МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Уравнения Полубариновой-Галина в задаче Хеле-Шоу

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 227 группы

направления 02.04.01 – ***Математика и компьютерные науки***

механико-математического факультета

Шаровой Ольги Сергеевны

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н., доцент		Разумовская Е.В.
должность, уч.степень, уч.звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой

и.о.зав. каф., к.ф.-м.н.		Захаров А.М.
должность, уч.степень, уч.звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2021

Введение. В 40-х годах П.Я. Полубаринова-Кочина [2] и П.П. Куфарев [3] исследовали задачу об эволюции нефтяной залежи определенной геометрической формы, окруженной водой, в результате откачки нефти из скважины, расположенной внутри залежи. Полученное,эволюционное уравнение впоследствии изучалось П.П. Куфаревым и Ю.П Виноградовым [1] путем сведения к подходящему интегральному уравнению. В зависимости от параметров эволюционного уравнения, задача Хеле-Шоу имеет различные физические интерпретации, самые распространенные из которых: забор нефти из пористых сред, закачивание вязкой жидкости в плоскопараллельный слой, заполненный другой вязкой жидкостью, отыскание оптимального расположения источника закачки в данной полимерообразующей форме и другие задачи гидродинамики. Родственная задача возникает в случае сдавливания капли вязкой жидкости заданной начальной конфигурации двумя параллельными плоскостями (так называемая squeezing problem), а так же в случае прессовки мягких материалов, в электрохимическом машиностроении, в процессе роста кристаллов и в других эволюционных моделях. В своей простейшей форме, когда вязкость внешней среды (воздуха) и поверхностное натяжение на границе раздела сред пренебрежимо малы, уравнение Хеле-Шоу приводит к изучению решений уравнений, близких по качественной структуре к уравнению Левнера-Куфарева [4] вариационной теории однолистных конформных отображений. По этой причине уравнение Хеле-Шоу тесно связано с теорией однолистных функций в единичном круге, в особенности с той ее частью, которая касается структурных свойств различных подклассов однолистных функций, а также вариационных задач для соответствующих функционалов. Нелинейный характер данных проблем приводит к необходимости использования самых разных методов современного анализа, от с классических методов длины и площади, конформных инвариантов (модули семейств кривых, емкости и т.д.), симметризации, и заканчивая методами теории оптимального управления, функционального анализа на гильбертовых пространствах (теория де Бранжа) и др. Особенно следует отметить, что самые глубокие и мощные методы возникали в связи с различными геометрическими интерпретациями задач теории функций и были развиты и систематизированы в известной монографии Г.М. Голузина [4] и в ряде работ других авторов. Важные результаты в геометрической теории конечнолистных функций в разное время были получены И.А. Александровым, Л. Бибербахом, де Бранжем, В.Я. Гутлянским, Дж. Дженкинсом, В.В. Дубининым, Г.В. Кузьминой, П.П. Куфаревым, Н.А. Лебедевым, К. Левнером, Д.В. Прохоровым, П.М. Тамразовым, У. Хейманом и другими российскими и зарубежными математиками.

Магистерская работа состоит из введения, двух глав (разбитых на параграфы с подчиненной нумерацией), библиографии и изложена на 59 страницах. Нумерация формул и утверждений подчинена соответствующей главе и не зависит от параграфов. Библиография работы содержит 24 наименования. При проведении вычислительного эксперимента для построения графиков использовалась система Geogebra. Охарактеризуем кратко содержание работы в целом.

Первая глава работы носит подготовительный характер. В параграфе 1.1 рассматривается физическая модель для уравнения Хеле-Шоу и определяются соответствующие формулировки задач (A) и (B). Данные задачи являются по существу эквивалентными .В параграфе 1.2 вводится определение $*$-оператора (соответствующее логарифмической производной), которое играет ключевую роль во многих априорных оценках решений уравнения Хеле-Шоу, а также доказываются некоторые его вспомогательные свойства. Параграф 1.3 посвящен свойствам оператора Шварца, восстанавливающего голоморфную функцию в единичном круге по значениям ее действительной части на единичной окружности. В параграфе 1.4 напоминается определение функции Шварца данной жордановой дуги и описывается его связь с уравнением Хеле-Шоу и комплексными моментами эволюционного семейства. Здесь же доказывается предложение 1.4 о свойстве $*$-оператора функции Шварца.

