

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра компьютерной физики и метаматериалов
на базе Саратовского филиала Института радиотехники
и электроники им. В. А. Котельникова РАН

**КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В БАССЕЙНЕ РАЗЛИЧНОГО СЕЧЕНИЯ**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Наумова Данилы Андреевича,
студента 4 курса, 4022 группы,
направления подготовки 03.03.02 Физика
Института физики

Научный руководитель
д.ф.-м.н. профессор

О.А Черкасова

Заведующий кафедрой
компьютерной физики и метаматериалов
на базе Саратовского филиала Института радиотехники
и электроники им. В. А. Котельникова РАН
д.ф.-м.н. профессор

В.М. Аникин

Саратов 2021 г.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Волны – гидродинамические явления, оказывающие сильное влияние на жизнь и деятельность человека, связанные с водной средой. Научное понимание и моделирование сложных физических явлений в водной среде имеют значение в плане предсказания и предотвращения последствий природных явлений, стихий и катастроф [1–25].

Цель работы – анализ и последующее моделирование поверхностных волн в бассейнах различной формы и сечения.

Задачами работы являются:

- 1) изучение волновых процессов, протекающих на свободной водной поверхности;
- 2) анализ аналитического решения для поверхностных волн идеальной несжимаемой жидкости в бассейнах различной формы и сечения;
- 3) численное моделирование течения идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей в ограниченном прямоугольном бассейне конечной глубины.

Объект исследования – поверхностные волны идеальной несжимаемой жидкости в бассейнах разной геометрической формы. **Предмет исследования** – аналитические и численные модели волновых процессов с использованием программных пакетов Visual Studio на базе языка C++, графическая интерпретация проводилась с помощью программного пакета Gnuplot 5.2 patchlevel 8.

Структура ВКР. Выпускная квалификационная работа (ВКР) содержит введение, 2 главы, 4 подглавы, заключение, список использованных источников (25 наименований).

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводятся аспектные характеристики работы (актуальность, теоретическая и прикладная значимость, цель и задачи работы, особенность подхода).

В первой, обзорной по характеру, главе излагается история изучения приливных процессов.

Во второй главе представлены аналитические и численные (сеточные и бессеточные) методы моделирования поверхностных волн идеальной несжимаемой жидкости в бассейнах разной геометрической формы.

В разделе 2.1. разбираются аналитическое решение и математическая модель поверхностных волн в бассейне цилиндрической формы.

В случае *кругового* слоя воды при анализе целесообразно перейти к полярным координатам, выбрав начало координат в центре круга: r – радиальная координата, θ – полярный угол. В этом случае для отклонения свободной

поверхности жидкости над невозмущенным уровнем ζ можно записать уравнение [12]:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} + k^2 \zeta = 0,$$

где ρ – плотность, $k^2 = \frac{\sigma^2}{gh}$, h – глубина слоя, σ – искомая частота колебаний. Так как для $r=0$ отклонение должно быть конечным, то различные нормальные колебания можно выразить как:

$$\begin{cases} \zeta = A_s J_s(kr) \cos s\theta \cos(\sigma t + \varepsilon), \\ \zeta = A_s J_s(kr) \sin s\theta \cos(\sigma t + \varepsilon), \end{cases}$$

где s может иметь любое из значений $0, 1, 2, 3, \dots$; A_s – произвольная постоянная. Возможные значения k определяются условием $\frac{\partial \zeta}{\partial r} = 0$ на контуре $r=a$, что дает $J'_s(ka) = 0$. Соответствующие частоты σ колебаний будут тогда $\sigma = kc$, где $c = \sqrt{gh}$.

Для случая $s=0$ движение будет симметричным относительно начала, и гребни и впадины волн образуют окружности. Могут быть найдены наименьшие корни уравнений

$$J'_0(ka) = 0 \text{ или } J_1(ka) = 0, J_0(kr) = 0.$$

Если $s > 0$, то кроме узловых окружностей, определяемых уравнением $J_s(kr) = 0$, существует s равностоящих узловых диаметров. Поведение функций для $s=0$ и $s=1$ показано на рисунке 1.

