МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Неравенства для выпуклых функций и их обобщения

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы

направления ***02.03.01 Математика и компьютерные науки***

механико-математического факультета

Чефрановой Дарьи Сергеевны

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н.		М. А. Осипцев
должность, уч.степень, уч.звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой

и.о.зав.кафедрой, к.ф.-м.н.		А. М. Захаров
должность, уч.степень, уч.звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2021

Введение. Данная дипломной работе посвящена изучению выпуклых функций, их свойствам, а так же сильно выпуклым функциям.

Раздел математики, изучающий выпуклые множества, выпуклые функции и выпуклые экстремальные задачи, называется выпуклым анализом.

Понятие выпуклости играет важную роль в различных областях фундаментальной и прикладной математики. Основные факты и понятия выпуклого анализа сформировались ещё в 18-м и начале 19-ого столетия. В конце 19-го столетия и начале 20-го столетия Г. Минковским был создан специальный раздел геометрии - выпуклая геометрия. Основные понятия выпуклой геометрии, такие как опорная функция, поляра, крайняя точка, сыграли большую роль в создании в начале 20-го века функционального анализа.

Развитие математики и расширение её приложений привело к созданию различных аналогов и обобщений понятия выпуклости. Целью работы является рассмотрение этих обобщений и расчет функции Минковского для выпуклой оболочки точек. Основными задачами моей дипломной работы являются:

1. Изучение свойств выпуклых функций.
2. Обобщение понятия выпуклости.
3. Изучение свойств r-сильно выпуклых функция.
4. Получение оценок для r-сильно выпуклых функций.

В качестве материалов исследования были рассмотрены статьи зарубежный авторов. В первой части дипломной работы были введены и изучены основные понятия и определения выпуклого множества и выпуклой функции. Во второй части рассмотрен субдифференциал выпуклой функции, а так же его свойства. В третьей приведены некоторые выпуклые функции с их основными свойствами, такие как индикаторная, опорная и функция Минковского. Далее в четвертой части были рассмотрены некоторые обобщения понятия выпуклости. А в пятой части получены некоторые неравенства для r-сильно выпуклых функций. И в последней шестой части приведены подсчеты выпуклой функции Минковского для выпуклой оболочки точек с помощью программы Wolfram Mathematica.

Основное содержание работы. Основным объектом данной работы является выпуклые функции.

Определение 1. Множество $A \subset \mathbb{R}^p$ называется выпуклым, если для любого числа $\lambda \in (0, 1)$ и любых точек $x_1, x_2 \in A$ справедливо включение $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in A$.

Определение 2. Эффективным множеством функции $f \ : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ называется множество $domf = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) < +\infty\}$

Определение 3. Функция $f \ : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ называется собственной, если $domf \neq \varnothing$.

Определение 4. Надграфиком функции $f \ : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ называется множество $epi\ f = \{(x, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in domf, \mu \geq f(x)\}$.

Определение 5. Функция f называется выпуклой, если её надграфик $epif$ есть выпуклое множество. В противном случае, функция f называется вогнутой.

Определение 6. Функция $f \ : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ называется полунепрерывной снизу в точке $x \in domf$, если справедливо неравенство

$$f(x) \leq \lim_{y \to x} inf f(y)$$

Определение 7. Функция $f \ : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ называется полунепрерывной сверху в точке $x \in domf$, если справедливо неравенство

$$f(x) \geq \lim_{y \to x} supf(y)$$

Пример 1. Рассмотрим отображения

$$A_1(x) = \begin{cases} [x, 1 + x], & x \neq 0, \\ [0, 2^{-1}], & x = 0, \end{cases}$$

$$A_2(x) = \begin{cases} [x, 1 + x], & x \neq 0, \\ [0, 2], & x = 0. \end{cases}$$

В точке $x_0 = 0$ отображение $A_1(x)$ полунепрерывно снизу, но не полунепрерывно сверху, а отображение $A_2(x)$ полунепрерывно сверху, но не полунепрерывно снизу.

