

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математической физики и вычислительной математики

**Об обратных спектральных задачах для дифференциальных операторов**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента            2        курса        217        группы

направление        01.04.02 — Прикладная математика и информатика

---

механико-математического факультета

---

Иванова Дениса Анатольевича

---

Научный руководитель

зав. каф., д.ф.-м.н., профессор

---

В.А.Юрко

---

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор

---

В.А.Юрко

---

**Введение.** В данной работе изучается обратная задача спектрального анализа для дифференциального оператора Штурма-Лиувилля. Обратные спектральные задачи состоят в восстановлении операторов по их спектральным характеристикам.

Стоит отметить, что обратные задачи являются достаточно трудными для изучения, что связано, прежде всего, с их нелинейностью.

Значительный вклад в развитие теории обратных спектральных задач внесли В.А. Амбарцумян, Р. Билс, Г. Борс, М.Г. Гасымов, М.Г. Крейн, Б.М. Левитан, В.А. Марченко, А.Н. Тихонов, В.А. Юрко и другие математики. Наиболее полные результаты в спектральной теории дифференциальных операторов и, в частности обратных задач, получены для дифференциального оператора Штурма-Лиувилля

$$y'' + q(x)y.$$

Рассмотрим краевую задачу  $L(q(x), h, H)$  на интервале  $(0, \pi)$ :

$$\begin{aligned} ly &:= -y'' + q(x)y = \lambda y, \\ y'(0) - hy(0) &= 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Пусть  $\varphi(x, \lambda)$  - решение уравнения  $ly = \lambda y$ , удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h.$$

Существует несколько различных наборов спектральных характеристик, по которым можно однозначно восстановить оператор. В данной работе представлен способ восстановления оператора по спектральным характеристикам  $\{\lambda_n, \alpha_n\}$ , где  $\{\lambda_n\}$  - спектр краевой задачи  $L(q(x), h, H)$ , а  $\{\alpha_n\}$  - так называемые весовые числа, вычисляемые по формуле:

$$\alpha_n := \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx.$$

Обратная задача заключается в отыскании потенциала  $q(x)$  и коэффициентов граничных условий  $h$  и  $H$  по известным спектральным характеристикам  $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$ .

Цель работы состоит в решении обратной задачи восстановления дифференциального оператора по спектральным данным с помощью метода Гельфанда-Левитана.

Работа состоит из введения, двух разделов, заключения, списка использованных источников включающего двадцать четыре наименования и приложения.

Во введении дана краткая характеристика темы магистерской работы, приведены цели и задачи.

Первый раздел настоящей работы носит теоретический характер. В нем приводятся основные утверждения и вспомогательные теоремы, необходимые для доказательств теорем единственности решения обратной задачи, о необходимых и достаточных условиях ее разрешимости, а также для получения алгоритма ее решения. Данный алгоритм позволяет построить потенциал и коэффициенты краевых условий по заданным спектральным характеристикам.

Второй раздел работы посвящен численному решению обратной задачи по установленному в первой части алгоритму, для отыскания которого была написана программа на языке Python. Программа была полностью отлажена и проверена на тестовом примере, который также приведен во второй части настоящей работы. В конце второй части представлено сравнение полученных аналитического и численного решений на заданной сетке. Сравнение решений позволяет сделать вывод о сходимости численного решения к аналитическому и состоятельности алгоритма численного решения. Также в конце второй части приводятся решения задачи восстановления оператора для различных наборов спектральных характеристик.

В заключении указаны основные результаты и выводы о проделанной работе.

В приложении представлен программный код, реализующий численный алгоритм решения обратной задачи по методу Гельфанда-Левитана.

