

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математической теории  
упругости и биомеханики

**Приближенное и численное моделирование контактного взаимодействия  
упругой пластины с пьезоупругим актуатором, расположенным на торце**

**АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студента 4 курса 431 группы

направления 01.03.03 – Механика и математическое моделирование

механико-математического факультета

Сулаймонова Мирзотемура Мирзорауфовича

Научный руководитель  
д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_

подпись, дата

М.В. Вильде

Зав. кафедрой  
д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_

подпись, дата

Л.Ю. Коссович

Саратов 2021

## **Введение**

Данная работа посвящена проблеме моделирования взаимодействия упругой пластины и пьезоупругого актуатора, расположенного на торце. Построена приближенная модель, основанная на инженерном подходе, в которой действие пластины на актуатор заменяется упругим закреплением. Сдвиговое напряжение, вычисленное по этой модели, сопоставляется с результатами решения контактной задачи в программной системе ANSYS.

**Актуальность темы.** В большинстве областей науки возникает потребность в исследовании распространения волн в многослойных упругих материалах, так как большинство современных композитных материалов представляют собой слоистые структуры. В процессе производства и использования конструкций из слоистых композитов возможно появление и накопление повреждений различных типов, что в свою очередь приводит к ухудшению свойств изготовленных изделий. И как следствие может вызвать разрушению объектов. Исходя из этого возникла потребность в исследовании и контроле в реальном времени физико-механических параметров структуры, необходимых для выявления повреждений.

В качестве приборов, позволяющих возбуждать и улавливать упругие волны, обширно используются пьезокерамические преобразователи, перемещаемые в плоскости поверхности, встроенные в структуру, либо прикрепленные к поверхности объекта.

**Целью** данной дипломной работы является теоретическое описание воздействия пьезокерамического актуатора с пластиной. Поскольку динамическая контактная задача, описывающая взаимодействие актуатора и пластины, является достаточно сложной, в работе рассмотрена статическая модель, применимая в случае низкочастотных колебаний.

**В задачи** данной работы входят:

1. Описание пьезокерамического эффекта и основных теорий электроупругости.

2. Описание методов, позволяющих описывать и анализировать взаимодействия пьезокерамического актуатора с упругой пластиной.

3. Построение математической модели для конкретного случая актуатора, расположенного на краю пластины, и решение построенной краевой задачи.

4. Численное решение задачи о действии актуатора на пластину в программной системе ANSYS.

5. Сравнение сдвиговых напряжений в области контакта, полученных в ANSYS и вычисленных по приближенной модели.

**Материалами** исследования являются теория электроупругости и упрощённые модели взаимодействия пьезоэлектрического актуатора с упругой пластиной.

**Структура и объем работы.** Бакалаврская работа состоит из введения, трех разделов, заключения и списка используемых источников, включающего 20 наименований. Работа изложена на 40 листах машинописного текста, содержит 30 рисунков.

### **Основное содержание работы**

Во *введении* обосновывается актуальность темы исследования, формируются цели и задачи работы. В *первой главе* раскрывается пьезоэлектрический эффект, его изучение и развитие. Описываются исследование пьезокерамических материалов, представлены примеры самых эффективных из них. Приведены основные соотношения теории электроупругости. *Вторая глава* посвящена математическим моделям взаимодействия пьезоактуаторов с упругой пластиной. В п.2.1 описаны известные приближенные модели shear-lag и pin-force, которые используются на практике для описания действия пьезоактуаторов, расположенных на лицевой поверхности пластины. В п.2.2 построена упрощённая модель для случая актуатора на краю пластины. В этой модели действие пластины на актуатор приближенно заменяется пружинами, закрепленными на

поверхности актуатора (см. рисунок 1). В силу малости толщины и ширины актуатора можно принять соотношение