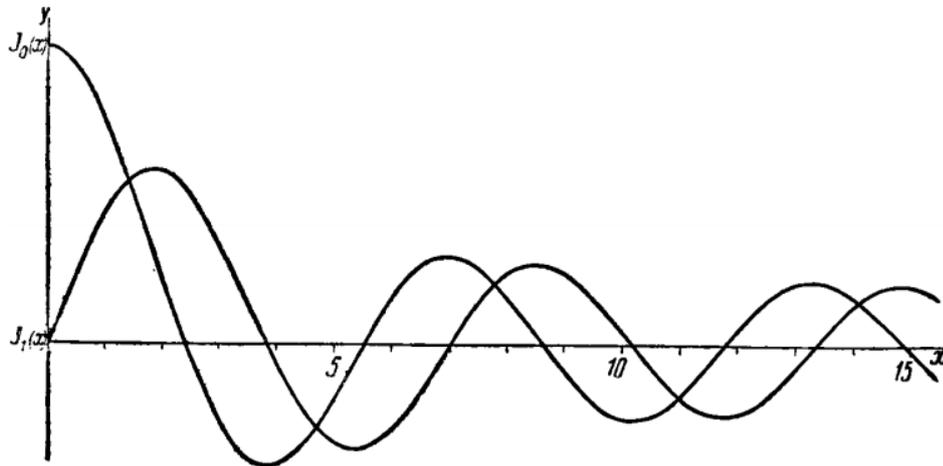


Рисунок 1. Функции, определяющие период колебаний

На рисунке 2,а и 1,б показаны контурные линии свободной поверхности для первых двух видов колебаний рассматриваемого класса. Эти линии встречаются границу под прямым углом в согласии с общим граничным условием. Простые гармонические колебания отдельных частиц совершаются по прямым линиям, которые перпендикулярны к контурным линиям.

