МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Кооперативные решения в теории игр нескольких лиц

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 – Математика и компьютерные науки
код и наименование направления

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

Коротеева Александра Алексеевича
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель профессор, д.ф.-м.н., профессор		В.В. Розен
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия
Зав. кафедрой к.ф.-м.н., доцент		С.В. Галаев
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2021

Введение. *Игрой* называется математическая модель конфликта, а его участники называются игроками. Математическая модель конфликта должна отражать присущие ему черты, а значит, должна описывать:

- множество заинтересованных сторон (игроков);
- возможные действия каждой из сторон (стратегии и ходы);
- интересы сторон, представленные функциями выигрыша (платежа) для каждого из игроков.

В теории игр предполагается, что функции выигрыша и множество стратегий, доступных каждому из игроков общеизвестны, т. е. каждый из игроков знает свою функцию выигрыша и набор имеющихся в его распоряжении стратегий, а также функции выигрыша и стратегии всех остальных игроков. В соответствии с этой информацией каждый из игроков организует свое поведение. Термин «кооперативная» связан с предположением, что игроки могут образовывать коалиции.

В данной работе поставлены следующие задачи:

- Переход от игры в нормальной форме к игре с характеристической функцией;
- показано то, что характеристическая функция построенной игры является супераддитивной;
- введено отношение эквивалентности кооперативных игр в форме характеристической функции;
- рассмотрено понятие существенной кооперативной игры в форме характеристической функции и указаны различные эквивалентные между собой условия существенности;
- для кооперативной игры введено понятие дележа и показано, что несущественная игра имеет единственный дележ, а существенная - бесконечно много дележей;
- рассмотрены характеристические функции с абстрактной точки зрения;

- проведен сравнительный анализ дележей кооперативной игры;
- изучена линейная структура множества всех характеристических функций.

Основное содержание работы.

1. Игра в нормальной форме представляет собой систему вида:

$$\Gamma = \langle I, (X_i)_{i \in I}, (f_i)_{i \in I} \rangle \quad (1.1)$$

Где $I = 1, \dots, n$ – множество игроков; X_i – множество стратегий игрока $i \in I$; f_i- функция выигрыша игрока $i \in I$; т.е. отображение, которое каждой ситуации игры $x \in X = \prod_{i \in I}(X_i)_{i \in I}$ ставит в соответствие число f_i(x), называемое выигрышем игрока i в ситуации x.

Бескоалиционные игры - это класс игр, в которых каждый игрок принимает решение независимо от других игроков (изолированно), не участвуя ни в каких переговорах и соглашениях с другими игроками. К бескоалиционным играм относятся статистические игры (игры с «природой») антагонистические игры (игры с противоположными интересами сторон), игры с не противоположными интересами (в том числе биматричные игры) и др.

Игра в нормальной форме называется *антагонистической*, если в ней число игроков равно двум и их выигрыши в любой ситуации противоположны, т.е. $I = \{1,2\}$ и f_2 (x)=-f_1 (x) для любой системы $x \in X$. Цена построенной антагонистической игры определяется равенством

$$v(S) = sup_{x \in X_S} inf_{y \in X_S} f(S)(x, y) \quad (1.2)$$

где

$$f(S)(x, y) = \sum_{i \in S} f_i(x, y)$$

Для игр в нормальной форме вводится понятие *аффинной эквивалентности.* Игра $\Gamma' = \langle I', (X'_i)_{i \in I}, (f'_i)_{i \in I} \rangle$ называется аффинно эквивалентной игре Г вида (1.1), если множества игроков в них одинокого $X_i = X'_i$, $i \in N$ (отсюда следует,. что игры Г и Γ' имеют одно и то же множество ситуаций) , а функции выигрыша $f_k'(x) = k_i f_i(x) + c_i$, i∈ N , где $k_i > 0$, i∈N.

Коалицией в игре Г называется произвольное подмножество игроков $S \subseteq I = 1, \dots, n$. В частности, одноэлементное множество i

состоящее из единственного игрока i, по определению считается коалицией.

Допускается также пустая коалиция $\emptyset$ и коалиция I, содержащая всех игроков.

Сформулируем основные предположения, касающиеся возможностей кооперативного поведения игроков в игре Г.