## Основное содержание работы.

**Вспомогательные утверждения и теоремы.** Рассмотрим краевую задачу  $L = L(q(x), h, H)$ :

$$l(y) := -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \pi, \quad (1)$$

$$U(y) := y' - hy(0) = 0, \quad V(y) := y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad (2)$$

где  $\lambda$  - спектральный параметр,  $q(x), h, H$  - вещественны;  $q(x) \in L_2(0, \pi)$ . Оператор  $l$  называется оператором Штурма-Лиувилля, функция  $q(x)$  называется потенциалом.

Значения параметра  $\lambda$ , для которых  $L$  имеет нетривиальные решения называются собственными значениями, а соответствующие нетривиальные решения - собственными функциями. Множество собственных значений  $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$  составляет спектр  $L$ .

Обозначим

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx, \quad (3)$$

где  $\varphi(x, \lambda_n)$  - собственная функция соответствующая собственному значению  $\lambda_n$ . Числа  $\{\alpha_n\}$  называются весовыми числами, а числа  $\{\lambda_n, \alpha_n\}$  называются спектральными данными краевой задачи  $L$ .

Пусть функции  $\varphi(x, \lambda), \psi(x, \lambda)$  являются решениями уравнения (1) при начальных условиях

$$\begin{aligned} \varphi(0, \lambda) &= 1, & \varphi'(0, \lambda) &= h, \\ \psi(\pi, \lambda) &= 1, & \psi'(\pi, \lambda) &= -H. \end{aligned}$$

**Теорема 1 (О существовании и асимптотическом поведении собственных значений и собственных функций).**

Краевая задача  $L$  имеет счетное множество собственных значений  $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ . При этом

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{k_n}{n}, \quad \{k_n\} \in l_2, \quad (4)$$

$$\varphi(x, \lambda_n) = \cos(nx) + \frac{\xi_n(x)}{n}, |\xi_n(x)| \leq C, \quad (5)$$

а также

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\kappa_{n1}}{n}, \{\kappa_{n1}\} \in l_2, \quad (6)$$

где

$$\omega = h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt,$$

$C$  - положительная константа, не зависящая от  $x, \lambda$  и  $n$ , а символ  $\{\kappa_n\}$  означает различные последовательности из  $l_2$ .

**Операторы преобразования.** Пусть функция  $C(x, \lambda)$  является решением уравнения (1) при начальных условиях

$$C(0, \lambda) = 1, \quad C'(0, \lambda) = 0.$$

Для нее справедливо следующее представление:

$$C(x, \lambda) = \cos \rho x + \int_0^x K(x, t) \cos \rho t dt, \quad \lambda = \rho^2. \quad (7)$$

Для функции  $\varphi(x, \lambda)$  имеет место следующее представление:

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \rho x + \int_0^x G(x, t) \cos \rho t dt. \quad (8)$$

**Единственность восстановления дифференциального уравнения по спектральным данным.** Наряду с  $L$  будем рассматривать краевую задачу  $\tilde{L} = L(\tilde{q}(x), \tilde{h}, \tilde{H})$  того же вида (1)-(2), но с другими коэффициентами. Если некоторый символ  $\gamma$  обозначает объект, относящийся к задаче  $L$ , то символ  $\tilde{\gamma}$  будет обозначать аналогичный объект, относящийся к  $\tilde{L}$ , а  $\hat{\gamma} := \gamma - \tilde{\gamma}$ .

**Теорема единственности.** Если  $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$ ,  $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n$ ,  $n \geq 0$ , то  $L = \tilde{L}$ , т.е.  $q(x) = \tilde{q}(x)$  почти всюду на  $(0, \pi)$ ,  $h = \tilde{h}$  и  $H = \tilde{H}$ . Таким образом, задание спектральных данных  $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$  однозначно определяет потенциал

и коэффициенты краевых условий.

