МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Бесконечные произведения типа Бляшке в классах И.И.Привалова

Автореферат магистерской работы

студентки 2 курса 227 группы

направления ***02.04.01 Математика и компьютерные науки***

механико-математического факультета

Кустовой Виктории Андреевны

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., профессор ______________________ Ф. А. Шамоян
подпись, дата

Заведующий кафедрой
и.о. зав. каф., к.ф.-м.н. ______________________ А. М. Захаров
подпись, дата

Саратов 2021

Введение. Хорошо известно, что теория классов и пространств аналитических функций занимает особое место в комплексном анализе и её многочисленных приложениях. Методы разработанные в этих разделах комплексного анализа имеют плодотворные приложения в функциональном анализе, в теории вероятности и математической статистике и других разделах математики. Для подтверждении этого достаточно отметить монографии [1] [2].

Основные разделы данной магистерской работы посвящены свойствам инвариантности этих классов относительно оператора дифференцирования.

В комплексном анализе известна следующая гипотеза Блоха-Неванлинны, сформулированная в явном виде Р. Неванлинна ещё в 1929 году. В ней предполагалось, что класс N инвариантен относительно оператора дифференцирования. Первый пример опровергающий эту гипотезу был построен в работе Фростмана, построившего произведение Бляшке $B(z, z_k)$, производная которого не принадлежит классу N, при этом замыкание нулей совпадает со всей граничной окружности.

В связи с этой работой возник естественный вопрос: для каких произведений Бляшке $B(z, z_k)$ производная $n-$ого порядка принадлежит классу N? Оказывается, что в терминах предельных точек множества нулей на единичной окружности T, можно получить довольно полную характеристику таких произведений,производная которых принадлежащих не только N, но и Π_q при всех $0 < q < +\infty$. Магистерская работа состоит из 2-х глав и приложения.

Первая глава имеет 4 основных параграфа и носит вспомогательный характер. В ней изложим основные определения и докажем теоремы, касающиеся свойств бесконечного произведения и произведения типа Бляшке. В параграфах 1.3 и 1.4 мы излагаем принадлежность произвольного произведения Бляшке классам Харди H^p и классам Бергмана B^p.

Основное исследование изложим во второй главе данной работы, часть опубликована в статье журнала "Сибирские электронные математические известия"в соавторстве с научным руководителем- Шамояном Ф.А. и доцентом кафедры математического анализа, алгебры и геометрии ФГБОУ ВО «Брян-

---

[1]Nikolskii, N.K. Operators, functions, and systems an easy reading - American Mathematical Society. Mathematical surveys and monographs – v. 92-93, New York, 2002, pp 470

[2]Dym,H., McKean, Henry P. Gaussian Processes, Function Theory, and the Inverse Spectral Problem - New York, 1976, pp 262

ский государственный университет имени академика И.Г. Петровского»- Беднаж В.А. Она состоит из 3-х параграфов. Собственное исследование предоставлено во 3-м параграфе. В нем докажем основную теорему работы.

В приложении предоставим программный код, который позволяет считать предел произведения типа Бляшке при вещественных коэффициентах.

Основное содержание работы. Если $0 < |z_n| < 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, и бесконечное произведение

$$\prod_1^\infty \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n z}$$

сходится для $|z| < 1$, то оно представляет некоторую функцию, аналитическую в единичном круге; она называется *произведением Бляшке.* Можно даже допустить равенство конечного числа чисел z_n нулю - просто в этом случае множители, соответствующие $\frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n z}$, заменяются на z.

Теорема 1. $\prod\limits_n \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n z}$ сходится в $\{|z| < 1\}$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_n (1 - |z_n|) < \infty$.

Рассмотрим производную произведения Бляшке в H^p и B^p.

Пусть $U-$ открытый единичный круг в комплексной плоскости. Класс Харди H^p $(0 < p < \infty)$ состоит из всех функций, аналитических в U, для которых

$$||f||^p_{H^p} = \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt$$

конечна. Класс B^p $(0 < p < 1)$ состоит из всех функций, аналитических в U, для которых

$$||f||_{B^p} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} |f(re^{it})|(1 - r)^{1/p-2} dt dr$$

конечна.

Теорема 2. *Пусть $b-$ произведение Бляшке с нулями a_n такое, что*

$$\sum_n (1 - |a_n|)^\alpha < \infty$$

для некоторых α $(0 < \alpha < 1)$. *Тогда* $b' \in B^{1/(1+\alpha)}$.

Теперь покажем, что для каждого $p < 1$, существует бесконечное произведение Бляшке с производной в H^p.

Теорема 3. *Пусть* $b-$ *произведение Бляшке с нулями* $\{a_n\}$ *такое, что*

$$\sum_n (1 - |a_n|)^\alpha < \infty$$

для некоторых α $(0 < \alpha < 1/2)$. *Тогда* $b' \in H^{1-\alpha}$.

Пусть $\mathbb{C}$ - комплексная плоскость, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ - единичный круг на $\mathbb{C}$, $H(D)$ - множество всех функций, аналитических в D.

При всех $0 < q < +\infty$ определим класс И.И. Привалова

$$\Pi_q = \{f \in H(D) : \sup_{0 \leqslant r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |f(re^{i\varphi})|\right)^p d\varphi < +\infty\}.$$

Класс Π_q при $q > 1$ рассмотрен в монографии И.И. Привалова [3].

Очевидно, что класс Π_1 совпадает с классом функции ограниченного вида N в единичном круге D, то есть с классом Р. Неванлинна в D.

Основной результат работы заключается в доказательстве следующей теоремы:

Теорема 4. *Пусть* $\{z_k\}_1^\infty$ *последовательность точек из единичного круга* D, *удовлетворяющая условию Бляшке, то есть*

$$\sum_1^\infty (1 - |z_k|) < +\infty, \tag{2.3.1}$$

E *- множество предельных точек последовательности* $\{z_k\}_1^\infty$ *на единичной окружности.* $\{e^{i\alpha_k} e^{i\beta_k}\}_{k=1}^\infty$ *- последовательность дополнительных дуг*

[3]Privalov, I.I. Boundary properties of single-valued analytic function - Ed. Moscow State University, 1941, p.206

множества E на T. Тогда если

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k-\alpha_k)\ln^q\frac{1}{\beta_k-\alpha_k}<+\infty,$$

где $z_n = r_n e^{i\theta_n}$, $n = 1,2,\dots$ и количество точек в каждом интервале (α_k,β_k), $k=1,2,\dots$, равномерно ограничено, то для произвольного $n\in N$, производная $n-$ого порядка произведения Бляшке $B(z,z_k)$ принадлежит классу И.И. Привалова Π_q.

Обратно. Существует последовательность $\{z_k\}_1^{\infty}\subset D$, удовлетворяющая условию Бляшке такая, что, если

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k-\alpha_k)\ln^q\frac{1}{\beta_k-\alpha_k}=+\infty,$$

то $B^{(n)}(z,z_k)\notin\Pi_q$, $n\in N$, $0<q<+\infty$.

Заключение. В данной работе рассмотрены основные свойства бесконечных произведений и произведений типа Бляшке. А так же принадлежность произвольного произведения Бляшке классам Харди H^p и классам Бергмана B^p. Основное исследование изложено во второй главе данной работы. В ней мы доказали теорему, которая описывает условие для принадлежности произведения Бляшке классам И.И. Привалова.

В приложении А приведен программный код, который позволил посчитать предел произведения типа Бляшке при вещественных коэффициентах. Программа была реализованы на системе Windows 10 Pro, на языке Python.