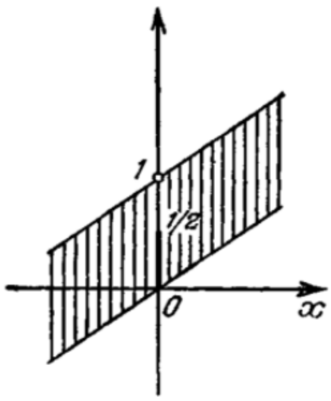

График 1

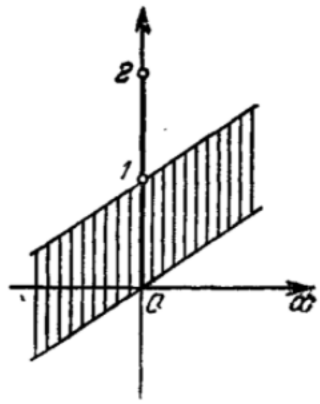

График 2

Определение 8. Вектор $p \in \mathbb{R}^n$ называется субградиентом собственной выпуклой функции $f\ : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ в точке x_0, если справедливо неравенство

$$f(z) - f(x_0) \geq \langle p, x - x_0 \rangle \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

Определение 9. Субдифференциалом собственной выпуклой функции $f\ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке x_0 называется множество, обозначаемое $\partial f(x_0)$ и состоящее из всех субградиентов функции f в точке x_0, то есть

$$\partial f(x_0) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid f(z) - f(x_0) \geq \langle p, x - x_0 \rangle \quad \forall z \in \mathbb{R}^n\}.$$

Геометрический смысл субградиента $p \in \partial f(x_0)$ следующий: аффинная функция $h(z) = f(x_0) + \langle p, z - x_0 \rangle$ задаёт гиперплоскость, опорную ко множеству $epi\ f$ в точке $(x_0, f(x_0))$, как показано на рисунке 1. Например, в случае, когда выполнено условие $int\ dom$æ$; f \neq \varnothing$, выполнено условие $int\ epi\ f \neq \varnothing$. Любую точку $(x, f(x))$, где $x \in int\ dom\ f$, можно отделить от $epi\ f$ невертикальной гиперплоскостью, откуда получаем, что $\partial f(x) \neq \varnothing$ при всех $x \in int\ dom\ f$. Если $x \notin dom\ f$, то есть $f(x) = +\infty$, то для любого $p \in \mathbb{R}^n$ при $z \in dom\ f$ неравенство в определении 8 не выполняется, и поэтому $\partial f(x) = \varnothing$.

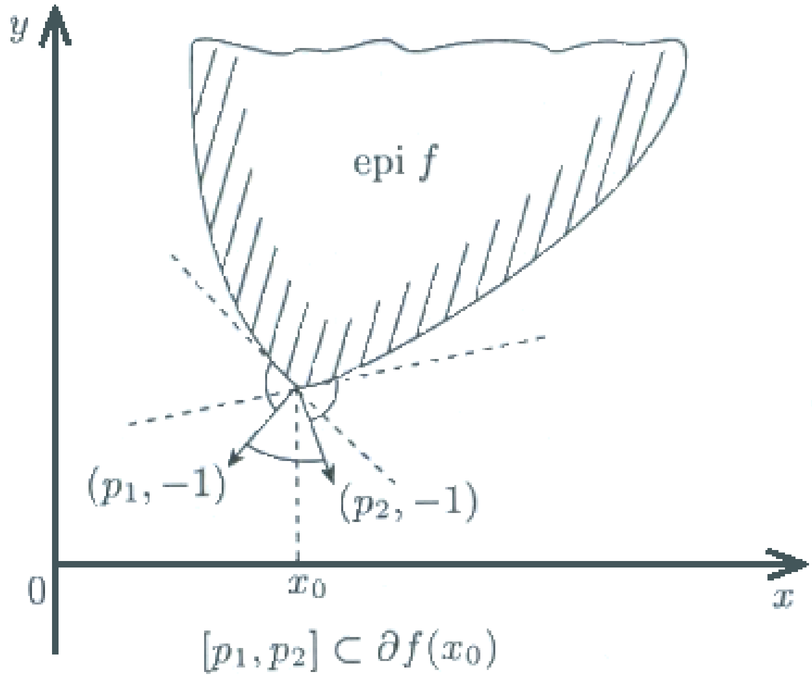

Рисунок 3

Пример 3. Пусть $f(x) = ||x||$ в $\mathbb{R}^n$. Найдем $\partial f(0)$. Субградиентное неравенство принимает вид $||z|| \geq \langle p, z\rangle$, откуда получаем

$$\partial f(0) = \{p \in \mathbb{R}^n | \langle p, z\rangle \leq ||z|| \ \ \forall z \in B(0,1)\} \ \Leftrightarrow \{||z|| \geq \langle p, z\rangle \ \ \forall z\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \{p \in \mathbb{R}^n : \ \langle p, \frac{z}{||z||}\rangle \geq 1 \quad \forall z\} \quad (1)$$

