

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.
ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математического анализа

**Частные случаи интегрируемости уравнения Лёвнера для
полуплоскости**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы

направления *02.03.01 Математика и компьютерные науки*

механико-математического факультета

Суловой Дарьи Александровны

Научный руководитель

 доцент, к.ф.-м.н.
должность, уч.степень, уч.звание

подпись, дата

 В. Г. Гордиенко
инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой

 и.о.зав.кафедрой, к.ф.-м.н.
должность, уч.степень, уч.звание

подпись, дата

 А. М. Захаров
инициалы, фамилия

Саратов 2021

Введение. В данной дипломной работе были рассмотрены различные примеры управляющих функций. Целью работы является представление некоторых явных примеров, которые могут помочь прояснить поведение кривых, генерируемых уравнением Лёвнера а так же нахождение способа визуализации отображений с использованием программного кода на языке Python. Основными задачами моей дипломной работы являются:

1. Исследование уравнения Лёвнера.
2. Исследование особенностей отображений, удовлетворяющих этому уравнению.

В качестве материалов исследования были рассмотрены статьи зарубежных научных журналов. В первой части данной работы были рассмотрены базовые понятия и определения, а так же теория Лёвнера. Во второй части по пунктам рассмотрены некоторые различные варианты управляющих функций уравнения Лёвнера и описано поведение кривой особенностей в зависимости от типа управляющей функции. В третьей части описывается способ, с помощью которого можно построить разрез на полуплоскости по заданной управляющей функции.

Основное содержание работы. Основным объектом данной работы является уравнение Лёвнера. Это уравнение изучалось чешским математиком Чарльзом Лёвнером. Существует довольно много версий дифференциального уравнения Лёвнера, зависящих от интересующей нас области. Например, существуют версии на круге, верхней полуплоскости, различные кольцевые области и другие, еще более разнообразные. Основное внимание уделено хордовому уравнению Лёвнера, которое является уравнением Лёвнера в верхней полуплоскости.

Случай хордового уравнения Лёвнера можно рассматривать в двух вариантах относительно течения времени:

- В прямом направлении времени;
- В обратном направлении времени.

Прямая версия хордового уравнения Лёвнера представляет собой дифференциальное уравнение, имеющее следующий вид:

$$\frac{dg_t}{dt} = \frac{2}{g_t - \xi(t)}, \quad g_0(t) = z \quad (1)$$

$g_0(z) = z$ - начальное условие.

$\xi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, а область для z является верхней полуплоскостью, обозначаемой $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$. Из теоремы существования и единственности решения дифференциаль-

ных уравнений следует, что каждому $z \in \mathbb{H}$ соответствует некоторый промежуток времени $[0, t_0)$ такой, что существует единственное решение (1).

Теперь посмотрим на уравнение с точки зрения геометрии. Пусть z_0 - такая точка, что знаменатель правой части (1) равен нулю, т.е. $g(t, z_0) = \xi(t)$. В результате производная, $\partial_t g(t, z)$, испытывает сингулярность (особенность) в этой точке. Следовательно, мы можем заключить, что z_0 не входит в нашу область. При определенных условиях на ξ мы можем гарантировать, что множество всех таких точек порождает кривую, берущую своё начало на вещественной оси. Однако кривая может даже быть некоторой областью, в зависимости от функции ξ . Будем обозначать эту кривую γ . В общем случае мы можем рассматривать γ как кривую сингулярности или кривую особенностей. Интересно отметить, что, поскольку ξ вещественно, каждая точка $z \in \gamma$ соответствует вещественнозначной g , поэтому γ отображается на вещественную ось. Схематично этот процесс изображен на рисунке 1.

На рисунке 1 видно, что вертикальная линия после отображения становится горизонтальной линией на вещественной оси.

