

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра информатики и программирования

**ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА  
АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студентки 4 курса 441 группы

направления 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование  
информационных систем

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Искалиевой Лунары Есбулатовной

Научный руководитель:

доцент кафедры ИиП

Е.В. Кудрина

Зав. кафедрой:

к.ф.-м.н., доцент

М.В. Огнева

Саратов 2021

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы.** Задача коммивояжёра относится к задачам дискретной оптимизации. Данную задачу принято считать довольно значимой транспортной задачей. Она заключается в нахождении одного из оптимального маршрута. Коммивояжер, находящийся в своём городе, решает посетить другие города, побывав в каждом городе единожды, и вернуться обратно, причём общая длина всего пути должна быть кратчайшей.

В качестве линейного программирования задача коммивояжёра является наиболее изученной на сегодняшний день. Известно достаточно большое количество программных реализаций различных алгоритмов данной задачи, написанных на большом множестве языков, обеспечивающих наглядное представление о механизме их работы с возможностью модификаций. Однако большинство из этих решений не позволяют вносить изменения в исходные данные или реализуемые методы.

Актуальность темы данной работы обусловлена тем, что несмотря на наличие большого количества уже известных алгоритмов решения задачи коммивояжера, существует необходимость в дальнейшей реализации и улучшении алгоритмов для поиска наилучшего результата, поскольку применение её на практике в различных областях является одним из способов экономии ресурсов. На данный момент задача коммивояжера применяется для решения таких проблем как: распределение общественного транспорта города, планирование маршрутов перевозки груза, оптимизацию конвейерного производства и т.п.

**Цель бакалаврской работы** – исследование методов решения задачи коммивояжера.

Поставленная цель определила **следующие задачи:**

1. Рассмотреть постановку задачи коммивояжера.
2. Изучить точные, приближенные, эвристические и метаэвристические методы решения задачи коммивояжёра.

3. Реализовать некоторые изученные методы решения задачи коммивояжера на языке C# в среде Visual Studio.
4. Провести серию экспериментов по использованию данных методов для решения задачи коммивояжера для различных значений  $n$ .
5. Проанализировать данные, полученные в ходе экспериментов.

**Методологические основы** методов решения задачи коммивояжера представлены в работах Мудров В. [1], Асанов М.О. [2], Колесников А.В., Кириков И.А., Листопад С.В., Румовская С.Б., Доманицкий А.А. [3], Ермоленко С.В. [4], Борознов В.О. [5].

**Практическая значимость бакалаврской работы.** Полученные результаты позволили определить, какую оптимальность имеет каждый из методов, какие существуют преимущества и недостатки и реализация каких алгоритмов приемлема для решения задачи коммивояжера.

**Структура и объём работы.** Бакалаврская работа состоит из введения, 2 разделов, заключения, списка использованных источников и 5 приложений. Общий объём работы – 64 страниц, из них 45 страниц – основное содержание, включая 6 рисунков и 5 таблиц, цифровой носитель в качестве приложения, список использованных источников информации – 21 наименований.

## **КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

**Первый раздел «Задача коммивояжера и существующие способы её решения»** посвящен постановке задачи коммивояжера, рассмотрению основных понятий теории графов, математической модели графа, обзору методов решения задачи коммивояжера.

Формулировка задачи коммивояжера заключается в поиске кратчайшего маршрута, проходящего по всем городам ровно по одному разу и возвращающегося в изначальный пункт. Данная формулировка совпадает с математической формулировкой задачи Гамильтона. Таким образом, задача сводится к нахождению минимального гамильтонова цикла в полном

рёберно-взвешенном неориентированном графе с  $N$  вершинами. Поскольку именно у такого графа может быть найден гамильтонов цикл наименьшей длины.

В данной работе подробно рассмотрены методы ветвей и границ, имитации отжига и муравьиный алгоритм. Подобные методы были выбраны в качестве представителей методов различных групп с низкой теоретической сложностью алгоритмов. Именно ввиду такого выбора можно будет сделать выводы о достоинствах и недостатках алгоритмов, их эффективности и входных данных, на которых каждый из алгоритмов наиболее выгоден.