Обозначим через z^0 как $\frac{z}{||z||}$, так как $||z|| = 1$. Тогда

$$\{p \in \mathbb{R}^n : \ \langle p, \frac{z}{||z||}\rangle \geq 1 \quad \forall z\} \Leftrightarrow \{p \in \mathbb{R}^n : \ \langle p, z^0\rangle \geq 1, \ \ ||z|| = 1 \, \forall z\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ||p|| \leq 1 \ \Rightarrow \ \ \partial f(0) = \overline{B}(0,1), \ \text{ где } \ \overline{B}(x_0, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ ||y - x_0|| \leq r\} -$$
$$- \ \text{замкнутый шар с центром в точке } x_0 \text{ и радиусом } r. \quad (2)$$

то есть $\partial f(0)$ есть единичный шар $\overline{B}(0,1)$ из сопряжённого пространства $\mathbb{R}^n$. Если $n = 1$, то $\partial |x|(x_0) = [-1, 1]$.

Следом в работе рассматриваются две фундаментальные теоремы: теорема Дж. Моро, Р. Т. Рокафеллар и теорема А. Я. Дубовицкий А. А. Милютин

Теорема 1. (Дж. Моро, Р. Т. Рокафеллар). Пусть f_1 и $f_2 \ : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ - собственные выпуклые полунепрерывная снизу функции. Тогда

$$\partial(f_1 + f_2)(x) \supset \partial f_1(x) + \partial f_2(x).$$

Если же существует точка $x_0 \in dom f_1 \cap dom f_2$, в которой одна из функций непрерывна, то справедливо равенство

$$\partial(f_1 + f_2)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема 2. (А. Я. Дубовицкий, А. А. Милютин). Пусть выпуклые функции $f_1, f_2 \ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке $x \in \mathbb{R}^n$ и $f_1(x) = f_2(x)$. Тогда

$$\partial(max\{f_1(x), f_2(x)\}) = co(\partial f_1(x) \cup \partial f_2(x)).$$

Далее исследуются основные выпуклые функции и их свойства.

Индикаторная функция выпуклого множества $A \subset \mathbb{R}^n$, определяемая по формуле

$$\delta(x, A) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ x \in A, \\ +\infty, & \text{если } \ x \notin A; \end{cases}$$

Индикаторная функция множества A является выпуклой собственной функцией тогда и только тогда, когда множество A является непустым выпуклым множеством.

Если $x \in A$, то последнее неравенство равносильно $\langle p, z - x\rangle \leq 0 \quad \forall z \in A$, откуда

$$\partial f(x) = \{p \in \mathbb{R}^p | \langle p, z - x\rangle \leq 0 \quad \forall z \in A\} = \{p \in \mathbb{R}^p | \langle p, x\rangle = s(p, A)\},$$

то есть это нормальный конус $N(A, x)$, состоящий из всех опорных функциях ко множеству A в точке x. Если $x \notin A$, то $f(x) = +\infty$ и $\partial f(x) = \varnothing$.

Функция Минковского (Калибр множества) выпуклого множества $A \subset \mathbb{R}^p$, у которого $0 \in inf A$, определяемая по формуле

$$\mu(x, A) = inf\{t > 0 \mid \frac{x}{t} \in A\}, \qquad x \in \mathbb{R}^n;$$

Теорема 3. Пусть $A, D \subset \mathbb{R}^n$ - выпуклые множества, причем $0 \in intA$, $A \subset D$. Тогда имеют место следующие свойства:

1) если множество A ограничено, то $\mu(x, A) > 0$ для всех $x \in E$, $x \neq 0$, $\mu(0, A) = 0$;

2)$\mu(\lambda x, A) = \lambda\mu(x, A) \quad \forall\lambda > 0, x \in \mathbb{R}^n$;

3)$\mu(x + y, A) \leq \mu(x, A) + \mu(y, A) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$;

4)$\mu(x, A) \geq \mu(x, D) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

5)определим множества $B = \{x \mid \mu(x, A) < 1\}$ и $C = \{x \mid \mu(x, A) \leq 1\}$, тогда справедливы включения $B \subset A \subset C$ и равенство $\mu(x, B) = \mu(x, A) = \mu(x, C)\ \ \forall x$, кроме того, $\overline{A} = C$.