Поскольку в уравнение (1) мы подставляем разные управляющие

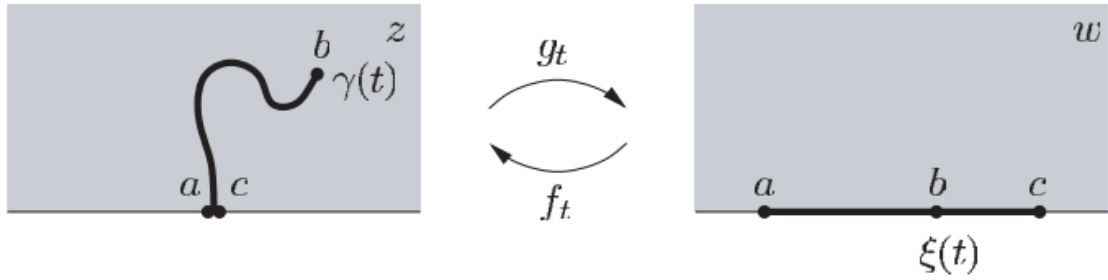


Рис. 1

функции ξ , то мы будем говорить, что ξ порождает $g_t(z)$. Кроме того, ξ часто называют функцией управления.

Для каждого значения t эту функцию можно рассматривать как отображение вида $w = g_t(z)$, которое отображает некоторое связное подмножество верхней полуплоскости z -плоскости, \mathcal{R} , на верхнюю полуплоскость w -плоскости. Соответственно, существует обратная функция $f_t(w)$, которая удовлетворяет равенству $g_t(f_t(w)) = w$ для всех w из верхней полуплоскости. Эта функция отображает область \mathcal{H} из w -плоскости на \mathcal{R} в z -плоскость.

Вблизи бесконечно удаленной точки g_t имеет вид:

$$g_t(z) = z + c(t)/z + O(1/z^2) \quad (2)$$

Коэффициент $c(t)$ называется мощностью полуплоскости является непрерывно возрастающей функцией параметра t . Кроме того, так как $g_0(z) = z$, то $c(0) = 0$. Выгодно параметризовать γ так, чтобы $c(t)$ была линейна по t , поэтому $c(t) = 2t$.

Далее будет рассмотрено несколько известных видов управляющих функций уравнения Лёвнера, при которых уравнение (1) имеет решение.

Для начала описывается самый простой случай, когда управляющая функция равна константе. В первом случае управляющая функция имеет вид

$$\xi(t) = A \quad (3)$$

Решая уравнения относительно g получаем

$$g_t(z) = A + [(z - A)^2 + 4t]^{1/2}. \quad (4)$$

Обратное отображение имеет вид

$$f_t(w) = A + [(w - A)^2 - 4t]^{1/2}. \quad (5)$$

В каждый момент времени t функция g приобретает сингулярность в точке

$$z_c(t) = A + 2it^{1/2} \quad (6)$$

которая отображается посредством функции g_t на точку $\xi(t) = A$ в w -плоскости. Таким образом, сингулярности образуют отрезок прямой, параллельной мнимой оси, и g_t отображает верхнюю полуплоскость с разрезом вдоль этого отрезка на верхнюю полу-

плоскость в w -плоскости.

Далее рассматривается второй случай, когда управляющая функция линейна. В этом случае управляющая функция примет вид

$$\xi(t) = t \quad (7)$$

Явное выражение для полученной траектории можно выразить следующим образом

$$2 \ln r_t - r_t \cos \phi_t = 2 \ln 2 + t - 2 \quad (8a)$$

$$r_t = 2\phi_t / \sin \phi_t. \quad (8b)$$

Здесь ϕ монотонно возрастает во времени от значения $\phi_0 = 0$ до $\phi_\infty = \pi$. С точки зрения параметра ϕ линия сингулярности может быть записана явно, т.е.

$$z_c(t) = 2 - 2\phi_t \cot \phi_t + 2i\phi_t \quad (9)$$

Это показывает, что линия сингулярности ходит в бесконечность, оставаясь в пределах фиксированного расстояния от действительной оси, при этом увеличение её мнимой части заметно замедляется. В следующем случае управляющая функция зависит от времени как функция квадратного корня. Рассматриваются