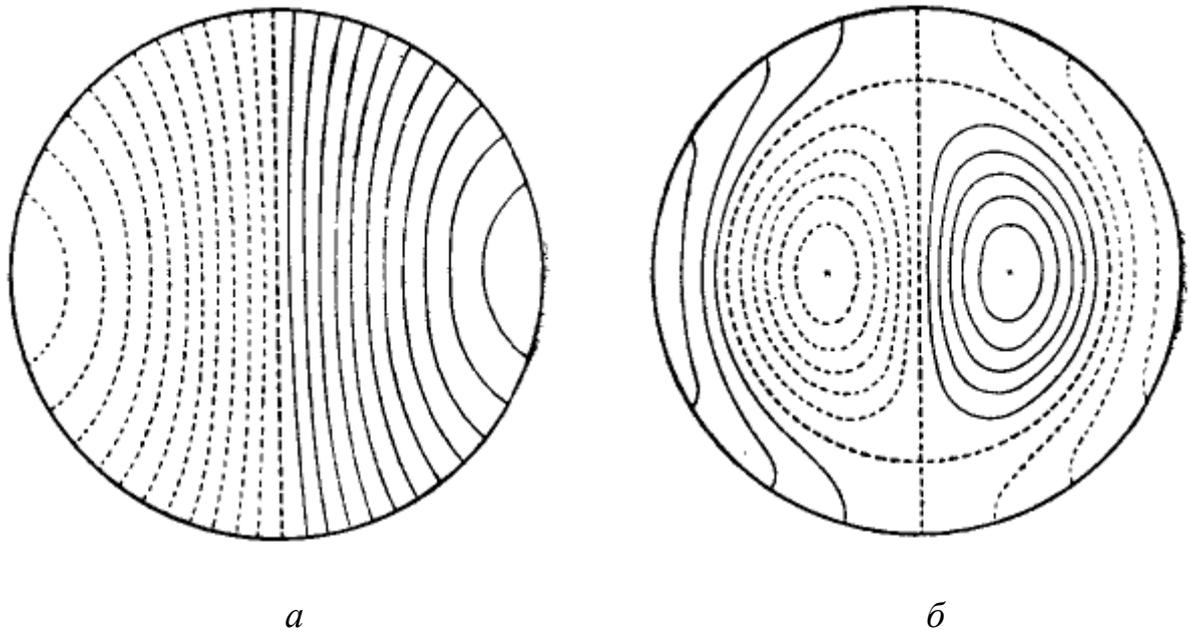


Рисунок 2. Колебания свободной поверхности жидкости:
a - Колебания с одной стороны на другую;
б - возникновение узловой линии в виде окружности, радиус которой дается наименьшим корнем уравнения $J_1(kr) = 0$.

В дальнейших разделах работы рассмотрены волновые и колебательные явления в прямоугольном бассейне.

Рассмотрим прямоугольный бассейн ($a \times b$) с постоянной глубиной и двумя проливами $2l$. Он заполнен несжимаемой однородной невязкой жидкостью (рис. 4).

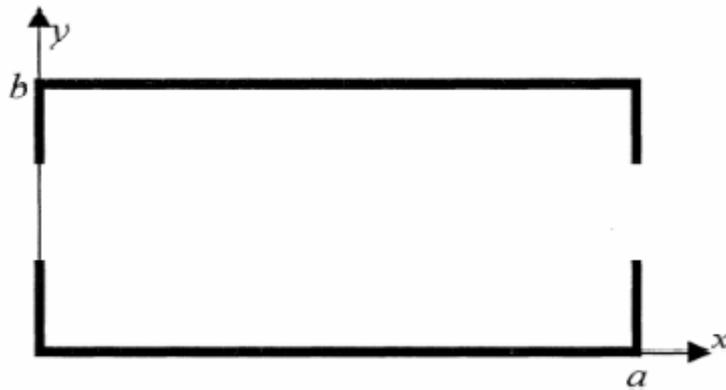


Рисунок 3. Схема бассейна

На жидкость действуют силы тяжести и диссипативные силы. Опишем их с помощью уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \mu u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \mu v = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (*)$$

где u и v - составляющие скорости по осям x и y ; t - время, ζ - возвышение свободной поверхности, h - глубина бассейна, g - ускорения силы тяжести, μ - коэффициент диссипации.

Примем распределение скорости $u(x, y, t)$ на границах в виде:

$$u(0, y, t) = u(a, y, t) = u_0 \cos^2 \left[\frac{\pi(y-b_1)}{2l} \right] \sin \sigma t,$$

где u_0 - максимальное значение скорости в проливе, $b_1 = b/2$, σ - частота волны. Решать будем с нулевыми начальными условиями:

$$u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = \zeta(x, y, 0) = 0.$$

Конечно-разностный аналог системы уравнений (*) использовался в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta_{i,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} &= -\frac{h}{\Delta x} (u_{i+1,j}^n - u_{ij}^n) - \frac{h}{\Delta y} (v_{i,j+1}^n - v_{i,j}^n), \\ \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} &= -\frac{g}{\Delta x} (\zeta_{i,j}^n - \zeta_{i-1,j}^n) - \mu u_{i,j}^n, \\ \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} &= -\frac{g}{\Delta y} (\zeta_{i,j}^n - \zeta_{i,j-1}^n) - \mu v_{i,j}^n, \end{aligned}$$

где индекс n соответствует временному уровню, Δt - шаг по времени.

