МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра информатики и программирования

РАЗРАБОТКА И СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ МЕТОДОВ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И МОНТЕ-КАРЛО ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 441 группы

направления 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Биткова Николая Петровича

Научный руководитель,

проф. кафедры ИиП ,

д. техн. наук ____________ А.С.Фалькович

Зав. кафедрой ИиП,

к.ф.-м.н., доцент _____________ М.В. Огнева

подпись, дата

Саратов 2021

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы

Математической моделью большинства инженерно-технических задач являются краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных. При этом только небольшая часть краевых задач имеет аналитическое решение, то есть такое, которое может быть выражено с помощью некоторых математических функций. На практике часто приходится решать задачи в весьма сложных областях и для уравнений с переменными коэффициентами, зачастую нелинейных. Это приводит к необходимости искать численные решения, выраженные в виде таблицы чисел. Для этого применяются различные численные методы. Эффективным и универсальным методом численного решения задач математической физики является метод конечных разностей (метод сеток), позволяющий сводить приближенное решение уравнений в частных производных к решению систем алгебраических уравнений. Системы алгебраических уравнений при этом формулируются для приближенных значений решения в некотором наборе точек в расчетной области.

Однако метод конечных разностей связан с большими по объему системами алгебраических уравнений. Решить их можно с применением метода Монте-Карло, который заключается в моделировании случайных величин и случайных процессов для проблем, которые в своей исходной постановке вероятностными не являются.

Другим часто используемым численным методом для решения задач математической физики (уравнений в частных производных) является метод конечных элементов (МКЭ). МКЭ позволяет осуществлять эффективное компьютерное моделирование нелинейных физических процессов в областях сложной формы. Популярность метода обусловлена развитием математического аппарата для построения и анализа МКЭ, а также простотой алгоритмизации метода.

Многие стандартные физические процессы, например, стационарное распределение температуры, стационарная диффузия, стационарное течение жидкости, распределение потенциала электростатического поля описываются с помощью уравнения Пуассона.

Цель работы: реализация и сравнение алгоритмов для решения задачи Дирихле методоми Монте-Карло и конечных элементов.

Поставленная цель определила следующие задачи работы:

Изучить теоретические основы решений дифференциальных уравнений в частных производных и методов моделирования случайных процессов;

Реализовать алгоритм для решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона методом сеток с использованием метода Монте-Карло.

Реализовать алгоритм для решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона методом конечных элементов.

Провести сравнительный анализ быстродействия алгоритмов, основанных на этих методах.

Методологические основы методов Монте-Карло и метода конечных элементов представлены в работах Лаврова О. А., Бусленко Н.П., Галлагера Р. и других.

Теоретическая значимость бакалаврской работы.

О важности метода Монте-Карло свидетельствуют многочисленные приложения. Наиболее удачные примеры его использования относятся, как правило, к задачам, допускающим теоретико-вероятностную трактовку. Вопрос о том, насколько целесообразно использовать метод в других случаях, мало изучен. Вместе с тем привлечение рандомизации оказывается важным средством создания алгоритмов с естественным параллелизмом. Тенденция, направленная на создание компьютеров с большим числом процессоров (ядер), обусловливает, таким образом, важность исследования рандомизованных алгоритмов.

Структура и объём работы. Бакалаврская работа состоит из введения, пяти разделов, заключения, списка использованных источников и приложений. Общий объем работы – 61 страница, из них 50 страниц – основное содержание, включая 12 рисунков и 7 таблиц, цифровой носитель в качестве приложения, список использованных источников информации – 20 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первый раздел “основные сведения о задаче Дирихле для уравнения Лапласа” содержит основные сведения о задаче Дирихле для уравнений Лапласа и Пуассона.

Второй раздел “Метод Монте-Карло” содержит описание применения методов Монте-Карло и метода сеток для численного решения задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Пуассона.