**Восстановление дифференциального оператора по спектральным данным.** Рассмотрим краевую задачу  $L = L(q(x), h, H)$ . Пусть  $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$  - спектральные данные  $L$ ,  $\rho_n = \sqrt{\lambda_n}$ . В теореме об асимптотическом поведении было показано, что спектральные данные обладают свойствами:

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{k_n}{n}, \alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\kappa_{n1}}{n}, \{\kappa_n\}, \{\kappa_{n1}\} \in l_2, \quad (9)$$

$$\alpha_n > 0, \lambda_n \neq \lambda_m \quad (n \neq m).$$

Рассмотрим функцию:

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\cos \rho_n x \cos \rho_n t}{\alpha_n} - \frac{\cos nx \cos nt}{\alpha_n^0} \right) \quad (10)$$

Пусть даны числа  $\{\rho_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$  вида

$$\rho_n = n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{\kappa_n}{n}, \alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\kappa_{n1}}{n}, \{\kappa_n\}, \{\kappa_{n1}\} \in l_2, \alpha_n \neq 0 \quad (11)$$

**Уравнение Гельфанда-Левитана.** При каждом фиксированном  $x \in (0, \pi]$  ядро  $G(x, t)$  из представления (8) удовлетворяет линейному интегральному уравнению:

$$G(x, t) + F(x, t) + \int_0^x G(x, s)F(s, t)ds = 0, \quad 0 < t < x. \quad (12)$$

Это уравнение называется уравнением Гельфанда-Левитана.

Данная теорема позволяет свести обратную задачу к решению интегрального уравнения (12), причем данное уравнение является интегральным уравнением Фредгольма с параметром  $x$ .

**Теорема о необходимых и достаточных условия разрешимости обратной задачи.** Для того, чтобы вещественные числа  $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$  были

спектральными данными для некоторой краевой задачи  $L(q(x), h, H)$  вида (1)-(2) с  $q(x) \in L_2(0, \pi)$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$\rho_n = n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{\kappa_n}{n}, \alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\kappa_{n1}}{n}, \{\kappa_n\}, \{\kappa_{n1}\} \in l_2, \quad (13)$$

$$\alpha_n > 0, \lambda_n \neq \lambda_m (n \neq m). \quad (14)$$

### Алгоритм построения краевой задачи по спектральным данным.

Краевая задача  $L(q(x), h, H)$  строится по следующему алгоритму:

- 1) По заданным числам  $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$  строим функцию  $F(x, t)$  по формуле (10).
- 2) Находим функцию  $G(x, t)$  из уравнения (12).
- 3) Вычисляем  $q(x), h, H$  по формулам

$$q(x) = 2 \frac{d}{dx} G(x, x), \quad h = G(0, 0) \quad (15)$$

$$H = \omega - h - \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt. \quad (16)$$

**Численное решение задачи восстановления оператора по спектральным данным.** В данной части представлено численное решение обратной задачи. Для отыскания численного решения была написана программа на языке **Python**, описание которой будет представлено далее. Также здесь будет произведено сравнения численного и аналитического решений.

**Алгоритм отыскания численного решения.** Рассмотрим область  $D = \{(x, t) : 0 < x < \pi, 0 < t < \pi\}$ . Построим равномерные сетки  $\omega_x = \{x_k\}_{k=1}^{N-1}$  и  $\omega_t = \{t_j\}_{j=1}^{N-1}$  по осям  $x$  и  $t$  соответственно. Шаг каждой сетки равен  $h$ ,  $N = \frac{\pi}{h}$  - число узлов. Расширенные сетки (включающие граничные узлы) обозначим через  $\bar{\omega}_x = \{x_k\}_{k=0}^N$  и  $\bar{\omega}_t = \{t_j\}_{j=0}^N$  соответственно. Таким образом можем получить двумерную сетку  $\bar{\omega}_{xt} = \bar{\omega}_x \times \bar{\omega}_t$ , каждый узел которой характеризуется координатами по соответствующим осям. Здесь и

далее под узлом понимается пара координат  $(x_k, t_j)$ , где

$$\begin{cases} 0 \leq k \leq N, 0 \leq j \leq N, \\ x_k = k \cdot h, t_j = j \cdot h, \\ N \cdot h = \pi. \end{cases}$$