Для проверки численной модели была решена задача, имеющая аналитическое решение: движение жидкости описывается линеаризованной системой (*, при этом трение не учитывается ($\mu = 0$)). Решение будем искать в виде периодических по времени функций:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \tilde{u}(x) \cos \frac{k\pi}{b} y \sin \sigma t, & v(x, y, t) &= \tilde{v}(x) \sin \frac{k\pi}{b} y \sin \sigma t, \\ \zeta(x, y, t) &= \tilde{\zeta}(x) \cos \frac{k\pi}{b} y \cos \sigma t, \end{aligned}$$

здесь \tilde{u} , \tilde{v} , $\tilde{\zeta}$ - амплитудные функции волновых характеристик, $k=1,2,3\dots$

Получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) &= (A_1 \sin \lambda x + A_2 \cos \lambda x), \\ \tilde{\zeta}(x) &= \frac{\sigma}{g\lambda} (A_1 \cos \lambda x - A_2 \sin \lambda x), \\ \tilde{v}(x) &= \frac{\beta}{\lambda} (A_1 \cos \lambda x - A_2 \sin \lambda x), \end{aligned}$$

где $\tilde{u}(0) = \tilde{u}(a) = u_0$, $A_1 = \frac{u_1(1-\cos \lambda a)}{\sin \lambda a}$, $A_2 = u_0$, $\lambda^2 = \frac{\sigma^2 - gh\beta^2}{gh}$, $\beta = \frac{k\pi}{b}$.

Отметим, что полученное решение верно при условии $\sigma^2 \geq gh\beta^2$ при заданных выше параметрах бассейна период волны должен быть менее 2 к

($\kappa = 2$). Для больших значений периода амплитудные функции будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x) &= C_1 \sinh \gamma x + C_2 \cosh \gamma x, \\ \tilde{\zeta}(x) &= -\frac{\sigma}{g\gamma} (C_1 \cosh \gamma x + C_2 \sinh \gamma x), \\ \tilde{v}(x) &= -\frac{\beta}{y} (C_1 \cosh \gamma x + C_2 \sinh \gamma x),\end{aligned}$$

где $C_1 = \frac{u_0(1 - \cosh \gamma a)}{\sinh \gamma a}$, $C_2 = u_0$, $\gamma^2 = \frac{gh\beta^2 - \sigma^2}{gh}$.

Полученное решение использовалось для задания начальных и граничных условий:

$$\begin{aligned}u(x, y, 0) = v(x, y, 0) &= 0 & \zeta(x, y, 0) &= \tilde{\zeta}(x) \cos \frac{2\pi}{b} y \\ u(0, y, t) = u(a, y, t) &= u_0 \cos \frac{2\pi}{b} y \sin \sigma t, \\ v(x, 0, t) = v(x, b, t) &= 0/\end{aligned}$$

Моделирование проводилось с помощью программы Visual Studio с пакетом для языка C++. Графическая интерпретация картины проводилась в программе Gnuplot 5.2 patchlevel 8.

Так как мы используем три разных функции, то графики необходимо сделать по отдельности в 3-х мерной системе координат. Результаты моделирования представлены на рисунках 4–6.