Ключевыми для получения многих априорных оценок, установленных в работе, являются результаты параграфа 1.5. Используя принцип максимума для субгармонических функций и специальные свойства оператора Шварца, доказанные в предыдущих параграфах, получается оценка на мнимую часть оператора Шварца (оператор сопряжения) в случае, когда его аргументом является след на единичной окружности модуля некоторой голоморфной в единичном круге функции.

Основное исследование изложим во второй главе данной работы - изучим конкретные аспекты уравнения Полубариновой-Галина, которые описывают эволюции простой связной вязкой капли Хеле-Шоу в комплексной плоскости, управляемой источником или стоком в конечной точке, близкой к $z = 0$. Построение второй части работы следующее: в пункте 2.1 содержится все необходимые факты и обозначения. В пункте 2.2 получены динамические уравнения для нулей и полюсов $g(\zeta, t)$.

Основное содержание работы. Поток Хеле-Шоу возникает, когда несжимаемая вязкая жидкость движется достаточно медленно, будучи зажатой между двумя параллельными горизонтальными плоскостями, расположенными на расстоянии, пренебрежимо малом, по сравнению с размерами начальной конфигурации жидкости.

Классическим решением задачи Хеле-Шоу с конечным числом источников и стоков $\{z_1, ..., z_n\} \equiv \Pi$ с предписанными мощностями будем считать семейство областей $\Omega(t), t \in [0, b) \subset R^1$, для которых найдется дважды непрерывно дифферецируемая всюду в $\overline{(\Omega(t)}\backslash\Pi) \times [0; b)$ функция $\Phi(z, t)$, удовлетворяющая эволюционным уравнениям

$$(1) \Delta\Phi \equiv 0, z \in \Omega(t), t \in [0, b),$$

$$(2) \Phi(z, t) = 0, z \in \partial\Omega(t) t \in [0, b),$$

$$(3) \Phi(z, t) = \phi(z, t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{2\pi} ln|z - z_j|, z \in \Omega(t),$$

$$(4) \frac{\partial\Phi}{\partial t} = |\nabla\Phi(z, t)|^2, z \in \partial\Omega(t) \in [0, b),$$

для некоторой непрерывной в $\Omega(t)$ гармонической функции $\phi(t)$.

Считаем, что у нас имеется только один источник и дадим две эквивалентных формулировки задачи Хеле-Шоу

Задача (A). Для данного отображения $w_0(z) \in O(\overline{U})$ найти $t > 0$ и семейство $w(z; t)$, где $w(z; t) \in O(\overline{U})$ для любого $t \in [0; b)$ и $w(z; 0) = w_0(z)$ таких,, что $w(z; t)$ непрерывно дифференцируема по t и для всех $(z; t) \in$

$\partial U \times [0;b)$ выполнено

$$Re\left(\overline{\frac{\partial w}{\partial t}}(z;t)\cdot\frac{\partial w}{\partial z}(z;t)\cdot z\right)=\hat{q},\hat{q}^2=1.$$

-Уравнение Полубариновой-Галина

Задача (B). Для данного начального отображения $w_0(z)\in O(\overline{U})$ семейство голоморфных функций $w(z;t)$ таких что $w(z;t)$ непрерывно дифференцируема по $t, t\in[0;b)$, называется классическим решением задачи Хеле-Шоу с начальной областью $\Omega_0\equiv w(U;0)=w_0(U)$, если

(a) $w(z;t)\in O(\overline{U})$ для любого $t\in[0;b)$ и $w(z;0)=w_0(z)$;

(b) для $w(z;t)$ выполнено

$$w(0)=0;w'(0)>0.$$

(c) имеет место интегро-дифференциальное соотношение

$$w'_t(z;t)=zw'_z(z;t)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{|w'_z(e^{i\theta};t)|^2}\cdot\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\theta.$$

для любого $z\in U$ и $t\in[0;b)$. -Уравнение Куфарева-Виноградова

$$w^*(z)\equiv\frac{zw'_z(z)}{w(z)}.$$

Отметим следующие простые свойства $w^*(z)$.

