МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра информатики и программирования

СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ АДАМСА И ГИРА ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 441 группы
направления 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Бугаева Никиты Александровича

Научный руководитель ____________ Андрейченко Д.К.

д.ф.-м.н.

Зав.кафедрой МОВКИС

д.ф.-м.н. ____________ Андрейченко Д.К.

Саратов 2021

ВВЕДЕНИЕ

Комбинированными динамическими системами называют связанные посредством граничных условий и условий связи системы обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Подобные системы уравнений представляют собой динамическое поведение объектов с сосредоточенными по пространству параметрами, а уравнения в частных производных моделируют динамику объектов с распределёнными по пространству параметрами. Производя численное моделирование процессов в нелинейных комбинированных динамических системах в большинстве случаев производится дискретизация по независимым координатам модельных уравнений в частных производных на основе проекционного метода Галёркина, результат которого сводится к численному решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Одними из самых известных вариантов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений можно считать метод Адамса и метод Гира. Неочевидным является ответ на вопрос о выборе метода численного интегрирования ОДУ, так как в конечном счете хотелось бы иметь наиболее эффективный алгоритм, позволяющий обработать большие системы дифференциальных уравнений в самые кратчайшие сроки.

Независимость вычисления скалярных произведений в проецированном методе Галёркина гарантирует возможность распараллелить алгоритм вычисления правых частей F(t, Y) обыкновенных дифференциальных уравнений.

В общем случае, время выполнения типовой операции – заполнения отдельного столбца матрицы Якоби – может оказаться существенно различным для различных столбцов матрицы из-за использования адаптивных алгоритмов численного анализа, выделения и освобождения блоков оперативной памяти и т.д., что требует динамической балансировки вычислительной нагрузки. Стандартными средствами для этого может служить либо динамическое распределение отдельных итераций параллельного цикла, либо явное создание набора независимо выполняющихся задач.

Цель бакалаврской работы - разработка и сравнение эффективности методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений Адамса и Гира на основе языка программирования C++ и стандартных средств технологии параллельного программирования OpenMP.

Поставленная цель определила **следующие задачи**:

1. Обзор основных методов Адамса и Гира для численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений;

2. Разработка последовательных и параллельных алгоритмов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений на основе метода Гира и многошагового метода Адамса с помощью технологий C++ и OpenMP;

3. Оценивание работоспособности разработанных алгоритмов на основе вычислительных экспериментов.

Методологические основы. Методы Адамса и Гира численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений представлены в работах Андрейченко Д.К., Эндрюс, Г.Р. и Ротач, В. Я.

Теоретическая и/или практическая значимость бакалаврской работы.

В ходе выполнения практической части бакалаврской работы были разработаны и реализованы последовательные и параллельные алгоритмы численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений на основе метода Гира и многошагового метода Адамса и произведено сравнение разработанных алгоритмов на основе вычислительных экспериментов, из результатов которого можно определить наиболее предпочтительный метод численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Структура и объём работы. Бакалаврская работа состоит из введения, 3 разделов, заключения, списка использованных источников и 4 приложений.

Общий объем работы – 58 страниц, из них 40 страниц – основное содержание, включая 4 рисунка и 1 таблицу, список использованных источников информации – 22 наименования.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первый раздел «Динамические комбинированные системы и распараллеливание с помощью алгоритма численного моделирования» посвящен описанию комбинированных динамических систем, дискретизации их модельных уравнений, а также теории методов Адамса и Гира численного интегрирования ОДУ.

Комбинированные динамические системы представляют собой системы связанных посредством граничных условий и условий связи обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных при соответствующих начальных условиях и служат математическими моделями ряда современных технических систем [1-3]. Элементы получаемой в результате вектор-функции y(t) являются набором обобщенных координат и обобщенных скоростей объектов с сосредоточенными по пространству параметрами (или некоторое его подмножество).

В случае, когда стоит задача выполнить численное моделирование КДС имеет место произвести дискретизацию уравнений в частных производных по независимым переменным r, используя возможные варианты проекционного метода Галёркина для замены с необходимой точностью модельных уравнений КДС системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученная в результате замены модельных уравнений КДС система обыкновенных дифференциальных уравнений в последствии будет интегрироваться численно.

Программная реализация «жестко устойчивых» методов численного интегрирования несет в себе наибольшие временные затраты, которые происходят в следствие вычисления матрицы Якоби правых частей системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Так как скалярные произведения проекционного метода Галеркина вычисляются параллельно, есть возможность реализовать независимое вычисление правых частей обыкновенных дифференциальных уравнений, которые были получены в результате дискретизации КДС. В это же время, параллельное вычисление скалярных произведений метода Галеркина приводит к достаточно большому количеству вычислительных операций и, возможно, операций перераспределения памяти. В связи с этим, время вычисления различных столбцов матрицы Якоби может оказаться различным.