- Возможно образование любых коалиций.

1) Игроки, вступившие в коалицию, имеют возможность применения любых совместных действий составляющих ее игроков.

   Формально это условие означает, что множеством стратегий коалиции S является декартово $X_S = \prod_{i \in S} X_i$;
2) Суммарный выигрыш, полученный всеми игроками коалиции S может быть распределен между членами любым способом.

Далее нас интересует вопрос о наибольшем выигрыше, который игроки из S могут уверенно получить. Но что вообще может помешать им получать достаточно большие выигрыши, допускаемые значениями функций $f_i(x)$. Очевидно, деятельность игроков, не вошедших в S, т.е. игроков из $I \setminus S$. В худшем для игрока 1 случае игроки из $I \setminus S$ могут также объединиться в некоторого коллективного игрока 2 с множеством стратегий

$$X_{I \setminus S} = \prod_{i \in I \setminus S} x_i$$

И с интересами, диаметрально противоположными интересам игрока 1. Таким образом, мы по бескоалиционной игре из (1.1) и коалиции S в ней конструируем антагонистическую игру

$$\Gamma_S = < x_S, x_{I \setminus S}, f_S > \qquad (1.7)$$

В кооперативной игре возможности коалиции S можно охарактеризовать одним числом $\nu(S)$, представляющим собой максимальный гарантированный суммарный выигрыш игроков коалиции S в наиболее неблагоприятных для нее условиях, когда все остальные игроки также объединяются в коалицию с противоположными интересами. Формально $\nu(S)$- есть цена антагонистической игры коалиции S против коалиции остальных игроков S. Так как множеством стратегий коалиции S является $\prod_{i \in S} X_i$ множеством стратегий коалиции I\S является $\prod_{i \in I \setminus S} X_i$, и функция выигрыша коалиции S есть $f_S = \sum_{i \in S} f_i$, то цена построенной антагонистической игры определяется равенством

$$\nu(S) = \sup_{x \epsilon X_S} \inf_{y \epsilon X_{I \setminus S}} f_S(x, y) \quad (1.8)$$

В случае, когда множества стратегий игроков конечны, операторы sup и inf превращаются соответственно в так max и min; равенство

$$\nu(S) = \sup_{x \epsilon X_S} \min_{y \epsilon X_{I \setminus S}} f_S(x, y)$$

дает тогда нижнюю цену получающейся матричной игры.

Определение 1. Функция, которая каждой коалиции $S \subseteq I$ ставит в соответствие число $\nu(S)$, определенное равенством (1.5) называется *характеристической функцией игры* Г.

Определение 2. Пара $\langle I, v \rangle$, где I множество игроков и ν характеристическая функция игры Г, называется *кооперативной игрой,* построенной для игры Г.

Кооперативная игра $\langle I, v \rangle$ является уже нестратегической (в ней не отражены возможности игроков по формированию ситуаций игры с помощью выбора стратегий), однако последствия, связанные с возникновением тех или иных ситуаций игры Г и касающиеся не только отдельных игроков, но и их коалиций, отражены в характеристической функции ν.

В сущности, переход от бескоалиционной игры Г из (1.1) к ее характеристической функции можно рассматривать как итог последовательно проводимого принципа максимина. Тем самым характеристическую функцию можно считать как бы решением игры $\langle I, v \rangle$.

Установим два свойства, которыми обладает характеристическая функция любой бескоалиционной игры:

1) Персональность. $v(\emptyset) = 0$. (1.9)
2) Супераддитивность. Для каждой бескоалиционной игры

если $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, то $v(S_1) + v(S_2) \leq v(S_1 \cup S_2)$. (1.10)

Играми с постоянной суммой называются игры, в которых игроки не могут увеличить или уменьшить имеющиеся ресурсы, или фонд игры. *Дополнительность.* Для любой бескоалиционной игры $\langle I, v \rangle$ с постоянной суммой:

$$v(S) + v(I \backslash S) = v(I) . \quad (1.12)$$

Свойства однородной аффинной эквивалентности, изоморфности и автоморфизмов бескоалиционных игр сохраняются при переходе к их характеристическим функциям в смысле, описываемом следующими теоремами.