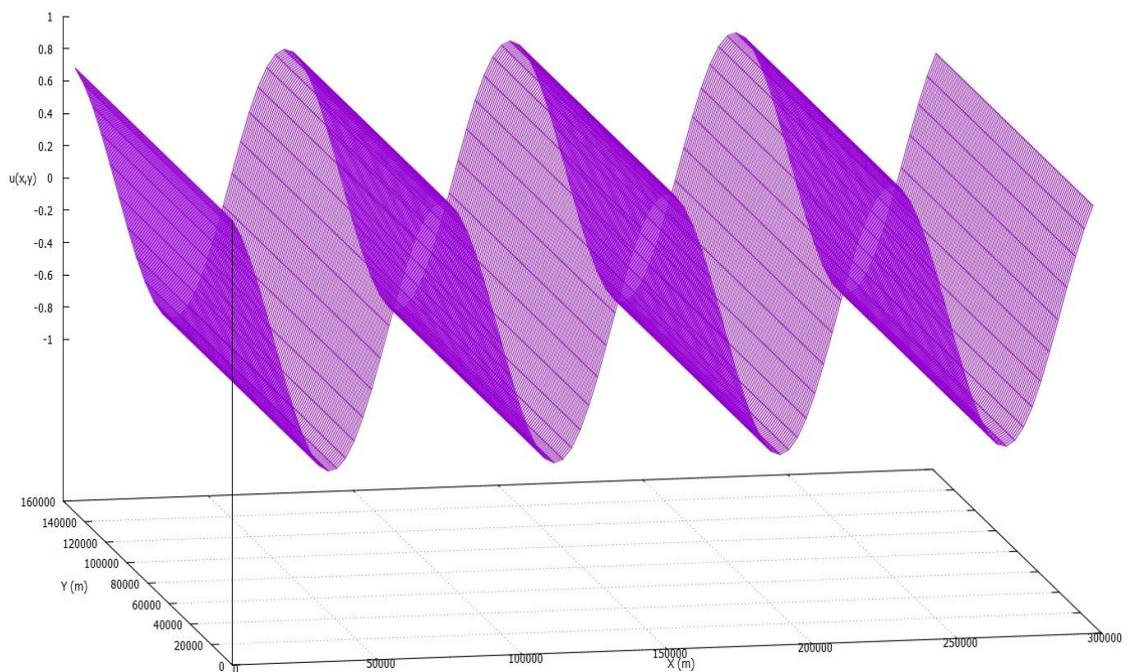


Рисунок 4. График для функции $\tilde{u}(x)$

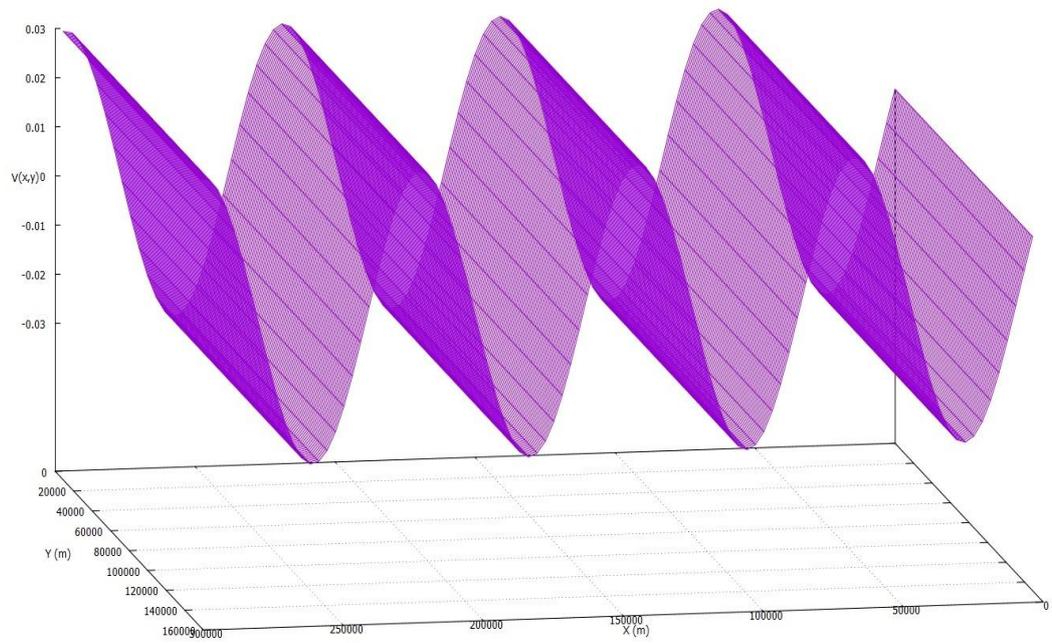


Рисунок 5. График для функции $\tilde{v}(x)$.