Также будем рассматривать треугольные области

$D_\Delta = \{(x, t) : 0 < x \leq \pi, 0 < t < x\}$  и  $\bar{D}_\Delta = \{(x, t) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t \leq x\}$ ,  
и соответствующую  $\bar{D}_\Delta$  расширенную сетку  $\bar{\omega}_\Delta = \bar{\omega}_x \times \tilde{\omega}_t = \{(x_k, t_j)\}_{k=0, j=0}^{N, k}$ ,  
где  $\tilde{\omega}_t = \{t_j\}_{j=0}^k$ . Значение произвольной функции  $f(x, t)$  в узле  $(x_k, t_j)$  обозначим через  $f_{k,j}$ .

1) Рассмотрим функцию  $F(x, t)$  из представления (10) на сетке  $\bar{\omega}_{xt}$ .

$$F_{k,j} = \sum_{n=0}^{N_\varepsilon} \left( \frac{\cos \rho_n x_k \cos \rho_n t_j}{\alpha_n} - \frac{\cos n x_k \cos n t_j}{\alpha_n^0} \right), \quad (17)$$

где  $N_\varepsilon$  такое, что

$$\forall n \leq N_\varepsilon : \left| \frac{\cos \rho_n x_k \cos \rho_n t_j}{\alpha_n} - \frac{\cos n x_k \cos n t_j}{\alpha_n^0} \right| \geq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

То есть при вычислении  $F_{k,j}$  члены ряда меньшие  $\varepsilon$  не учитываем.

2) Интегральное уравнение (12) будем решать при каждом фиксированном  $x_k \in \bar{\omega}_x$ :

$$G(x_k, t) + F(x_k, t) + \int_0^{x_k} G(x_k, s) F(s, t) ds = 0, \quad t \in \tilde{\omega}_t. \quad (18)$$

а) При  $x_k = 0$  (18) даст  $G_{0,0} = -F_{0,0}$ .

б) При  $x_k > 0$  для отыскания решения воспользуемся методом трапеций.  
Для удобства вычислений, считаем  $s_i = t_i, 0 \leq i \leq k$ .

$$\int_0^{x_k} G(x_k, s) F(s, t_j) ds \approx \sum_{i=0}^{k-1} \frac{G_{k,i} F_{i,j} + G_{k,i+1} F_{i+1,j}}{2} \cdot h. \quad (19)$$

Подставляя (18) в (19) при каждом фиксированном  $0 < k \leq N$  получим СЛАУ относительно неизвестных  $G_{k,j}, 0 \leq j \leq k$ . Решая эту систему, и, учитывая, что  $G_{0,0} = -F_{0,0}$ , находим значения функции  $G(x, t)$  на сетке  $\bar{\omega}_\Delta$ . Поскольку при установке теоремы об уравнении Гельфанда-Левитана было доопределено, что  $G(x, t) = 0$  при  $x < t$ , то полученные значения удобно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} G_{0,0} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ G_{0,1} & G_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{0,N-1} & G_{1,N-1} & \dots & G_{N-1,N-1} & 0 \\ G_{0,N} & G_{1,N} & \dots & G_{N-1,N} & G_{N,N} \end{pmatrix} \quad (20)$$

3) Согласно (15)  $q(x) = 2\frac{d}{dx}G(x, x)$ ,  $h = G_{0,0}$ . Рассмотрим дифференциальный оператор  $TG = \frac{d}{dx}G(x, x)$ . Построим его разностную аппроксимацию на равномерной сетке  $\bar{\omega}_x$  с шагом  $h$ . В произвольной внутренней точке  $x_k \in \bar{\omega}_x$  разностные операторы, аппроксимирующие  $T$ , можно построить следующими способами:

$$\begin{aligned} T_h^+ G_{k,k} &= \frac{G(x_k + h, x_k + h) - G(x_k, x_k)}{h}, \\ T_h^- G_{k,k} &= \frac{G(x_k, x_k) - G(x_k - h, x_k - h)}{h}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$T_h^o G_{k,k} = \frac{G(x_k + h, x_k + h) - G(x_k - h, x_k - h)}{2h}.$$