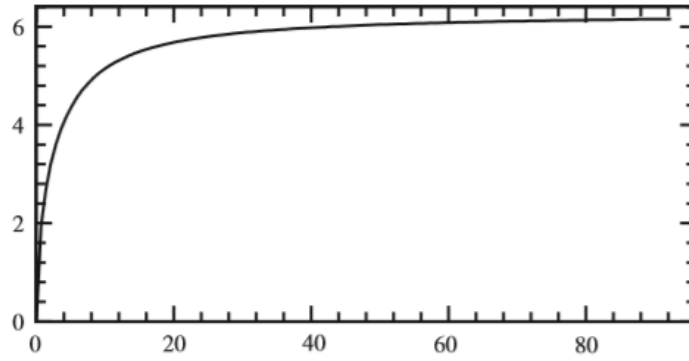


Рис. 2

функции вида

$$\xi(t) = C(1 - t)^\beta, \quad \beta = 1/2 \quad (10a)$$

либо вида

$$\xi(t) = Ct^\beta, \quad \beta = 1/2 \quad (10b)$$

Этот случай подразделяется на два варианта. В первом варианте управляющая функция имеет сингулярность при конечном значении времени, во втором варианте управляющая функция имеет сингулярность при бесконечном значении времени.

При конечном значении времени имеет место

$$\xi(t) = 2[k(1 - t)]^{1/2}, \quad t \leq 1, \quad k \geq 0 \quad (11)$$

При бесконечном значении времени, управляющая функция удовлетворяет следующему

$$\xi(t) = 2[kt]^{1/2}, \quad k \geq 0 \quad (12)$$

Для $k = 0$ эта линия перпендикулярна вещественной оси, однако при $k \rightarrow \infty$ этот угол становится всё меньше и меньше.

При рассмотрении управляющей функции вида (11) с сингулярностью при конечном времени были выявлены следующие результаты. При $k < 4$ кривая сингулярности закручивается в спираль к некоторой точке. В случае при $k > 4$ кривая сингулярности касается вещественной оси под некоторым углом. При $k = 4$ линия касается действительной оси, при $k = 4.5$ линия перпендикулярна ей.