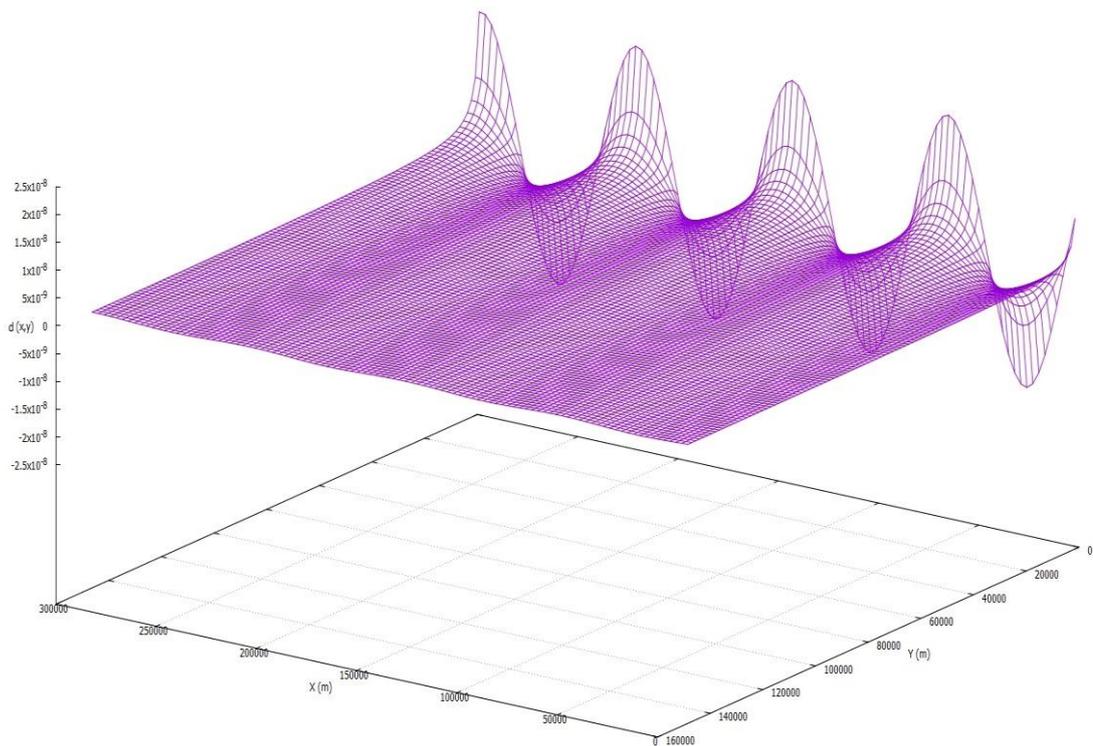


Рисунок 7. График для функции $\tilde{\zeta}(x)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В выпускной квалификационной работе проведено аналитическое и компьютерное моделирование течения свободной поверхности жидкости, согласующееся с аналитическим решением и результатами других авторов для бассейнов со свободной границей прямоугольной и круглой формы. Выявлено различие математических моделей для бассейнов с прямоугольным или треугольным сечением.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю. Оценка высот волн, вызванных подводным оползнем в ограниченном водоеме // Прикладная механика и техническая физика. – 2012. – Т. 53. – № 5. – С. 67–78.
2. Khakimzyanov, G.S., Shokina, N.Yu. Evaluation of the height of waves generated by an underwater landslide in a confined water reservoir // J. of Applied Mechanics and Technical Physics. 2012. Vol. 53, No. 5. P. 690–699.
3. Гусев О.И., Шокина Н.Ю., Кутергин В.А., Хакимзянов Г.С. Моделирование поверхностных волн, генерируемых подводным оползнем в водохранилище // Вычисл. технологии. 2013. Т. 18, № 5. С. 74–90.
4. Lynett, P.J., Liu, P.L.-F. A numerical study of the run-up generated by three-dimensional landslides // J. of Geophysical Research. 2005. Vol. 110. C03006.
5. Korobkin, A.A., Stukolov, S.V., Sturova, I.V. Motion of a vertical wall fixed on springs under the action of surface waves // J. of Applied Mechanics and Technical Physics. 2009. Vol. 50, No. 5. P. 841–849.
6. Khakimzyanov, G., Dutykh, D. Numerical modelling of surface water wave interaction with a moving wall // Communications in Computational Physics. 2018. Vol. 23, No. 5. P. 1289–1354.
7. Kashiwagi, M. Non-linear simulations of wave-induced motions of a floating body by means of the mixed Eulerian-Lagrangian method // Proc. of the Institution of Mechanical Engineers. Pt C: J. of Mechanical Engineering Science. 2000. Vol. 214, No. 6. P. 841–855.
8. Zhao, H., Freund, J.B., Moser, R.D. A fixed-mesh method for incompressible flowstructure systems with finite solid deformations // J. of Computational Physics. 2008. Vol. 227. P. 3114–3140.
9. Нуднер И.С., Семенов К.К., Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю. Исследование взаимодействия длинных морских волн с сооружениями, защищенными вертикальными экранами // Фундамент. и прикл. гидрофизика. 2017. Т. 10, № 4. С. 31–43.
