вида регуляризирующих операторов.

Заключение. В данной работе были рассмотрены история метода регуляризации А.Н. Тихонова, общая постановка и общий подход к решению уравнения I рода, постановка задачи восстановления функций. Основным результатом работы является построение решения задачи восстановления непрерывной функции, заданной на $[-\pi, \pi]$, её среднеквадратичными δ-приближениями. Получен интегральный вид регуляризирующих операторов в методе А.Н. Тихонова в случае периодических решений. На основе интегрального вида получено условие для подбора параметра регуляризации. На модельной задаче составлен математический эксперимент по выбору параметра регуляризации $\alpha(\delta)$.

В работе было продемонстрированно, что диапазон для выбора параметра регуляризации $\alpha(\delta)$ в случае периодических решений можно расширить, а определяет этот диапазон условие, полученное из интегрального вида регуляризирующих операторов. Тихоновский способ подбора параметра регуляризации является частью этого диапазона. В ходе математического эксперимента было подтверждено, что при выборе способа подбора параметра регуляризации, отличного от способа Тихонова, достигается сходимость приближенного решения задачи восстановления непрерывной 2π-периодичной функции.