Метод ветвей и границ относится к точным методам и имеет следующую оценку сложности –  $O(n * \log_2 n)$ , где  $n$  – количество городов.

Метод имитации отжига является эвристическим методом и имеет сложность  $O(n^2 * \log_2 n)$ , где  $n$  – количество городов.

Муравьиный алгоритм относится к метаэвристическим методам с оценкой сложности  $O(t * m * n^2)$ , где  $n$  рассматривается количество городов,  $m$  – численность популяции,  $t$  – количество совершенных итераций.

Метод ветвей и границ – это развитие алгоритма полного перебора с последовательным отсеком решений, невыгодных для задачи. Данный метод рассматривают как один из комбинаторных методов, суть которого заключается в рассмотрении всевозможных вариантов и в выявлении только тех, которые являются лучшими по некоторым признакам. Идея данного метода сводится к последовательному разбиению множества решений посредством ветвления и нахождения оценок (границ). Существует два способа ветвления, в зависимости от которых определяются нижние оценки. Это делается для того, чтобы исключать неподходящие нам варианты целыми классами. Метод ветвей и границ сохраняет положительные свойства полного перебора, однако при больших значениях  $N$  его использование всё ещё неэффективно.

Метод имитации отжига имеет некую аналогию с процессом кристаллизации металлов. для получения кристаллической структуры металл

сначала нагревают до определенного состояния, а затем медленно охлаждают. Поскольку любой металл обладает кристаллической решеткой, которая описывает положение атомов в веществе, совокупность всех позиций атомов и будет являться маршрутом. Данный метод имеет несколько функций: функцию температуры, которая выступает в качестве выбора двух городов и инверсии маршрутов между ними, функцию, определяющую энергию для оптимизации, собственно находящую решение и функцию состояний, определяющую все маршруты. Поскольку эти алгоритмы имеют склонность к заикливанию на локальном минимуме и выдаче его за оптимальное решение, существует необходимость временами повышать энергию системы.

Муравьиный алгоритм получил своё название за сходство с муравьиной колонией. В основе муравьиного алгоритма лежит вероятностный подход к поиску оптимального пути, однако имеют большое значение дополнительные критерии. Суть муравьиного алгоритма заключается в имитировании поведения муравьёв, за счёт их способности быстро находить кратчайший путь от муравейника к источнику пищи и легко адаптироваться к изменяющимся условиям, находя другой кратчайший путь.

Муравьи взаимодействуют друг с другом за счет специального вещества – феромона. Это специальные железы позволяют сигнализировать другим особям предпочтительность движения. Но поскольку феромон имеет свойство испаряться, то это означает, что муравьи будут искать и другие пути, а из этого следует, что найденное решение гарантированно не будет единственным. Если же провести аналогию с задачей коммивояжера, то можно сравнить рёбра с возможными маршрутами перемещения муравьёв, а наиболее обогащенный путь по ребрам – будет решением задачи.

Данный алгоритм является эффективным алгоритмом для решения задачи коммивояжера. Он работает лучше, чем другие генетические алгоритмы. И в отличие от них, данный алгоритм опирается на память обо всей колонии вместо памяти только о предыдущем поколении. Он может

легко использоваться в динамических приложениях, поскольку адаптируется к изменениям расстояний. Касаясь недостатков, можно сказать, что муравьиный алгоритм сильно зависит от настроечных параметров, которые подбираются только исходя из экспериментов. Также, часто при решении необходимо пользоваться дополнительными методами такими, как локальный поиск. От сходимости тоже невозможно избавиться. Исследование решения задачи является скорее экспериментальным, нежели теоретическим.

**Второй раздел «Программная реализация методов решения задачи коммивояжера»** посвящен реализации методов ветвей и границ, имитации отжига и муравьиного алгоритма на языке C#, проведению ряда экспериментов на случайных графах, и анализу данных, полученных в ходе экспериментов.

Рассмотрим результаты эксперимента на графе, имеющем 5 вершин. Случайная матрица расстояний представлена в таблице 1.