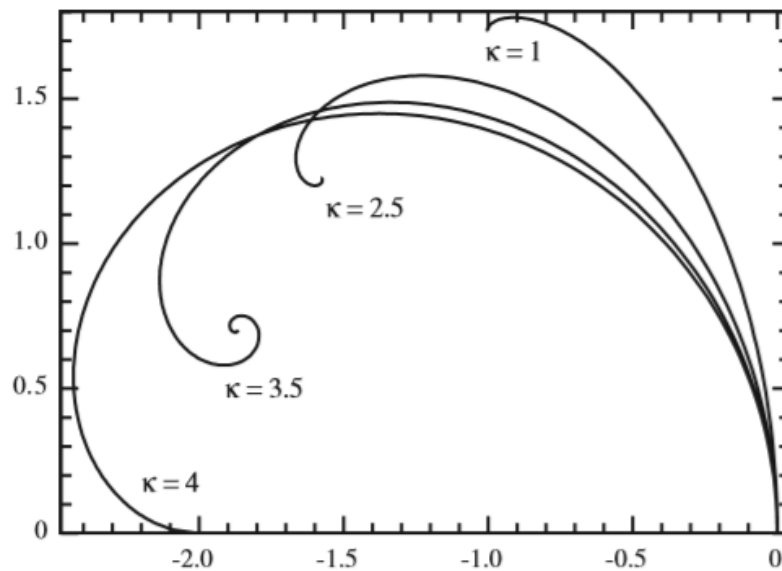


Рис. 3

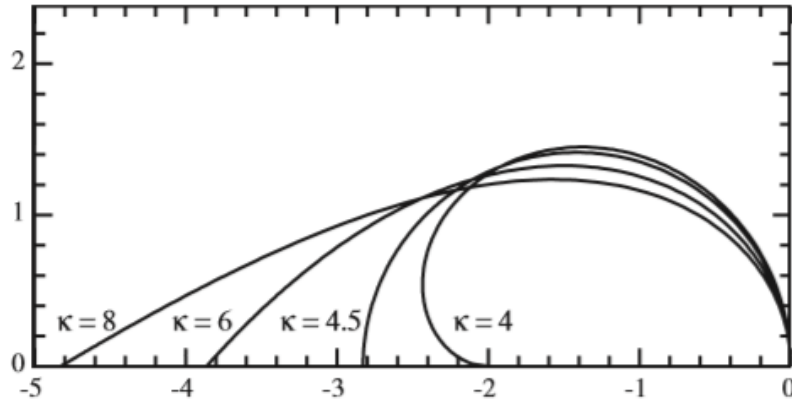


Рис. 4

Так же был рассмотрен случай многозначного управления - это частный случай более общего случая уравнения Левнера

$$\frac{dg_t}{dt} = \int \frac{2}{g_t - x} d\mu_t(x) \quad (13)$$

где μ_t - это мера на вещественной оси, которая может зависеть от времени. Здесь мы будем считать величину μ_t независимой от времени и присвоим массу p_j значениям ξ_j таким, что $\sum_j p_j = 1$. Тогда уравнение для g принимает следующий вид

$$\frac{dg}{dt} = \sum_j \frac{2p_j}{g - \xi_j} \quad (14)$$

Уравнения типа (14) обычно легко интегрируются. Возьмем конкретный случай, когда возможные значения $\xi = \pm 1$, что прини-

мается с равной вероятностью. Тогда уравнение (60) примет вид

$$\frac{dg}{dt} = \frac{2g}{g^2 - 1} \quad (15)$$

который затем интегрируется и получаем

$$g^2/2 - \ln g = 2t + z^2/2 - \ln z. \quad (16)$$

Правая траектория подчиняется следующему равенству

$$z_{c+}(t)^2 - 2 \ln z_{c+}(t) = 1 - 4t \quad (17)$$

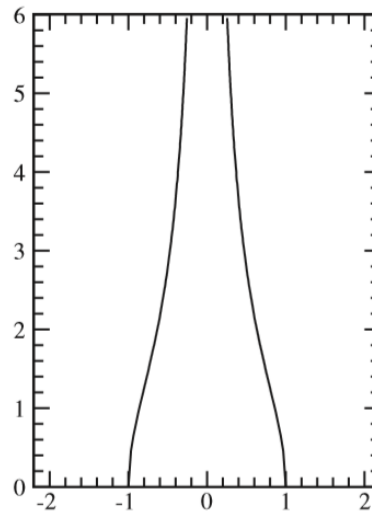


Рис. 5

Мы видим, что, когда траектории движутся вверх, они также сближаются, как показано на рис. 5.

Одной из целей моей работы являлось создание программы, способной по заданной управляющей функции построить линию син-

гулярности. Таким образом, появляется возможность продемонстрировать поведение линии сингулярности для различных видов управляющих функций. Фактически, управляющая функция может быть и таковой, что полученная $\gamma(t)$ может и вовсе не быть кривой. Однако для нашей задачи мы ограничим наше внимание для случаев, когда $\gamma(t)$ является только кривой.

Заключение.

1. В данной дипломной работе было исследовано хордовое уравнение Лёвнера. Основная часть работы посвящена изучению влияния управляющих функций на решения уравнения Лёвнера.
2. Были рассмотрены различные линии сингулярности. Так, были перечислены наиболее часто встречающиеся, а также наиболее интересные примеры управляющих функций.
3. Отдельно стоит отметить алгоритм, рассмотренный в последней главе работы. С помощью изученного алгоритма была создана небольшая программа, с помощью которой можно визуализировать решения уравнения Лёвнера.