$$u_{2,a} = u_a(x_2, t). \quad (1)$$

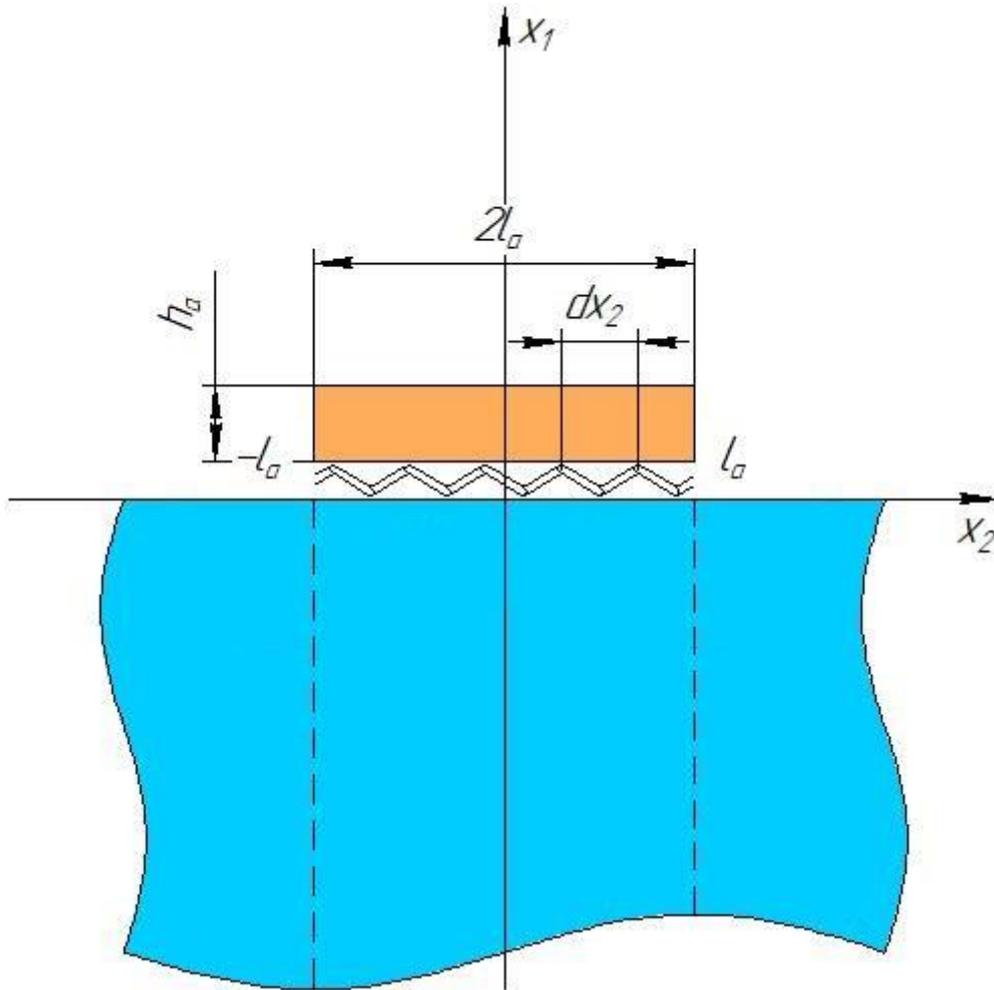


Рисунок 1 – Упрощённая модель взаимодействия актуатора и пластины

Таким образом, актуатор моделируется тонким стержнем, испытывающим деформацию растяжения-сжатия. Упругая сила пропорциональна перемещению и направлена в противоположную сторону:

$$S = -\xi_a \cdot u_a. \quad (2)$$

Здесь  $\xi_a$  – постоянная, характеризующая упругость пружины.

Рассмотрим равновесие малого элемента актуатора (рисунок 2), где  $F = b_a \cdot h_a$ ,  $F_1 = dx_2 b_a$ . Составляя сумму сил, действующих на элемент актуатора, получаем уравнение:

$$h_a \frac{d\sigma_a}{dx_2} + S = \rho_a h_a \frac{\partial^2 u_a}{\partial t^2}. \quad (3)$$

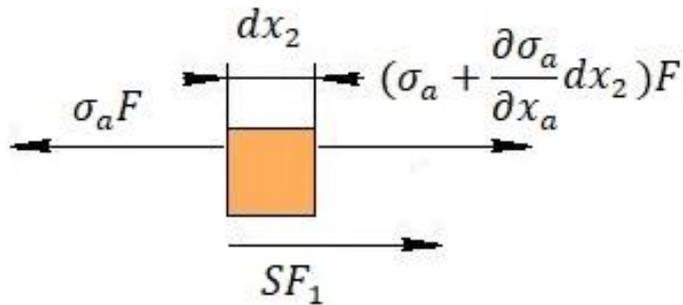


Рисунок 2 – Силы, действующие на элемент актуатора

В случае низких частот можно пренебречь силой инерции  $\rho_a h_a \frac{\partial^2 u_a}{\partial t^2}$ . Следовательно,

$$h_a \frac{d\sigma_a}{dx_2} + S = 0. \quad (4)$$

Уравнение состояния в данном случае сводится к одному уравнению:

$$\sigma_a = Y_a \left( \frac{du_a}{dx_2} - d_E E_0 \right), \quad (5)$$

Здесь

$E_0$  – напряженность электростатического поля;