вычисление столбцов матрицы Якоби возможно реализовать независимо, т.е. параллельно. Из этого следует, что в данном ситуации более приемлемо распараллелить алгоритм по принципу «портфель задач» [4]. Следовательно, последующий подсчет каждого столбца матрицы можно распределить по независимым друг от друга задачам, которые в свою очередь формируют определенный набор задач. Задачи из данный набора выполняются на свободных в определенный момент времени ядрах или процессорах в порядке очереди параллельно. Например, одна из самых эффективных технологий на симметричных мультипроцессорных системах параллельного программирования OpenMP имеет возможность выполнять пользователю функции, например, языка C++, в независимых потоках OpenMP. В этом случае код отдельных задач и функций C++, обязан быть потоково-безопасным.

Второй раздел «Программное управление движением плоского двухзвенного манипулятора» посвящен описанию регуляторов, применяемых в практической части.

Перед постановкой и выполнением будущей задачи, будет полезно ввести понятие регулятора. Регулятором называется устройство, следящее за состоянием объекта управления как системы и вырабатывает для неё управляющие сигналы [5]. Регуляторы предназначены для того, чтобы следить за переменой некоторых параметров объекта управления и обращают внимание на их изменение с помощью некоторых алгоритмов управления в соответствии с заданным качеством управления. Регуляторы в большинстве своем работают по принципу отрицательной обратной связи с целью компенсировать внешние возмущения, действующие на объект управления и отработать заданный извне или заложенный в системе закон управления (программу).

Третий раздел «Программная реализация методов Адамса и Гира» посвящен реализации и сравнению эффективности методов Адамса и Гира численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для численного моделирования была разработана программа с использованием компиляторов Microsoft Visual C++ 2019. Для решения систем линейных уравнений и факторизации разреженных матриц использовались стандартная функция LAPACK из состава пробной версии библиотек поддержки высокопроизводительных вычислений Intel MKL. В качестве объектно-ориентированного интерфейса для функции LAPACK использовалась свободно распространяемая библиотека LAPACK++. При численной реализации «жестко» устойчивого методов Гира и Адамса для численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений использовались стандартные функции свободно распространяемой библиотеки ODEPack. Головной модуль программы представляет собой графическое приложение для ОС Windows на основе стандартных библиотек пользовательского интерфейса Windows Form. В качестве источников и приёмников данных использовались электронные книги Microsoft Excel.

Дискретизация по пространственной переменной ξ модельных уравнений нелинейных колебаний упругих звеньев манипулятора выполнялась на основе проекционного метода Галеркина в предположении

$$u_y(\xi,t)=\sum_{n=0}^{N_j+4} u_{y_n}(t)T_n\,(2\xi/\ell_j-1)$$

$$Q_1(\xi,t)=\sum_{n=0}^{N_j+2} Q_{1_n}(t)T_n\,(2\xi/\ell_j-1)$$

$$T_n(x)=cos(\,n\,arccos\,x),j=1{,}2,\ell_1=1$$

При этом уравнения сводились к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\boldsymbol{Y}}=\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{Y})$$

относительно набора величин для манипулятора с ПИД-регуляторами

$$\boldsymbol{Y}=\Big(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,u_{c_{y_1}}^{(2)},u_{c_{y_3}}^{(4)},\dot{\alpha}_1,\dot{\alpha}_2,\dot{\alpha}_3,\dot{\alpha}_4,\dot{u}_{c_{y_1}}^{(2)},u_{c_{y_3}}^{(4)},u_{y_0}^{(1)},u_{y_1}^{(1)},\dots,u_{y_{N_1}}^{(1)},\dot{u}_{y_0}^{(1)},\dot{u}_{y_1}^{(1)},\dots,\dot{u}_{y_{N_1}}^{(1)},u_{y_0}^{(2)},u_{y_1}^{(2)},\dots,u_{y_{N_2}}^{(2)},\dot{u}_{y_0}^{(2)},\dot{u}_{y_1}^{(2)},\dots,\dot{u}_{y_{N_2}}^{(2)},M_0^{(R)},M_1^{(R)},\int_0^t(\alpha_1(\eta)-x_1(\eta))d\eta\,,\int_0^t(\alpha_3(\eta)-x_2(\eta))d\eta\Big)^T$$

Далее система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений интегрировалась численно методами Гира и Адамса соответственно, реализованными в свободно распространяемом пакете ODEPack.

