МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Линейные представления и характеры конечных групп

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 227 группы
направления 02.04.01 – Математика и компьютерные науки
код и наименование направления
механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

Абдалла Карван Радха Абдалла
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

профессор, д.ф.-м. н., доцент		А.Н. Сергеев
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Зав. кафедрой

к.ф.-м.н., доцент		С.В. Галаев
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2021

1. Введение

Теория *представлений групп* занимается классификацией гомоморфизмов абстрактной группы G в группы линейных преобразований или группы матриц. В этой работе развивается теория представлений конечных групп в конечномерных векторных пространствах. Поле K над которым определены векторные пространства часто (не всегда) принимается за комплексные числа. Математическая трактовка находится на уровне между теорией представлений для физиков и теорией представлений для специалистов-математиков.

1.1. Актуальность темы исследования

Симметрическая группа является классическом объектом исследование в математике, поэтому любые новые результате в этой области является актуальным.

1.2. Цели и задачи работы

Цель: Рассмотреть возможность нахождения получения новых подходов для получения симметризатора Юнга для симметрической группы.

Задачи:

1. Изучить основные положения теории представления;

2. Изучить основные положения симметрической группы S_n;

3. Изучить неприводимые представления симметрической группы S_n основываясь на технике симметризаторов Юнга.

1.3. Содержание работы

В первом разделе первой главы мы вводим основные определения теории представлений групп и приводим примеры для их иллюстрации. Теория представлений конечных абелевых групп излагается полностью, А еще мы говорим о характерах представлений, лемме Шура и т.д.

Во второй главе мы изучаем неприводимые представления симметрической группы S_n основываясь на технике симметризаторов Юнга.

В третьей главе рассматривается новый взгляд на получение симметризатора Юнга для симметрической группе.

1.4. Методы исследования

Методы теории представления.

1.5. Апробация работы

Я сделал доклад по этой работе на студенческой конференции.

2. Основные результаты работы

Выпускная работа посвящена изучению возможностей исследование нового метода получения симметризатора Юнга для симметрической группы.

Здесь я строю еще один аналог симметризаторов Юнга, а также аналоги модулей Шпехта.

По поводу общего понятия полунормального представления (см. [R] в список источнике). В этом работе я сформулирую его для S_k в удобных терминах (см. [Ov]).

Пусть S_k- симметрическая группа на k символах, $e_{ij} \in S_k$ транспозиция. Элементы Юциса — Мёрфи определяются следующим образом (см. [Jul], [Mu]):

$$x_1 = 0,\ x_2 = e_{12},\ x_3 = e_{13} + e_{23}, \cdots,\ x_k = e_{1k} + e_{2k} + \cdots + e_{k-1,k}.$$

Теорема 2.1. *([Mu], [OV], [R]). Пусть $S^\lambda-$ неприводимое представление S_k, соответствующее разбиению λ. Тогда в S^λ существует общее собственный базис для элементов Юциса — Мёрфи $x_1, \cdots, x_k$; базис может быть проиндексирован элементами $\mathcal{T}(\lambda)$ следующим образом:*

$$x_p v_\Lambda = c_\Lambda(p) v_\Lambda, \quad \text{для всех } \Lambda \in \mathcal{T}(\lambda) \text{ и } 1 \le p \le k.$$

Пусть Λ_c будет таблицей Юнга формы λ, последовательно заполненной вдоль столбцов (отсюда и нижний индекс) слева направо. Набор

$$\kappa_{\Lambda_c} = \prod_{i=1}^{k} (j - x_i), \tag{1}$$

где $j-$ номер столбца, занятого i. Поскольку элементы $x_1, \cdots, x_k$ попарно коммутируют, порядок множителей в (1) не имеет значения.

Теорема 2.2. *Пусть $S^\mu-$ неприводимое представление S_k соответствует разбиению μ из k. Тогда*

i) $\kappa_{\Lambda_c}(S^\mu) = 0$ если $\mu > \Lambda_c$;

ii) $\kappa_{\Lambda_c}(v_\Lambda) = 0$ если $\Lambda_c \ne \Lambda$ для $\Lambda \in \mathcal{T}(\lambda)$ и базисные векторы v_{Λ_c}, как в теореме 2.1;

iii) $\kappa_{\Lambda_c}(v_{\Lambda_c}) = 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n} v_{\Lambda_c}$, где $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n$ ненулевые целые числа разбиения λ.