Таким образом  $q_0 = T_h^+ G_{0,0}$ ,  $q_N = T_h^- G_{N,N}$ , а при  $k = \overline{1, N-1}$   $q_k = T_h^o G_{k,k}$ . Для вычисления интеграла в (16) можно также воспользоваться методом трапеций.

**Выбор тестовых данных и проверка условий разрешимости.** Пусть  $\lambda_n = n^2$  ( $n \geq 0$ ),  $\alpha_n = \frac{\pi}{2}$  ( $n \geq 1$ ) и пусть  $\alpha_0 > 0$  - произвольное положительное число.

Покажем, что выбранные числа являются спектральными данными для неко-

торой краевой задачи  $L(q(x), h, H)$ .

Действительно,

$$\sqrt{\lambda_n} = \rho_n = n + \frac{0}{\pi n} + \frac{0}{n},$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{0}{n}.$$

Отсюда следует, что последовательности  $\{\kappa_n\}$  и  $\{\kappa_{n1}\}$  состоят из нулей, очевидно, что они принадлежат  $l_2$ . Таким образом условие (13) выполняется. Поскольку было доопределено, что  $\alpha_0 > 0$ , и, очевидно,  $\forall n \neq m \lambda_n \neq \lambda_m$ , то делаем вывод, что условие (14) также выполняется, и, следовательно, по выбранным числам можно построить краевую задачу, то есть обратная задача разрешима.

**Аналитическое решение.** Обозначим  $a := \frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\pi}$ . Следуя алгоритму решения обратной задачи получим следующее решение:

$$q(x) = \frac{2a^2}{(1+ax)^2}, h = -a, H = \frac{a}{1+a\pi} = \frac{a\alpha_0}{\pi}.$$

**Сравнение аналитического и численного решений.** Согласно полученному в функция  $F(x, t)$  тождественно равна константе  $a = \frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\pi}$ .

Анализируя данные, представленные в таблице (2.2) делаем вывод, что сеточная функция  $F(x, t)$  полученная в результате работы программы, также является тождественной константой и равна 0.31.

Полученная в ходе аналитического решения функция  $G(x, t) = -\frac{a}{1+ax}$  не зависит от переменной  $t$ , но зависит от переменной  $x$ , то есть ее значение не меняется во времени и зависит только от пространственной координаты (при  $t < x$ ).

На основании данных, представленных в таблице (2.3) можно сделать аналогичный вывод:  $\forall x_k \in \bar{\omega}_x, t_j \in \tilde{\omega}_t, G(x_k, t_j) \equiv \text{Const}$ . Например  $G(x, t_2) \equiv -0.26, G(x, t_3) \equiv -0.24$ .

Для взятого  $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$

$$q(x) = 2 \frac{\left(\frac{1}{\pi}\right)^2}{\left(1 + \frac{1}{\pi}x\right)^2}.$$

Для демонстрации сходимости полученного в результате работы численного алгоритма решения к точном ниже приведены графики точной и найденной функции для сетки из ста узлов