$V$  – напряжение;

$Y_a$  – модуль Юнга;

$d_E$  – пьезоэлектрическая постоянная;

$$E_0 = \frac{V}{h_a} = const.$$

Уравнение для перемещения актуатора имеет вид

$$h_a Y_a \frac{d^2 u_a}{dx_2^2} - \xi_a \cdot u_a = 0. \quad (6)$$

Получено общее решение дифференциального уравнения (6):

$$u_a = C \sinh(\alpha x_2), \quad (7)$$

где  $\alpha = \sqrt{\frac{\xi_a}{h_a Y_a}}$ .

Граничные условия для уравнения (6) имеют вид

при  $x_2 = \pm l_a$ :

$$\frac{du}{dx_2} = d_E E_0. \quad (8)$$

Подставляя (7) в (2), находим  $C$  и получаем решение в виде

$$u_a = \frac{d_E E_0}{\alpha \cosh(\alpha l_a)} \sinh(\alpha x_2). \quad (9)$$

Сдвиговое напряжение, передаваемое актуатором на пластину, получим после подстановки (9) в (2):

$$\sigma_{12}|_{x_1=0} = -S = \alpha h_a Y_a \frac{d_E E_0}{\cosh(\alpha l_a)} \sinh(\alpha x_2), \quad (10)$$

Постоянная  $\alpha = \frac{\alpha_0}{b_a}$  может быть подобрана из сравнения теоретического решения с экспериментальными данными.

Заметим, что решение краевой задачи (6), (8) совпадает с решением краевой задачей для идеально упругого стержня, на концах которого заданы напряжения:

$$\text{при } x_2 = \pm l_a: \quad \sigma_a = d_E E_0 Y_a, \quad (11)$$

которые соответствуют силе

$$T = d_E E_0 Y_a F. \quad (12)$$

Таким образом, согласно приближенной модели стержень, прикрепленный к пластине и растягиваемый силами (12), передает на пластину касательное напряжение (10). Для определения применимости приближенной модели представляет интерес численное решение контактной задачи о взаимодействии пластины и стержня.

*Третья глава* состоит из трех параграфов и направлена на описание численного исследования взаимодействия пластины и актуатора, в многоцелевой программной системе конечно-элементного анализа ANSYS. Третья глава состоит из трех параграфов, описывающих создание модели, постановка контактной задачи в программе ANSYS, получение и анализ

результатов. Для построения модели пластины и актуатора был использован SolidWorks – программный комплекс САПР для автоматизации работ промышленного предприятия на этапах конструкторской и технологической подготовки производства. Были созданы две модели пластины и актуатора: полная модель и четверть модели, выделенная из соображений симметрии полной модели относительно двух осей. Задача решена с помощью модуля Static structural, предназначенного для решения задач механики деформируемого твердого тела в статической постановке.

В качестве материала для пластины был взят алюминиевый сплав с параметрами  $Y = 69,04$  ГПа,  $\nu = 0.33$ . Материала для актуатора в стандартной библиотеке материалов ANSYS найдено не было, поэтому было принято решение создать свой материал с параметрами  $Y_a = 66,67$  ГПа,  $\nu = 0.34$ . При описании контактного взаимодействия актуатора и пластины был использован параметр No separation.

По выведенной формуле вычислено значение силы, приложенной к концам актуатора с обеих сторон и моделирующей его расширение под действием электрического напряжения. При заданном напряжении на актуаторе  $V_0 = -6,78$  В, имеем  $E_0 = \frac{V_0}{h_a} = -2,712 \cdot 10^5$  В/м. Пьезоэлектрическая постоянная для материала рассматриваемого актуатора  $d_E = d_{31} = -210 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}}{\text{Н}}$ , тогда по формуле (12) получаем

$$T = 4,75 \text{ Н.} \quad (13)$$

Далее были поставлены граничные условия. Нижний торец пластины был жестко закреплен с помощью утилиты Fixed Support.

Для четверти модели были поставлены дополнительные граничные условия: были ограничены перемещения правой и задней стенки в направлении осей X и Z соответственно.