Теорема 1.1. Если бескоалиционные игры

$$\Gamma =< I, (X_i)_{i \in I} (f_i)_{i \in I} >$$
$$\Gamma' =< I, (X_i')_{i \in I} (f'_i)_{i \in I} >$$

однородно аффинно эквивалентны, причем для всех $x \in X$ и $i \in I$

$$f'_i(x) = kf_i(x) + a_i,$$

то для любой коалиции $S \subseteq I$:

$$v' = kv(S) + \sum_{i \in S} a_i$$

*2***.** С абстрактной точки зрения, характеристическая функция бескоалиционной игры состоит в установлении соответствия каждому подмножеству некоторого множества (игроков) вещественного числа. Поэтому о ней можно говорить и вне какой-либо связи с бескоалиционными играми. На этом пути возникает весьма плодотворное понятие кооперативной игры, о которой речь будет идти ниже.

Определение 3. Характеристической функцией над множеством I называется *отображение*

$$v: 2^I \to R. \qquad (2.1)$$

Через 2^I обозначается множество всех подмножеств множества I. (т.е. множество всех коалиций)

Далее мы будем множество I предполагать конечным, а его элементы называть игроками. Будем полагать $I = \{1, \ldots, n\}$.

Содержательно характеристическая функция (2.1) описывает следующее положение дел. Пусть игроки из I находятся в таких условиях, - что, вступая, если нужно, в отношения производства и обмена, они могут получать те или иные сравнимые между собой выигрыши (полезности). Характеристическая функция и ставит при этом в соответствие каждой коалиции S ⊂ Г наибольший уверенно получаемый ею выигрыш v (S) .

Теория кооперативных игр, элементы которой нам предстоит изложить в данной главе, заключается в том, чтобы для процесса, приводящего к данной характеристической функции, указывать в том или ином смысле оптимальные распределения получаемой полезности между игроками.

Теорема 2.1. Какова бы ни была функция

$$v: 2^I \to R \quad (2.9)$$

с конечным множеством игроков I, обладающая свойствами персональности и супераддитивности, существует конечная бескоалиционная игра

$$\Gamma =< I, (X_i)_{i \in I} (f_i)_{i \in I} > \quad (2.10)$$

с множеством игроков I, характеристическая функция v_Γ, которая совпадает с v.

Теорема 2.2. Если характеристическая функция v вида $v\colon 2^I \to R$ обладает помимо свойств персональности и супераддитивности еще и свойством дополнительности, то существует бескоалиционная игра Г вида

$$\Gamma =< I, (X_i)_{i\in I}(f_i)_{i\in I} >$$

с постоянной суммой, для которой $v_\Gamma = y$.

Определение 4. Две кооперативные игры $< I, v >$ и $< I, v' >$ называются *эквивалентными*, если существует положительное число k > 0 и n чисел c_i ($i = 1, \dots, n$), при которых выполняется равенство $v'(S) = kv(S) + \sum_{i\in S} c_i$.

Теорема 2.3. Для кооперативной игры $< I, v >$ следующие условия эквивалентны между собой:

1. Характеристическая функция v аддитивна;

2. $v(S) = \sum_{i\in S} v(i)$ для любой коалиции $S \subseteq I$;

3. $v(I) = \sum_{i\in I} v(i)$.

Определение 5. Говорят, что кооперативная игра $< I, v >$ имеет 0-1−редуцированную форму, если

1. $v(i) = 0$ для всех $i \in I$;

2. $v(I) = 1$.

Теорема 2.4. Каждая существенная кооперативная игра эквивалентна некоторой кооперативной игре, имеющей 0-1−редуцированную форму

3. Рассмотрим кооперативную игру $< I, v >$. Будем интерпретировать число $v(S)$ как сумму, гарантированно получаемую коалицией S. Тогда коалиция всех игроков может гарантированно получить сумму $v(I)$ и затем распределить ее любым способом между всеми игроками. Всякое такое распределение будем трактовать как возможный исход игры $< I, v >$. Вопрос, какой исход кооперативной игры $< I, v >$ следует считать

оптимальным («правильным», «справедливым»), будет рассмотрен в следующей лекции, а сейчас укажем некоторые предварительные условия оптимальности исхода. Безусловными требованиями, предъявляемыми к оптимальному исходу, являются требования индивидуальной и коллективной рациональности.