Предложение 1.2.1. Пусть $w(z)$ и $u(z)$ — голоморфные функции в единичном круге, не принимающие нулевых значений. Тогда

1. $(w(z)u(z))^*=w^*(z)+u^*(z)$;
2. $\left(\frac{w(z)}{u(z)}\right)^*=w^*(z)-u^*(z)$;
3. для любого $\alpha\in R(w^\alpha(z))^*=\alpha w^*(z)$;
4. $(az)^*=1$ для любого $a\in C$;
5. если определена композиция $w(u(z))$, то $(w(u(z)))^*=w^*(u(z))\cdot u^*(z)$;
6. $w'^*(z)=w^{**}+w^*(z)-1$.

Пусть $u = u(e^{i\theta})$ — некоторая дифференцируемая функция, заданная на единичной окружности ∂U. Через

$$S_u(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(\theta; t) \cdot \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta \tag{1}$$

будем обозначать оператор Шварца.

Следующий результат является обобщением известной теоремы Ричардсона о линейности по времени нулевого момента (так называемой "теоремы о площади").

Теорема 1. Площадь сектора $\Omega_t(\zeta_1, \zeta_2)$ растет линейно по t:

$$|\Omega_t(\zeta_1, \zeta_2)| = (\theta_2 - \theta_1) \cdot t.$$

Определение 1.4.1. Пусть γ — простая (возможно замкнутая) аналитическая дуга Жордана на комплексной плоскости. Говорят, что некоторая функция $g(z)$, голоморфная в трубчатой окрестности дуги γ, является ее функцией Шварца, если для $\forall z \in \gamma$ выполнено $g(z) = \overline{z}$. Будем также предполагать, что функция Шварца рассматривается как свое максимальное аналитическое продолжение на комплексную плоскость.

Лемма 1.5.1. Пусть $u(z)$ — гармоническая в круге $\overline{U}$ функция и $\phi(z)$ — некоторая аналитическая в $\overline{U}$ функция. Предположим, что выполнено равенство

$$u(e^{i\theta}) = |\phi(e^{i\theta})| \tag{2}$$

для всех $\theta \in [0; 2\pi]$. Тогда имеет место

$$\frac{\partial u}{\partial r}(re^{i\theta}) \bigg|_{r=1} \leq \frac{\partial}{\partial r} |\phi(re^{i\theta})| \bigg|_{r=1}. \tag{3}$$

Обазначим $g(\zeta, t) = f'(\zeta, t)$ и введём функцию "делителя" ("дивизора") $g(\zeta, t)$ следующим образом:

$$(g) = \sum_{k=1}^{m} 1 \cdot (\omega_k) - \sum_{j=1}^{n} 1 \cdot (\zeta_j) - (m - n) \cdot (\infty).$$

Если $g(\zeta, t)$ рациональная

$$g(\zeta, t) = b(t)\frac{\prod_{k=1}^{m}(\zeta - \omega_k(t))}{\prod_{j=1}^{n}(\zeta - \zeta_j(t))} = b(t)\frac{\prod_{i=1}^{m}(\zeta - \omega_i(t))}{\prod_{j=1}^{l}(\zeta - \zeta_j(t))^{n_j}}$$

то $f(\zeta, t)$представимо в виде

$$f(\zeta, t) = \sum_{j=1}^{l} e_j log(\zeta - \zeta_j(t)) + \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{n_j-1}\frac{c_{jk}(t)}{(\zeta - \zeta_j(t))^k} + \sum_{k=0}^{m-n+1} d_k(t)\zeta^k.$$

Теорема 2.2.1 Эволюция дивизора (g) в потоке Хеле-Шоу, управляемом уравнением Лёвнера-Куфарева $\dot{f}(\zeta, t) = \zeta f'(\zeta, t)P(\zeta, t)(\zeta \in U)$ определяется дифференциальными уравнениями

$$\dot{\omega}_k(t) = -Res_{\zeta=\omega_k}\left[\zeta P(\zeta, t)\frac{g'(\zeta, t)}{g(\zeta, t)}\right]$$

$$\dot{\zeta}_j(t) = Res_{\zeta=\zeta_j}\left[\zeta P(\zeta, t)\frac{g'(\zeta, t)}{g(\zeta, t)}\right]$$

для случая, когда $\omega_k(\zeta_j)$ является простым нулем (полюсом) соответственно $g(\zeta, t)$.