Таблица 1. Случайная матрица расстояний для 5 вершин

inf	2	4	1	7
9	inf	6	5	9
2	9	inf	3	4
8	5	9	inf	1
5	1	1	2	inf

Результаты представлены в таблице 2.

Таблица 2. Результаты работ алгоритма ветвей и границ, метода имитации отжига и муравьиного алгоритма

Метод	Путь	Стоимость	Время работы
Метод ветвей и границ	(0,1,3,4,2,0)	11	0 мс
Метод имитации отжига	(2,0,1,3,4,2)	11	1 мс

Муравьиный алгоритм	(3,4,1,2,0,3)	11	2 мс
---------------------	---------------	----	------

Все три алгоритма нашли решение. К тому же найденные решения метода имитации отжига и муравьиного алгоритма являются точными, поскольку они совпадают с решением точного метода, метода ветвей и границ. Что касается времени выполнения алгоритмов, то можно сказать, что на графах с размерностью 5 лучше использовать метод ветвей и границ, так как он не только находит точное решение задачи, но и выдаёт его за минимальное количество времени. Методу имитации отжига потребовалась 1 мс, чтобы решить данную задачу. Время выполнения муравьиного алгоритма напрямую зависит от входных дополнительных параметров таких, как количество муравьёв, количество феромонов, максимальное время жизни колонии, фактор влияния феромона и т.д. Именно поэтому его нахождение решения затрачивает больше времени.

Также был проведён сравнительный анализ времени выполнения и точности результатов алгоритма ветвей и границ, метода имитации отжига и муравьиного алгоритма для разных значений  $N$ , которые задаются с помощью случайной матрицы расстояний, где расстояния между вершинами представлены в диапазоне от 1 до 20. Для метода имитации отжига в качестве входных данных были определены следующие параметры: начальная температура ( $initialTemperature = 10$ ) и конечная температура ( $endTemperature = 0,00001$ ). Для муравьиного алгоритма: количество муравьёв ( $numAnts = 10$ ), фактор влияния феромона ( $alpha = 3$ ), влияние расстояния соседнего узла ( $beta = 2$ ), фактор увеличения феромона ( $Q = 2.0$ ) и коэффициент испарения феромона ( $rho = 0.5$ ).

Вычислительные эксперименты проводились на персональном компьютере со следующими характеристиками: процессор Intel(R) Core(TM) i7-7700HQ CPU @2.80 GHz. Количество ядер 4, количество потоков 8. Результаты анализа представлены в таблице 3.

Таблица 3. Время выполнения метода ветвей и границ, имитации отжига и муравьиного

Количество вершин	Метод ветвей и границ		Метод имитации отжига		Муравьиный алгоритм	
	Стоимость	Время, мс	Стоимость	Время, мс	Стоимость	Время, мс
5	11	0	11	1	11	2
15	28	3	38	1	48	11
25	52	885	74	1	75	303
35	63	1245	90	3	114	941
45	93	4760	134	23	153	2268
55	-	-	114	25	157	4087
65	-	-	163	29	202	10436
75	-	-	229	31	290	11854
85	-	-	208	35	330	15000

Проведённые эксперименты дали следующие результаты. Их можно разделить на три особенности: время выполнения, корректность результатов, количество и сложность кода.

#### 1. Время выполнения

В вычислениях малого количества графов (до 15) лучшим оказался метод ветвей и границ. Несмотря на то, что с помощью данного метода мы получаем точные результаты, он также быстрее других находит эти результаты. Время, потраченное им на выполнения задачи почти в 8 раз меньше по сравнению с муравьиным алгоритмом. Но также можно заметить, что данный метод неразумно использовать для 45 и выше вершин (городов). Для 46 вершин результат так и не удалось получить.

Самым быстрым алгоритмом оказался метод имитации отжига. Поскольку метод отжига относится к эвристическим методам, его вычислительная эффективность во много раз превосходит точные методы. И



за счет модифицируемости имитационного отжига есть возможность добиваться большей эффективности в сравнении с муравьиным алгоритмом.