Основной принцип построения методов Монте-Карло – сведение задачи к расчету математических ожиданий некоторой специально построенной случайной величины. Для того чтобы приближенно вычислить некоторую скалярную величину a, надо придумать такую случайную величину ξ, что $M\xi = a$; тогда, вычислив N независимых значений $\xi_1, \dots, \xi_N$ величины ξ, можно считать, что $a \approx (1/N)(\xi_1 + \mathrm{K} + \xi_N)$.

Теория методов Монте-Карло для решения линейных краевых задач математической физики в настоящее время достаточно хорошо развита. Обычно задачу сводят к эквивалентному интегральному уравнению. Как известно, интегральные уравнения 2-го рода тесно связаны с цепями Маркова и наиболее распространенные алгоритмы основаны на моделировании N независимых траекторий цепи Маркова, связанной с соответствующим интегральным уравнением условием согласования.

Метод конечных разностей, или метод сеток, в настоящее время является одним из наиболее распространенных методов приближенного решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Суть метода состоит в следующем. Область определения аргументов заменяется конечным множеством точек (узлов), называемым сеткой; вместо функций непрерывного аргумента рассматриваются функции дискретного аргумента, определенные в узлах сетки и называемые сеточными функциями. Производные, входящие в дифференциальное уравнение и граничные условия, заменяются (аппроксимируются) разностными отношениями, т. е. линейными комбинациями значений сеточной функции в некоторых узлах сетки; при этом краевая задача для дифференциального уравнения заменяется системой линейных (если исходная задача была линейной) алгебраических уравнений (разностной схемой). Если полученная таким образом разностная краевая задача разрешима и ее решение при измельчении сетки приближается (сходится) к решению исходной задачи для дифференциального уравнения, то оно и принимается за приближенное решение исходной задачи.

Третий раздел “Метод конечных элементов” содержит основы метода конечных элементов.

Метод конечных элементов первоначально появился в строительной механике, но в последующее десятилетие было установлено, что основные понятия метода могут иметь более широкое применение, и они начали использоваться в ряде других областей. В дальнейшем метод конечных элементов развивался весьма интенсивно, и сейчас он широко применяется во многих научных и инженерных приложениях.

Широкое использование этого метода в значительной мере объясняется простой физической интерпретацией основных его вычислительных операций, большой геометрической гибкостью и применяемостью к широкому классу уравнений в частных производных. В отличие от метода конечных разностей метод конечных элементов обеспечивает единственность приближенного решения дифференциального уравнения во всех точках рассматриваемой области и является значительно более эффективным на практике.

Метод привлекает, прежде всего, общим характером рассматриваемых конструкций, относительной простотой формирования разрешающих уравнений и хорошими численными характеристиками матриц.

Суть метода заключена в его названии. Область, в которой ищется решение дифференциальных уравнений, разбивается на конечное количество подобластей (элементов). В каждом из элементов произвольно выбирается вид аппроксимирующей функции. В простейшем случае это полином первой степени. Вне своего элемента аппроксимирующая функция равна нулю. Значения функций на границах элементов (в узлах) являются решением задачи и заранее неизвестны. Коэффициенты аппроксимирующих функций обычно ищутся из условия равенства значения соседних функций на границах между элементами (в узлах). Затем эти коэффициенты выражаются через значения функций в узлах элементов. Составляется система линейных алгебраических уравнений. Количество уравнений равно количеству неизвестных значений в узлах, на которых ищется решение исходной системы, прямо пропорционально количеству элементов и ограничивается только возможностями ЭВМ. Так как каждый из элементов связан с ограниченным количеством соседних, система линейных алгебраических уравнений имеет разрежённый вид, что существенно упрощает её решение.

Методы конечных элементов и конечных разностей имеют ряд существенных отличий. Метод конечных элементов наиболее часто используется для решения задач с произвольной областью определения функций, таких, как расчет на прочность деталей и узлов строительных конструкций, авиационных и космических аппаратов, тепловой расчет двигателей и т.д.

Четвертый раздел “решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом конечных элементов” содержит описание применений метода конечных элементов к численному решению задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Пуассона. Для случая прямоугольной расчетной области и треугольных конечных элементов в явной форме получена система линейных алгебраических уравнений относительно значений искомой функции в узлах сетки.