10. Нуднер И.С., Семенов К.К., Лебедев В.В. и др. Численная модель гидроволновой лаборатории для исследования взаимодействия морских волн с гидротехническими сооружениями // Вычисл. технологии. 2019. Т. 24, № 1. С. 86–105.
11. Дронкерс Й. Расчеты приливов в реках и прибрежных водах // Гидромеханика. – 1964. – С 5-19.
12. Ламб Г., Гидродинамика. М. : Гос. издательство технико теоретической литературы. –1947. – С. 358-364.

13. Васильев Д.Ю., Нелинейные задачи массопереноса в каналах и бассейнах различной геометрической формы, с учетом кориолисовой силы // Автореферат диссертации на кандидата ф.-м. наук // Механика жидкости, газа и плазмы. – 2007. – С. 7-17.
14. Демышев С.Г., Дымова О.А., Маркова Н.В., Численное моделирование приливных волн в бассейне с двумя проливами // Морской гидрофизический журнал. – 2006. – №2. – С. 66-75.
15. Завадский В.Ю., Моделирование волновых процессов // Акуст. институт им. Андреева Н.Н. – С. 72–103.
16. Симаков Е.Е., Моделирование волн на глубокой воде // Математическое моделирование. – С. 1-4.
17. Михайлов В.Н., Горин С.Л., Михайлов М.В. Новый подход к определению и типизации эстуариев // География. –Т. 5. –№5. – С. 3-6.
18. Зоммерфелд А. Механика деформируемых сред // Теоретическая физика. – 1954. – Т. 2 – С. 284-354.
19. Некрасов Н.А. Энергия океанских приливов // Статистические расчеты. – Т. 860. – №2. – С. 1–11.
20. Гусев О.И. Алгоритм расчета поверхностных волн над подвижным дном в рамках плановой нелинейно-дисперсионной модели // Вычислительные технологии. – Т. 19, №6. – С. 19–33.
21. Хажоян М.Г. Численное моделирование поверхностных волн над подвижным дном // Вычисл. технологии. – 2007. –Т. 12, №4. – С. 96-105.
22. Алексеев Д.В., Черкесов Л.В. Исследование влияния боковых стенок бассейна на характеристики вынужденных волн // Морской гидрофизический журнал. –2001. –№4. – С. 23-31
23. Васильев Д.Ю., Чувывров А.Н., Кузнецов В.А. Математическое моделирование гидродинамических потоков в центрифугах имеющие каверны, различной правильной геометрической формы // Нефтегазовое дело. –2007. –№5. – С. 233.
24. Свиркунов П.Н., Калашник М.В. Эволюция вихря, вызванного стоком массы воды в модели мелкой воды // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. –1995. –Т.31. –№5. – С. 725-730.
25. Гуров Д.Б., Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В. Численное моделирование течений жидкости в каверне на основе квазигидродинамической системы уравнений // Матем. моделирование. –1999. –Т.8. –№7. – С. 33-44.