

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра электроники, колебаний и волн

К теории колебаний струны

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 4031 группы
направления 03.03.03 «Радиофизика»

Института физики

Сафронова Михаила Александровича

Научный руководитель
ассистент кафедры электроники,
колебаний и волн

Титов А.В.

Заведующий кафедрой
электроники, колебаний и волн,
к. ф.-м. н., доцент

Гришин С.В.

Саратов 2021 год

Введение

Помимо чисто научной ценности, «задача о струне» имеет важное практическое значение: именно от спектрального состава и соотношения обертонов зависит тембр извлекаемого звука, а значит, его индивидуальное восприятие слушателем. Дальнейшее развитие этого вопроса выявляет следующие задачи, решению которых и посвящена работа: 1) краткий исторический обзор исследований, посвященных струне, и анализ их роли в развитии физики и математики; 2) аналитическое рассмотрение общей задачи о колебаниях струны; 3) разработка экспериментального макета и методики для анализа спектральных характеристик различных типов колебаний, возбуждаемых в струне с целью последующего применения в учебных практикумах.

Актуальность данной работы подтверждается повышенным интересом исследователей к процессам возбуждения распределенных систем, в том числе с точки зрения моделирования. В качестве примера следует упомянуть недавнюю диссертационную работу М. Мона [1].

Первая глава работы посвящена истории вопроса о колебаниях струны. Отмечены опыты Пифагора и законы Архита Тарентского – первые попытки дать объяснение происхождению тембра струны, в дальнейшем получившие не только аналитическое, но и экспериментальное воплощение.

Далее говорится о поисках «идеального» музыкального строя, который бы удовлетворял эстетическим запросам как жителей эпохи Возрождения, так и представителям последующих поколений [2].

В связи с развитием математической науки (появлением исчисления бесконечно малых величин) возникает понятие функции, точное определение которому пытались дать многие знаменитые учёные. В их числе Л. Эйлер, Ж. Д’Аламбер, Д. Бернулли, Ж. Фурье, С. Соболев и Л. Шварц, причём с именами последних двух связано появление новой отрасли математики – теории обобщённых функций.

Во второй главе рассмотрено общее аналитическое решение задачи о колебаниях струны: заданы начальные и граничные условия, подобно тому, как это сделано в труде У. Рэлея [3], определяющие конкретный вид задачи; выбран метод разделения переменных и принято, что искомая функция распределения амплитуды колебаний представляется тригонометрическим рядом. После получения самого общего вида решения, согласно [4, 5], в работе рассматриваются частные случаи: функция начального возмущения представлялась квадратичным и кубическим многочленом и функцией синуса. Кроме того, рассмотрены более сложные случаи начального возмущения в виде лямбда-функции Хевисайда и функции треугольной волны, которые обладают особенностью в виде излома (то есть, непрерывны, но не дифференцируемы в критической точке).

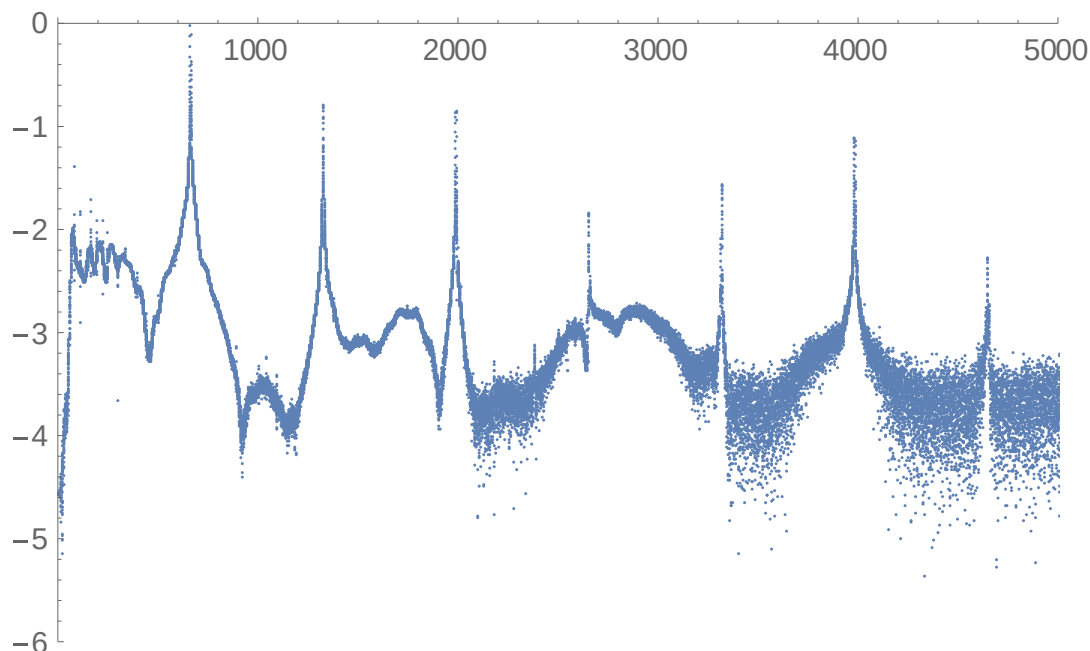
В третьей главе работы описаны различные применения спектрального анализа сигналов, а также разработана методика обработки сигналов со звукозаписывающих устройств с помощью дискретного преобразования Фурье, выполняемого в программе компьютерной математики Wolfram Mathematica 11.3. Спектры, полученные в результате этого численного расчёта