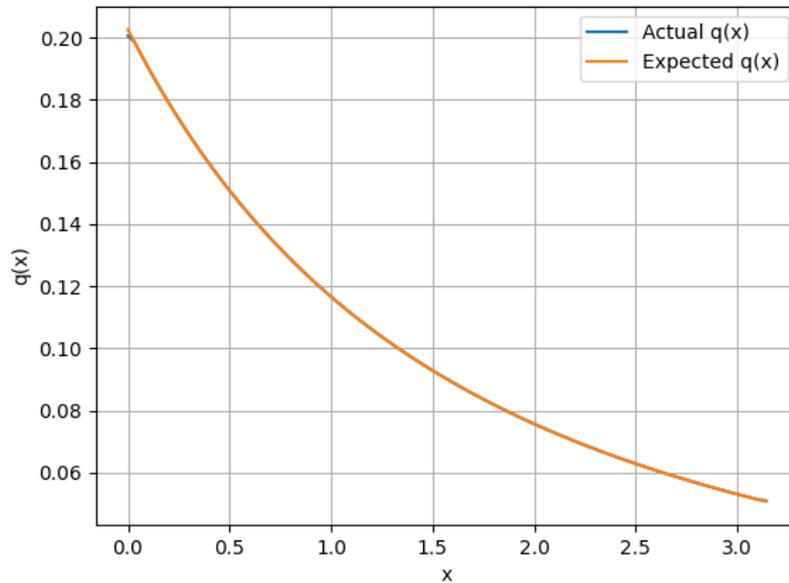


Рисунок 1 —  $q(x)$  на сетке из 100 узлов

**Отыскание численного решения для заданных спектральных данных.** Найдем с помощью полученного алгоритма численное решение по заданным спектральным данным:

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2},$$

$$\rho_n = \begin{cases} n + \frac{1}{n}, n > 0, \\ 0, n = 0. \end{cases}$$

Ниже приведены графики для  $\varepsilon = 0.1$  и  $\varepsilon = 0.0001$  для различных сеток. По ним можно сделать вывод, что уменьшение значения  $\varepsilon$  и увеличение числа узлов позволяет получить более точное представление об аналитической функции  $q(x)$ .