В пятом разделе “реализация методов” содержится описание релизованных алгоритмов.

Для генерации случайной величины метода Монте-Карло был использован генератор псевдослучайных чисел стандартного класса Random библиотеки C#.

Псевдо-случайные числа выбираются с равной вероятностью из конечного набора чисел. Выбранные числа не являются полностью случайными, поскольку для их выбора используется математический алгоритм, но они достаточно случайные для практических целей. Текущая реализация Random класса основана на измененной версии алгоритма генератора случайных чисел Дональда Е. Кнута с вычитанием.

Реализованный алгоритм Монте-Карло позволяет находить значение в точке (x,y) для квадратной области, задаваемой координатами x0, x1, y0, y1, с функцией G(x,y) для граней области, дифференциального уравнения с частными производными f(x,y). В методе сеток разбивает область на N частей, ищет среднее значение по M траекторий.

Реализованный алгоритм позволяет находить значение в точке (x,y) для квадратной области, задаваемой координатами x0, x1, y0, y1, с функцией G(x,y) для границ области, решения дифференциального уравнения с частными производными f(x,y). Алгоритм составляет СЛАУ, после чего находит значения в точках, заданных сеткой методом Гаусса.

Далее для двух реализованных алгоритмов были проведены по три испытания для двух методов.

Первое испытание призвано изучить зависимость скорости выполнения программы и точности вычислений от выбранной точки в сетке.

Были получены ожидаемые результаты – метод МКЭ основан на решении СЛАУ и получение значения не зависит от выбранной точки. Метод Монте-Карло основан на случайном блуждании частицы в сетке, потому чем ближе искомая точка к границе сетки, тем быстрее будет получено значение (ценой увеличения погрешности).

Второе испытание призвано изучить зависимость скорости выполнения программы и точности вычислений от количества построенных траекторий в методе Монте-Карло.

Точность метода Монте-Карло повышается с увеличением количества построенных траекторий. Однако с увеличением точности многократно возрастает скорость работы алгоритма, и за равное время МКЭ дает результат на порядки более точный. Тем не менее, при низком количестве траекторий метод Монте-Карло позволяет получить результат гораздо быстрее.

Третье испытание призвано изучить зависимость скорости выполнения программы и точности вычислений от длины шага

Метод МКЭ с уменьшением шага дает более точный результат, но значительно увеличивается скорость выполнения. Метод Монте-Карло замедляется в меньшей степени, но его точность увеличивается незначительно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения работы были изучены теоретические основы решений дифференциальных уравнений в частных производных и методов моделирования случайных процессов.

Был реализован алгоритм для решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона методом сеток с использованием метода Монте-Карло, а так же алгоритм для решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона методом конечных элементов.

Так же был проведен сравнительный анализ быстродействия алгоритмов, основанных на этих методах.

Основные источники информации:

1. Лавров О. А Метод конечных элементов [Электронный ресурс]. URL: http://km.mmf.bsu.by/courses/2014/fem/ScriptFEM_Rus2014.pdf (дата обращения 22.02.2021).
2. Бусленко Н.П., Шрейдер Ю.А. Метод статистических испытаний (Монте-Карло) и его реализация на ЦВМ. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1961. - 228 с.
3. Самарский А.А., Андреев В.Б. – Разностные методы для эллиптических уравнений – М., 1976 г., 352 с.
4. Румянцев А. В. Метод конечных элементов в задачах теплопроводности: Учебное пособие/ Калинингр. ун-т. Калининград, 1995. – 170 с.
5. Бате К. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982 – 448 с.
6. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы – М.: Мир, 1984. – 428 с.
7. Соболь И. М. Численные методы Монте-Карло. – М.:Наука, 1973. – 312 с

8. Ермаков С. М., Товстик Т. М. Метод Монте-Карло для решения систем ОДУ // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 6 (64). Вып. 3. С. 411–421.

9. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 2. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 620 с.

10. Д. Норри, Ж. де Фриз. Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981. 304 с.