Определение 6. Вектор $x \in R^n$ удовлетворяющий условиям индивидуальной и коллективной рациональности, называется *дележом* в кооперативной игре $< I, v >$.

Однако в существенной кооперативной игре имеется бесконечное множество дележей, поэтому следующий этап определения оптимального исхода кооперативной игры состоит в сужении множества дележей.

Свойство 1. Всякая несущественная кооперативная игра имеет единственный дележ:

$$x = (v(1), \dots, v(n)). \quad (3.3)$$

Свойство 2**.** Всякая существенная кооперативная игра имеет бесчисленное множество дележей.

Свойство 3**.** Для кооперативной игры в 0-1–редуцированной форме вектор $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ является дележом тогда и только тогда, когда $x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

Сравнение дележей кооперативной игры проводится на основе введения отношения доминирования дележей.

Определение 7. Говорят, что *дележ у доминирует дележ х* по коалиции S, если выполняются следующие два условия:

1) эффективность доминирующего дележа: $y(S) \leq v(S)$

2) предпочтительность: $y_i > x_i,\ i \in S$

Определение 8. Говорят, что *дележ* y *доминирует дележ* x (записывается $y \succ x$), если существует непустая коалиция $S \subseteq I$, для которой $y \succ^S x$ Формально отношение $\succ$ есть объединение отношений $\succ^S$ по всем непустым коалициям $S \subseteq I$.

Теорема 3.1. Пусть v и v' — характеристические функции над множеством игроков I, причем $v'(S) = kv(S) + \sum_{i \in S} c_i$ где $S \subseteq I$, $k > 0$. Тогда отображение $x'_i = kx_i + c_i, i = 1, \dots, n$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством дележей игры $< I, v >$ и множеством дележей игры $< I, v' >$,при котором из $y \succ^S x$ следует $y' \succ^S x'$.

4. В линейном пространстве всех вещественных функций на множестве 2^I множество $\mathcal{V}(I)$ всех характеристических функций над I (т.е. функций, обладающих свойствами супераддитивности и персональности) имеет определенное строение.

Напомним, что *выпуклый конус* – это подмножество линейного пространства, которое замкнуто относительно линейных комбинаций с положительными коэффициентами.

Теорема 4.1. В пространстве всех вещественных функций на I (где $|I| = n$) множество $\mathcal{V}(I)$ является выпуклым конусом, размерность которого не превосходит $2^n - 1$.

Определение 9. Характеристическая функция v называется *простой*, если она принимает лишь два значения: 0 и 1. Если характеристическая функция о простая, то коалиции S, для которых v(S) = 1, называются *выигрывающими*, а коалиции S, для которых v(S) = 0, — *проигрывающими*.

Теорема 4.2. Все $2^n - 1$ простейших характеристических функций над I линейно независимы в совокупности.

Теорема 4.3. Имеет место следующее представление характеристической функции через простейшие характеристические функции:

$$v = \sum_{R \subset I} \lambda_R(v) v_R \qquad (4.1)$$

Где

$$\lambda_R(v) = \sum_{S \subset R} (-1)^{|R|-|S|} v(S) \qquad (4.2)$$

В характеристической функции с n игроками наложение условий дополнительности равносильно наложению $2^{n-1} - 1$ линейно независимых условий вида $v_\Gamma(S \cup L) \geq v_\Gamma(S) + v_\Gamma(L)$. Переход от характеристических функций к их выпуклым комбинациям, а также их умножение на положительные числа этих условий не нарушают. Поэтому множество характеристических функций с n игроками, удовлетворяющих условию дополнительности, является 2^{n-1} мерным выпуклым конусом.

Заключение. В данной работе были изучены игры в нормальной форме и их классификация. Были продемонстрированы свойства игр. Показано как от игры в нормальной форме перейти к игре с характеристической функцией. Рассмотрены характеристические функции с абстрактной точки зрения. Для кооперативной игры введено понятие дележа и показано, что несущественная игра имеет единственный дележ, а существенная - бесконечно много дележей. Показано доминирование дележей. Изучена линейная структура множества всех характеристических функций.