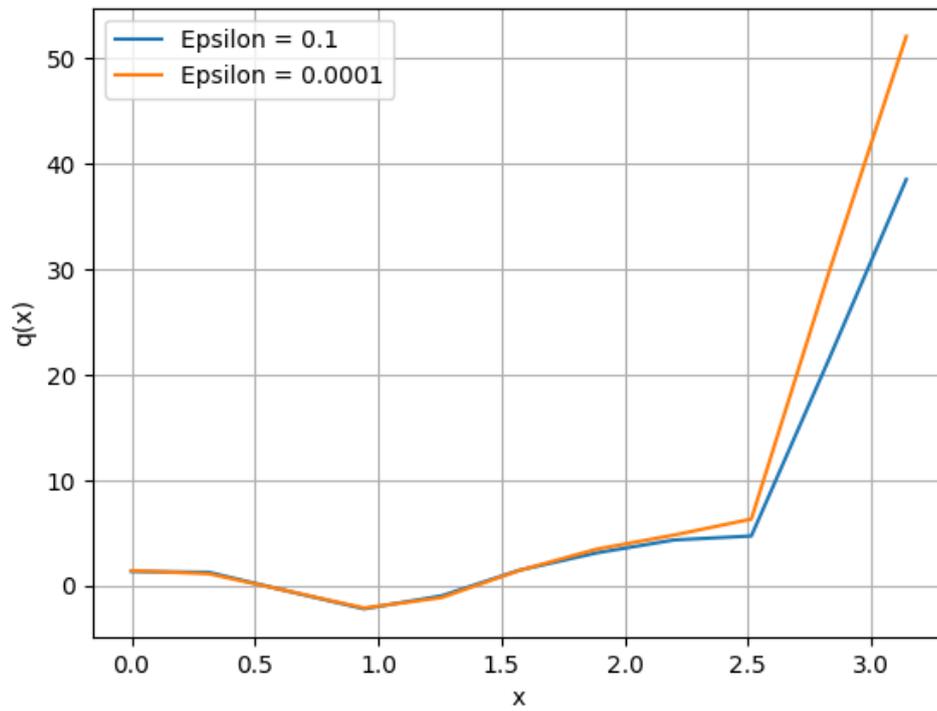


Рисунок 2 —  $q(x)$  на сетке из 10 узлов

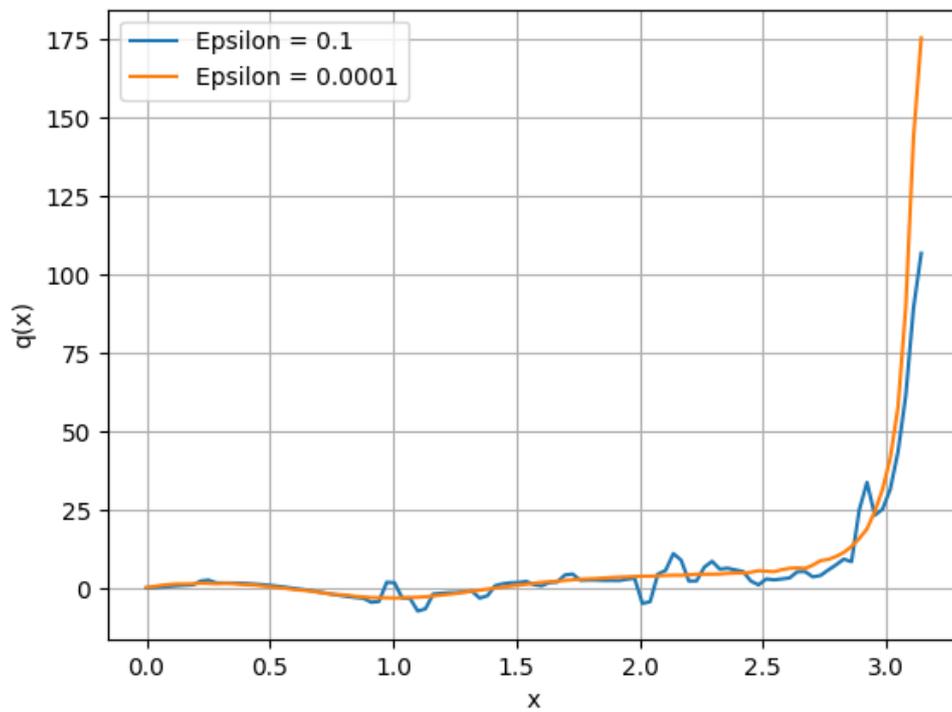


Рисунок 3 —  $q(x)$  на сетке из 100 узлов

**Заключение.** В данной работе была поставлена задача восстановления дифференциального оператора по заданным спектральным данным. Поставленная задача относится к типу обратных; ее суть состоит в нахождении потенциала оператора и коэффициентов краевых условий. Из теоретических положений, лежащих в основе обратных задач, следует, что задание спектральных данных однозначно определяет потенциал и коэффициенты краевых условий. Для восстановления оператора по спектральным данным был использован метод Гельфанда-Левитана, который позволяет свести решение обратной задачи к решению интегрального уравнения Фредгольма. На основании этого метода строится алгоритм решения.

В первом разделе приведены теоретические основы обратных задач. Основными теоремами являются: теорема единственности восстановления дифференциального оператора по спектральным данным, теорема о сведении обратной задачи к интегральному уравнению, теорема о необходимых и достаточных условиях разрешимости обратной задачи. Поставлена задача восстановления дифференциального оператора по спектральным данным и приведен алгоритм аналитического решения.

Второй раздел был посвящен численному решению поставленной в первом разделе задачи. В нем представлен алгоритм численного решения обратной задачи и приведено описание программы, реализующей данный алгоритм. Проверка работы программы была произведена на тестовом примере, для которого было получено аналитическое решение. Производится сравнение аналитического решения с результатами численного эксперимента, делается вывод о сходимости численного решения к аналитическому. Также, во втором разделе приводятся найденные посредством разработанной программы численные решения для различных наборов спектральных данных.

В приложении приведена программа на языке **Python**, вычисляющая значения коэффициентов краевых условий и потенциала на заданной сетке.