Если ω_k кратный нуль, пусть $\omega_l = \omega_k$ для l из множества индексов $K \subset \{1, 2, ..., m\}$ (содержащие k), то $\dot{\omega}_k(t)$ может не существовать, но вместо этого

$$\frac{d}{dt}\sum_{l\in K}\omega_l(t) = -Res_{\zeta=\omega_k}\left[\zeta P(\zeta, t)\frac{g'(\zeta, t)}{g(\zeta, t)}\right]$$

Для кратных полюсов $\dot{\zeta}_j(t)$ действительно существует и

$$\eta_j\dot{\zeta}_j(t) = Res_{\zeta=\zeta_j}\left[\zeta P(\zeta, t)\frac{g'(\zeta, t)}{g(\zeta, t)}\right]$$

для $1 \le j \le l$

Теорема 2.2.2

В случае простых нулей мы имеем следующую рациональную динамику

$$-\frac{d}{dt}log\omega_k = A_0 + \frac{2A_k}{\omega_k} + \sum_{j=1, j\neq k}^{m} \frac{2(A_k + A_j)}{\omega_k - \omega_j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{2A_k}{\omega_k - \zeta_j},$$

$$-\frac{d}{dt}log\zeta_j = A_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{2A_k}{\zeta_j - \omega_k},$$

$$-\frac{dlogb}{dt} = (m-n+1)A_0,$$

где A_j удовлетворяет

$$\lim_{\zeta\to\infty} \frac{q(t)}{g(\zeta,t)g^*(\zeta,t)} = A_\infty = \begin{cases} \frac{q\prod_{j=1}^{n}\overline{\zeta_j}}{|b|^2\prod_{j=1}^{m}\overline{\omega_j}} = \frac{q}{ba_1} & \text{if m=n,} \\ 0 & \text{if } m > n \end{cases}$$

$$A_k = \frac{q(t)}{g'(\omega_k,t)g^*(\omega_k,T)} = \frac{q}{|b|^2} \cdot \frac{\prod_j(\omega_k - \zeta_j)\prod_j\overline{(\omega_k^* - \zeta_j)}}{\prod_{j\neq k}(\omega_k - \omega_j)\prod_j\overline{(\omega_k^* - \omega_j)}}$$

$$A_0 = A_\infty + \sum_{j=1}^{m} \frac{A_j}{\omega_j}.$$

Теорема 2.2.3

В случае простых нулей

$$\frac{d}{dt}log\omega_k = P^*(\omega_k,t) - \frac{2A_k}{\omega_k}\left(1 + \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{1-\overline{\omega}_j\omega_k} - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1-\overline{\zeta}_j\omega_k}\right)$$

$$\frac{d}{dt}log\zeta_j = P^*(\zeta_j,t)$$

Заключение. В результате работы над предложенной темой были рассмотрены следующие задачи:

а) исследованы методами комплексного анализа эволюционные семейства нестационарных однофазных задач математической физики со свободными границами, описывающими динамику ячейки вязкой жидкости ХелеШоу;

б) рассмотрена физическая модель для уравнения Хеле-Шоу и определены соответствующие формулировки задач;

в) получена оценка на мнимую часть оператора Шварца (оператор сопряжения) в случае, когда его аргументом является след на единичной окружности модуля некоторой голоморфной в единичном круге функции;

г) изучены конкретные аспекты уравнения Полубариновой-Галина, которые описывают эволюции простой связной вязкой капли Хеле-Шоу в комплексной плоскости, управляемой источником или стоком в конечной точке, близкой к $z = 0$;

д) получены более точные оценки скорости и местоположения полюсов уравнения Полубариновой-Галина.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. . Виноградов, Ю.П.; Куфарев П.П., Об одной задаче фильтрации / Ю.П. Виноградов, П.П. Куфарев Прикл. матем. и мех. - 1948. - Т. 12. - С. 181-198.

2. Полубаринова-Кочина, П.Я. К вопросу о перемещении контура нефтеносности / П.Я.Полубаринова-Кочина, -Докл. Акад. Наук СССР. - 1945. - Т. XLVH, N 4. - С. 254-257.

3. Куфарев, П.П. Решение задачи о контуре нефтеносности для круга / П.П. Куфарев, -Докл. Акад. Наук СССР. - 1948. - Т. LX, N 8. - С. 1333-1334.

4. Голузин, Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного./Г.М. Голузин, -М.: Наука, 1966, 628 С.