Как мы можем заметить, что на 85 вершинах время, затраченное им на выполнение задачи в много раз меньше по сравнению с муравьиным алгоритмом.

## 2. Количество и сложность кода

Если сравнить коды на количество строк, то меньше строк понадобилось для описания метода имитации отжига. Вторым по количеству кода был метод ветвей и границ отжига. Непростым в написании кода получился муравьиный алгоритм.

## 3. Корректность результата

Что касается корректности результата, то здесь алгоритмы можно рассматривать следующим образом. Поскольку метод ветвей и границ является точным методом, имеется возможность сравнивать решения других алгоритмов с ним.

Таким образом, из таблицы видно, что метод имитации отжига и муравьиный алгоритм находят не самые точные решения уже на 15 вершинах. Отклонение результата растёт в зависимости от количества вершин. Однако данные методы дают хоть какой-то результат на больших графах.

Поскольку на 55 вершинах не удалось найти точное решение, сравнительный анализ можно было проводить только между методом имитации отжига и муравьиным алгоритмом. Но даже здесь заметно, что метод имитации отжига находит более оптимальное решение.

Подобное отклонение результата муравьиного алгоритма в данном случае, зависит как от дополнительных входных данных, так и от разработчика кода.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что метод ветвей и границ находит быстрое и точное решение, но его лучше использовать лишь на

небольших графах. Так как по мере увеличения количества вершин, его временные затраты изменяются согласно теоретической оценке.

В случаи рассмотрения графов больших размерностей, целесообразней использовать метод имитации отжига. Несмотря на то, что его решение имеет значительное отклонение от точного, работает данный метод за очень краткое время.

Что касается муравьиного алгоритма, то в той реализации, в которой он представлен в данной работе, его не стоит использовать, поскольку отклонение его решения неприемлемо.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В ходе выполнения выпускной квалификационной работы бакалавра все цели и задачи выполнены. Были рассмотрены и изучены основные методы решения задачи коммивояжера и выявлены наиболее подходящие из них для реализации и анализа. На основе данного анализа получены области эффективного действия различных алгоритмов. Были выявлены плюсы и минусы методов в сравнении между собой. Как и было написано в теории лучшим точным методом оказался метод ветвей и границ, а лучшим методом для больших размерностей оказался метод имитации отжига. Муравьиный алгоритм не следует использовать из-за неприемлемого отклонения от точного результата.

В процессе выполнения выпускной квалификационной работы был проведен ряд экспериментов на случайных графах, измерено время выполнения методов решения задачи коммивояжера и затраченные ресурсы памяти. Проведенный сравнительный анализ по показателям эффективности позволил определить, какую оптимальность имеет каждый из методов, какие у них преимущества и недостатки.

Реальные прикладные задачи порождают все новые и новые задачи оптимизации, причем их сложность растет. Требуются новые математические модели и методы, которые учитывают наличие многих критериев, проводят

глобальный поиск оптимума. Современные методы оптимизации далеко не всегда справляются с решением реальных задач без помощи человека. Поэтому следует и дальше развивать математический аппарат оптимизации.

### **Основные источники информации:**

1. Мудров В. Задача о коммивояжере : учеб.пособие / В. Мудров — М.: «Знание», 1969. — 66 с. (постановка задачи)
2. Асанов М.О., Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы / М.О. Асанов, В.А. Баранский, В.В. Расин — СПб. : Лань, 2010. — 368 с. (постановка задачи)
3. Колесников А.В., Кириков И.А., Листопад С.В., Румовская С.Б., Доманицкий А.А. Решение сложных задач коммивояжера методами функциональных гибридных интеллектуальных систем / Под ред. А.В. Колесникова. – М.: ИПИ РАН, 2011. – 295 с., ил. – ISBN 978-5-902030-88-1
4. Ермоленко С.В. Исследования решения задачи коммивояжера с помощью островной модели / С.В. Ермоленко, В. Г. Кобак // Электронный журнал «Молодой исследователь Дона». – Ростов-на-Дону. – 2016. – №3. – 7 с.]
5. Борознов В.О., Исследование решения задачи коммивояжера // [Журнал] Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 2. С. 147-151.