Анализ результатов решения поставленной задачи в многоцелевой программной системе конечно-элементного анализа ANSYS показывает, что

деформация модели под действием приложенных сил мала, а напряжения локализованы в окрестности концов актуатора. Для целей данной работы представляет интерес исследование напряжений в области контакта пластины и актуатора. На рисунке 3 представлены главные напряжения. Как видно из рисунка, среднее напряжение  $\sigma_2$  мало по сравнению с остальными двумя. Таким образом, рассматриваемая задача может быть упрощена путем использования двумерной теории пластин.

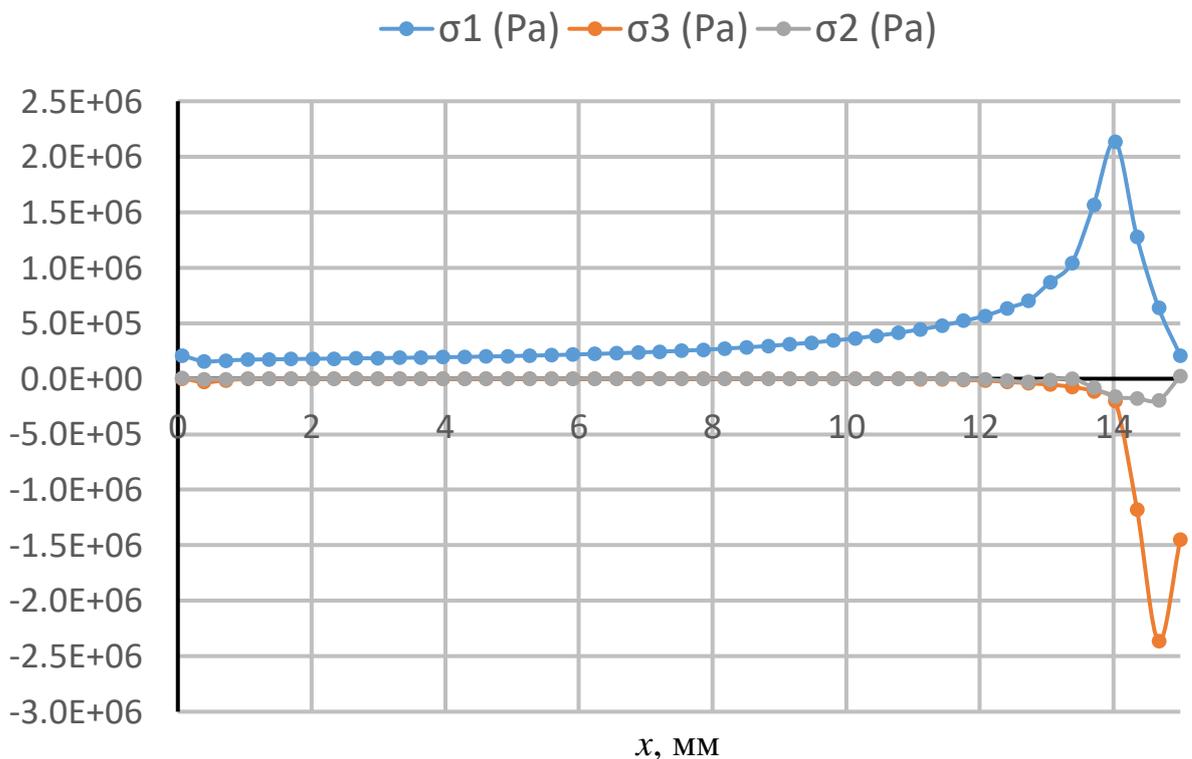


Рисунок 3 – Главные напряжения на линии контакта актуатора и пластины

На рисунке 4 представлены графики касательного напряжений  $\sigma_{xy}$  в пластине в области контакта, полученные в программе ANSYS и по построенной в данной работе модели (формула (10)). Здесь приняты обозначения: ANSYS-1 – решение для полной геометрической модели, ANSYS-2 – решение для четверти модели, Модель-1 – напряжение, вычисленное по формуле (31) при  $\alpha_0 = 3.456$ , Модель-2 – то же, что Модель-1, но для  $\alpha_0 = 5$ . Значение  $\alpha_0 = 3.456$  было подобрано в работе (M.V. Wilde,

M.V. Golub, A.A. Eremin, J. Sound Vib., 2019, V. 441, p. 26-49) по экспериментальным данным о волновом поле, возбуждаемым актуатором. Как видно из рисунка 4, получаемые при этом сдвиговые напряжения приблизительно соответствуют напряжениям, возникающим в контактной задаче. При  $\alpha_0 = 5$  получается лучшее совпадение вне некоторой небольшой окрестности края пластины.