сравниваются с теми, которые получены в специальном спектроанализаторе музыкальной программы Steinberg Cubase. Сравнение показывает достаточно хорошие позиции численного расчёта.

Приводим алгоритм [6] получения спектрального представления сигнала и результат его работы для пробного звука – ми второй октавы (≈ 660 Гц):

- 1) Записанный со струны сигнал импортируется в аудиоформат следующей функцией: **s=Import[«путь к файлу/track.wav», «Audio»];**
- 2) Далее находится длительность трека с помощью команды **Duration@s;**
- 3) Задаётся частота дискретизации, то есть количество отсчётов в секунду, на которые разбивается сигнал. Для практических целей достаточно взять этот параметр равным 48000 Гц (SR=48000, SR – SampleRate);
- 4) Аудиофайл импортируется в виде массива значений: **sdata=Import[«путь к файлу/track.wav», «Data», SampleRate→SR];**
- 5) Определяется число точек на непрерывной временной оси. Для этого используется код: **Num=Length@sdata[[1]];**
- 6) Создаётся массив частот и проверяется его длина:
freq=Table[i/(Num-1)*SR, {i, 1, Num/2}] – создание массива,
Length@freq – проверка длины;
- 7) Далее создаётся массив уровня сигнала и проверяется его длина:
Sigtab = Log[10, Abs@Fourier[sdata[[1]]]] – создание массива,
Length@Sigtab – проверка длины;
- 8) Формируется двумерный массив «сигнал-частота»:
TT = Table[{freq [[i]], Sigtab [[i]]}, { i, 1, Num/2}];
- 9) Строится спектр по сформированному списку:
ListPlot[TT, PlotRange→{{0,5000},{-6,0}}, Joined→True].

В результате работы алгоритма получается следующий график (для звука ми второй октавы с частотой ≈ 660 Гц)



Выводы

В ходе эксперимента были изучены возможности программы Wolfram Mathematica в обработке аудиосигналов, осуществлён спектральный анализ по специально разработанному алгоритму, полученные спектрограммы были сопоставлены с результатами анализа в программе Cubase. Помимо довольно близкого качественного сходства были обнаружены некоторые различия, обусловленные, вероятно, особенностями внутреннего алгоритма анализа спектра в Cubase.

В результате анализа спектрограмм было экспериментально доказано, что существует зависимость между местом возбуждения струны и спектральным составом получаемого звука: возле бриджа наибольшую амплитуду имеет основной тон, тогда как возле нэка большей амплитудой обладают высшие гармоники.

Заключение

В работе дана постановка задачи о колебаниях струны, приведено общее аналитическое решение «задачи о струне» методом Фурье (разделение переменных) и решения для частных ситуаций. Рассмотрены как случаи простых начальных импульсов – квадратичной и кубической параболы, синусоидального возмущения, так и более специальные формы: треугольный импульс и лямбда-функция Хевисайда.

Разработана методика численного спектрального анализа сигналов с помощью программного пакета Wolfram Mathematica, доступная широкой аудитории студентов, позволяющая проводить численные эксперименты в рамках аудиторных занятий. Предложен лабораторный макет, позволяющий проводить лабораторные занятия со студентами, посвященные физике процессов колебаний струны.

В ходе эксперимента обнаружилось различие спектров звуков, снятых с бриджа, от звуков, снятых с нэка. Это различие проявилось в разнице амплитуд высших гармоник по сравнению с основным тоном: при игре на нэке большую амплитуду имеет основной тон, а на бридже – обертоны.

Список используемой литературы

- 1) Мон. М. Математическое моделирование колебаний струнных и стержневых систем с локализованными особенностями. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18. – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», Воронеж, 2014.
- 2) А. В. Волошинов. Математика и искусство. – М.: Просвещение, 1992. – 335 с.
- 3) У.Рэлей. Теория звука, т.1, гл. 6, Гостехиздат, 1955
- 4) А.Н.Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. 1977
- 5) Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. Главная редакция физико-математической литературы, Наука. М.:1973
- 6) Гундина, М. А. Спектральный анализ сигнала в системе Wolfram Mathematica / М. А. Гундина // Наука и техника. 2021. Т. 20, № 2. С. 173–178. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-173-178>