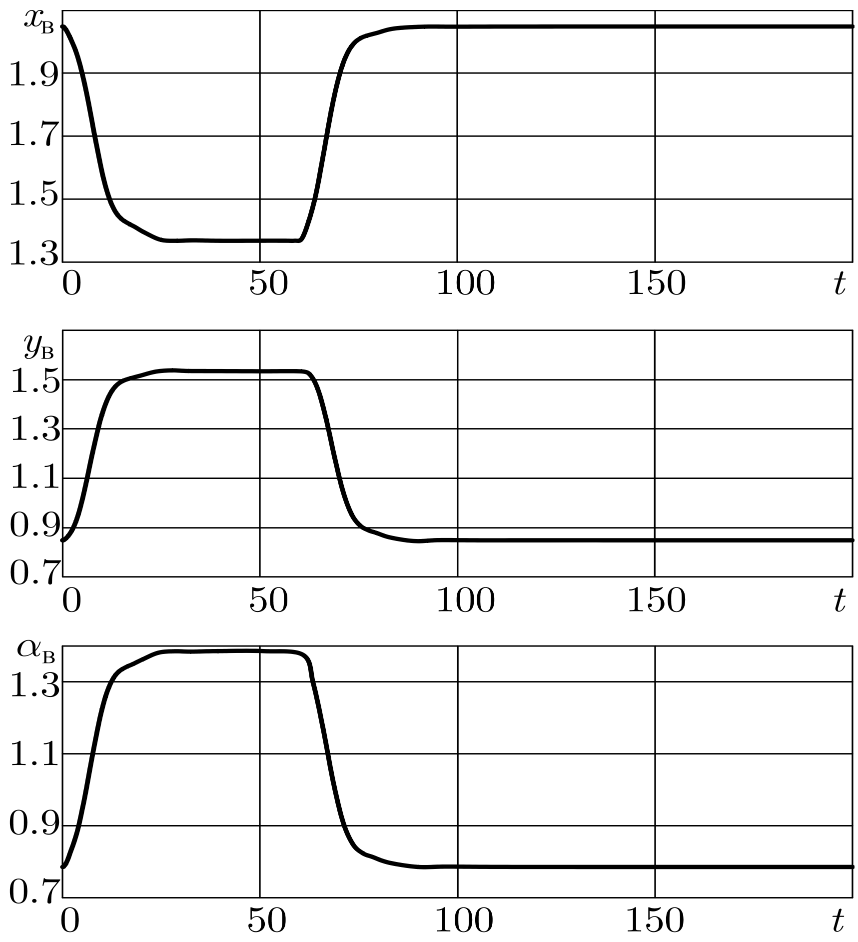

Рисунок 4. Результаты моделирования координат манипулятора с ПИД-регуляторами

Данные в таблице 1 характеризуют эффективность метода Гира и возможность распараллеливания вычислений на основе предложенного алгоритма при решении задачи численного моделирования управляемого движения манипулятора на компьютере с процессором Xeon E5 2630 в зависимости от числа $N_1 = N_2 = N$ слагаемых. В таблице указано время выполнения алгоритма Адамса в последовательном исполнении и алгоритма Гира в последовательном и параллельном исполнениях.

Таблица 1. Результаты работы методов Гира и Адамса

N_1=N_2	Adams Serial	Gere Serial	Gere Threaded
10	9,421	3,251	1,841
	10,262	3,53	1,882

	9,73	3,81	1,125
	9,631	3,421	1,621
	9,961	3,92	1,426
15	14,732	6,621	3,812
	14,032	7,325	2,931
	15,5645	6,75	3,421
	18,464	7,41	2,55
	19,3232	7,51	4,578
20	30,393	10,171	4,571
	31,6216	12,62	5,186
	31,751	12,88	5,276
	32,721	12,72	5,852
	32,932	10,529	7,961
25	76,921	26,21	8,751
	78,932	20,621	10,612
	77,124	23,585	8,921
	70,721	25,421	9,75
	71,762	23,923	8,528
30	80,896	39,71	12,518
	86,931	35,321	13,529
	84,632	35,721	14,732

	85,632	34,442	9,082
	84,582	35,628	12,721
35	140,632	55,721	19,582
	145,581	54,967	20,561
	146,721	45,62	14,691
	155,123	58,203	18,521
	154,721	56,051	19,42
40	240,57	80,452	23,532
	241,793	81,961	21,521
	244,961	79,215	21,821
	239,172	80,823	19,589
	245,272	75,952	20,517
50	311,8321	93,521	29,976
	306,25	90,59	27,663
	308,456	87,4	29,234
	305,4326	97,215	29,356
	307,72	97,582	28,921

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения выпускной квалификационной работы бакалавра были решены все поставленные задачи, в частности изучены основные методы численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, разработаны и реализованы последовательные и параллельные алгоритмы численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений на основе метода Гира и многошагового метода Адамса и произведено сравнение разработанных алгоритмов на основе вычислительных экспериментов.

Из результатов проделанной работы можно сделать вывод, что при постановке задачи численного моделирования переходных процессов в нелинейных комбинированных динамических системах и последующем применении методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, более предпочтительным является метод Гира в силу большей скорости, эффективности своей работы и возможности распараллеливания.

Основные источники информации:

1. Андрейченко, Д.К., Андрейченко, К.П. Динамический анализ и выбор параметров модели гироскопического интегратора линейных ускорений с плавающей платформой// Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 4. С. 76-89.

2. Андрейченко, Д.К., Андрейченко, К.П. К теории устойчивости цилиндрического гидродинамического подвеса// Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2009. №1. С. 13-26.

3. Андрейченко, Д.К., Андрейченко, К.П. К теории автономных систем угловой стабилизации реактивных снарядов залпового огня// Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 3. С. 141-156.

4. Эндрюс, Г.Р. Основы многопоточного, параллельного и распределённого программирования / Г.Р. Эндрюс; под ред. А. Б. Ставровского. М.; СПб.; Киев : Вильямс, 2003. 505 с.

5. Ротач, В. Я. Теория автоматического управления. / В. Я. Ротач. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательский дом МЭИ, 2008. — 396 с., ил.