Опорная функция множества $A \subset \mathbb{R}^n$, определяемая по формуле

$$s(p, A) = sup\{\langle p, x\rangle \mid x \in A\}, \qquad p \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема 4. Опорная функция непустого множества A является непрерывной снизу, положительно однородной и выпуклой, то есть справедливы следующие соотношения:

1)$s(0, A) = 0$;

2)$s(\lambda p, A) = \lambda s(p, A)\ \ \forall\lambda \geq 0, p \in \mathbb{R}^n$;

3)$s(p_1 + p_2, A) \leq s(p_1, A) + s(p_2, A)\ \ \forall p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$.

Выпуклость является качественной характеристикой, а сильная выпуклость, а тем более r-сильная выпуклость - количественной. Именно для осуществления всевозможных оценок мы вводим понятия сильной выпуклости и r-сильной выпуклости.

Определение 10. Собственная выпуклая функция $f : \mathbb{H} \to \overline{\mathbb{R}}$ называется строго выпуклой, если для любых $x_1, x_2 \in domf$ таких, что $x_1 \neq x_2$, и для любого $\lambda \in (0, 1)$ справедливо строгое неравенство

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Определение 11. Собственная функция $f : \mathbb{H} \to \overline{\mathbb{R}}$ называется сильно выпуклой с константой сильной выпуклости $\rho > 0$, если для любых

$x_1, x_2 \in dom f$ и для любого $\lambda \in (0,1)$ справедливо неравенство

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) - \frac{\rho x}{2}\lambda(1-\lambda)||x_1 - x_2||^2.$$

Всякая сильно выпуклая функция является строго выпуклой.

Определение 12. Положительная функция $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется сильно r-выпуклой функцией с модулем c на отрезке $[a,b]$, если для каждого $x, y \in [a,b]$ и $\lambda \in [0,1]$,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq [\lambda f^r(x) + (1-\lambda) f^r(y)]^{1/r} - c\lambda(1-\lambda)(x-y)^2, \quad r \neq 0, \quad (3)$$

В этом определении, если взять $c = 0$, то получим определение r-выпуклой функции в классическом смысле.

Теорема 5. Пусть $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ - сильно r-выпуклая функция с модулем на отрезке $[a,b]$ с условием $a < b$. Тогда справедливо следующее неравенство для $0 < r \leq 1$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \left(\frac{r}{r+1}\left([f(a)]^r + [f(b)]^r\right)\right)^{1/r} - \frac{c}{6}(a-b)^2 \qquad (4)$$

Заключение. В данной дипломной работе были исследованы выпуклые функции, сильно выпуклые функции и r-сильно выпуклые функции, рассмотрено определение субдифференциала и приведены подсчеты субдифференциала для некоторых основных выпуклых функциях. Отдельно стоит отметить рассмотрение неравенств для r-сильно выпуклых функций и приведение подсчетов функции Минковского для выпуклой оболочки точек.

С касательным пространством связан ряд векторных пространств и алгебр. Мы получаем различные тензорные поля и дифференциальные формы, соответствующим образом гладко сопоставляя точкам многообразия элементы этих пространств и алгебр.

В данной работе мы рассмотрим ряд результатов из полилинейной алгебры, которые применим к многообразиям.

Теория тензорного анализа находит широкое применение при решении разнообразных прикладных задач. Так как различные законы выражаются уравнениями, которые записываются в той или иной системе координат. Но сами законы при этом инварианты, то есть не зависят от систем координат. При этом в разных системах координат один и тот же закон представляется совершенно различными условиями, за которыми часто не видно инвариантной природы этого законы. Именно в решении этой проблемы нам помогает аппарат тензорного анализа, который позволяет работать с координатными представлениями математических, так и физических законов, сохраняя инвариантную терминологию.