Лемма 2.3. *Пусть $p < k$ и S_p рассматривается как подгруппа группы S_k, сохраняющая все символы, кроме первых p. Пусть $U - S_k-$ модуль, $\varepsilon-$ нетривиальное одномерное представление и $b = \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma)\sigma$, где $\varepsilon(\sigma)$ Обозначает знак(sign) σ. Пусть $v \in U-$ нулевой вектор, фиксированный транспозиция e_{lk} для $l \leq p$. Тогда*

$$b(\sum_{i \in S_p} e_{ik})v = bv.$$

Следствие 2.4. *Пусть R_{Λ_c}, и $C_{\Lambda_c}-$ стабилизаторы строки и столбца таблицы Λ_c; пусть $U-S_k-$модуль, а $v \in U-$ ненулевой $R_{\Lambda_c}-$инвариантный вектор. Набор $b_{\Lambda_c} = \sum_{\sigma \in C_{\Lambda_c}} \varepsilon(\sigma)\sigma$. Тогда $\kappa_{\Lambda_c} v = b_{\Lambda_c} v$.*

Таким образом, если $v = \sum_{\sigma \in R_{\Lambda_c}} \sigma = a_{\Lambda_c}$, то

$$c_{\Lambda_c} = b_{\Lambda_c} a_{\Lambda_c} = \kappa_{\Lambda_c} a_{\Lambda_c},$$

т.е. мы выразили симметризатор Юнга c_{Λ_c} как $\kappa_{\Lambda_c} a_{\Lambda_c}$.

2.1. Общие сведения о линейных представлениях и Характеры представлений

2.2. Общие сведения о линейных представлениях

В этом параграфе мы излагаем общие свойства линейных представлений конечных групп и вводим основные определения теории представлений групп и приводим примеры для их иллюстрации. Теория представлений конечных абелевых групп излагается полностью.

2.3. Характеры представлений

В математике, точнее в теории групп, характер представления группы - это функция группы, которая связывает с каждым элементом группы след соответствующей матрицы. Персонаж несет в себе важную информацию о репрезентации в более сжатой форме. Символы неприводимых представлений кодируют многие важные свойства группы и, таким образом, могут использоваться для изучения ее структуры. Теория характеров - важный инструмент классификации конечных простых групп. А еще мы говорим о лемме Шура, соотношении ортогональности для характеров и т.д.

2.4. Неприводимые представления симметрической группы S_n над $\mathbb{C}$

Во этой главе мы изучаем неприводимые представления симметрической группы S_n основываясь на технике симметризаторов Юнга.

Симметрическая группа S_n имеет порядок $n!$. Его *классы сопряженности* помечены *разбиениями* n. Следовательно, согласно теории представлений конечной группы, количество неэквивалентных *неприводимых представлений* над комплексными числами равно количеству разбиений n. В отличие от общей ситуации для конечных групп, на самом деле существует естественный способ параметризации неприводимых представлений тем же набором, который параметризует классы сопряженности, а именно разбиением n или, что эквивалентно, *диаграмм Юнга* размера n.

Каждое такое неприводимое представление может быть реализовано над целыми числами (каждая перестановка действует матрицей с целыми коэффициентами); он может быть явно построен путем вычисления *симметризаторов Юнга*, действующих в пространстве, порожденном *таблицами Юнга* формы, заданной диаграммой Юнга.

Симметризатор Юнга - это элемент групповой алгебры симметрической группы, построенный таким образом, что для гомоморфизма групповой алгебры эндоморфизмы векторного пространства V^n, полученное в результате действия S_n на V^n путем перестановки индексов, образ эндоморфизма, определяемого этим элементом, соответствует неприводимому представлению симметрической группы над комплексными числами. Подобная конструкция работает над любым полем, и полученные представления называются *модулями Шпехта.*

2.5. Симметризатор Юнга

В третий главе рассматривается новый взгляд на получение симметризатора Юнга который был разработан новый метод получения симметризатора Юнга для симметрической группы.

3. Заключение

Основной целью производственной (преддипломной) практики являлась комплексная подготовка к защите выпускной магистерской работы.

Задачами практики были:

1. Подготовить текст выпускной магистерской работы.
2. Подготовить автореферат выпускной магистерской работы.
3. Подготовить презентацию доклада защиты выпускной магистерской работы.

Были получены навыки систематизации данных, оформление работ по определенному правилу, а так же отработка знаний, которые были необходимы для подготовки приложения магистерской работы.

Список литературы

[1] Jucys A., Symmetric polynomials and th center of the symmetric group ring, Report Math. Phys. 5, 1974, 107-112. MR **54**:7597

[2] Jucys A., Factorization of Young's projection operators for symmetric groups, Litovsk. Fiz. Sb. 5, 1971, 1-10. MR **44**:7851

[3] Macdonald I., *Symmetric function and Hall polynomials,* Oxford Univ. Press, 1995. MR **96h**:05207

[4] Murphy G., A new construction of the Young seminormal representation of the symmetric group, J. Algebra 69, 1981, 287-291. MR **82h**:20014

[5] Okunkov A. and Vershik A., A new approach to representation theory of symmetric groups. Selecta Math., new series, 2, no. 4, 1996, 581-605. MR **99g**:20024

[6] Penkov I., Characters of typical irreducible representation of finite dimensional $\mathfrak{q}(n)-$modules (Russian), Funktsional. Anal. i Prilozhen. 20, no. 1, 1986, 37-45. MR **87j**:17033

[7] Ram A., Seminormal representation of Weyl groups and Iwahori-Hecke algebras, Proc. London Math. Soc. (3), 75, 1997, 99-133. MR 98d:20007

[8] Weyl H., Classical groups, their invariants and representations, Princeton Univ. Press, Princeton, 1939 MR **1**:42c