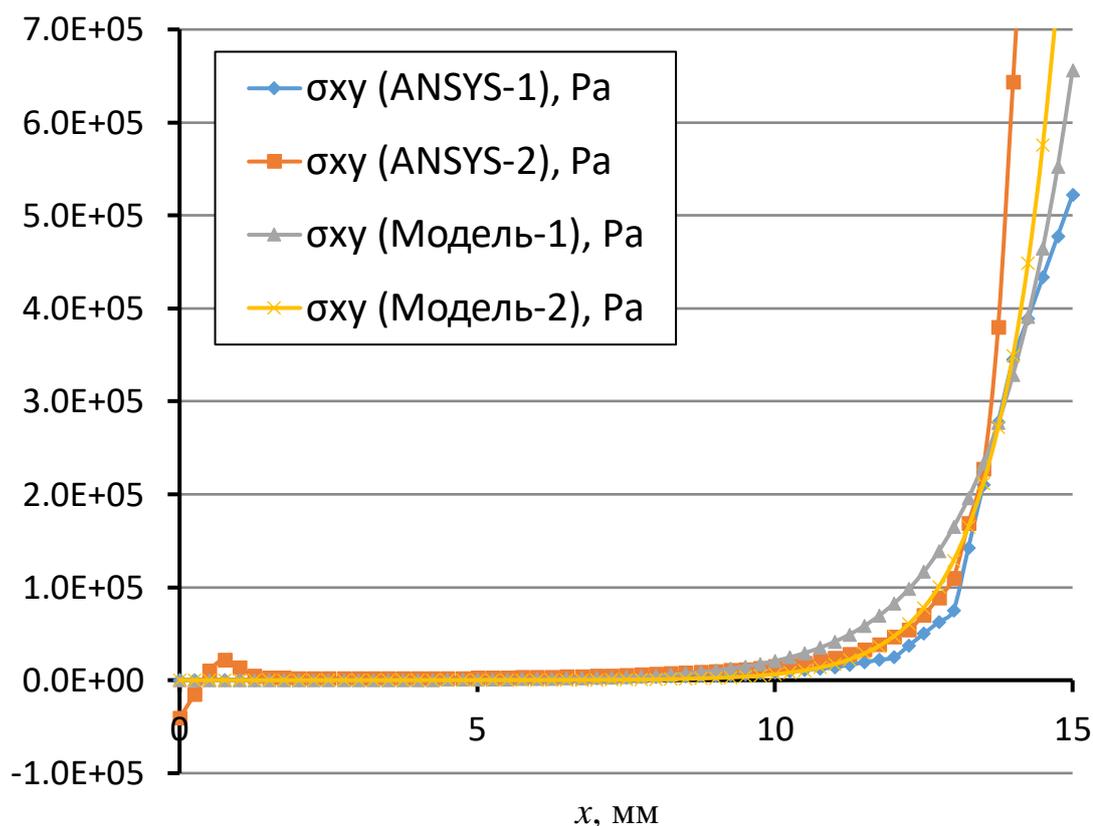


Рисунок 4 – Сравнение результатов численного решения и приближенной модели для напряжения  $\sigma_{xy}$  на линии контакта актуатора и пластины

Сравнение графиков ANSYS-1 и ANSYS-2 показывает, что размеры сетки влияют на получаемые результаты. Получить результаты с еще более мелким размером сетки в имеющейся версии программы ANSYS не представилось возможным.

## **Заключение**

В ходе данной работы были изучены основы теории пьезоэффекта и электроупругости, описаны простейшие модели взаимодействия пьезокерамического актуатора с упругой пластиной. Для случая актуатора, расположенного на краю упругой пластины, построена упрощенная модель, в которой вместо контактной задачи решаются задачи о деформировании актуатора и пластины по отдельности. Для оценки применимости построенной приближенной модели в многоцелевой программной системе конечно-элементного анализа ANSYS получено численное решение контактной задачи о статическом взаимодействии актуатора с пластиной. Решена задача для полной геометрической модели и эквивалентная задача для четверти модели, построенная с учетом геометрической и силовой симметрии. Рассмотрение четверти позволило уменьшить размер сетки. Сравнение касательных напряжений в области контакта, полученных в программе ANSYS и по построенной приближенной модели, показало достаточное для практических целей соответствие.