

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Исследование эффектов синхронизации двух взаимодействующих цепочек
Ресслера с частотной расстройкой**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 4032 группы
направления 03.03.03 Радиофизика
Института физики
Елагин Александр Александрович

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н.,

_____ И.А. Шепелев

Зав. кафедрой радиофизики

и нелинейной динамики,

д.ф.-м.н., доцент

_____ Г.И. Стрелкова

Саратов 2021 г.

Введение

Синхронизация – одно из наиболее глубоко укоренившихся и распространенных форм поведения в природе, она распространяется от людей до бессознательных существ. Некоторые известные примеры включают в себя захватывающие движения косяков рыб, одновременное мигание светлячков, синхронное возбуждение нейронов и клеток человека, а также синхронизированное движение маятниковых часов. При первом взгляде на эти примеры существование самосинхронизации в природе может показаться любопытным. Однако главное свойство этого явления состоит в том, что существует канал связи, такой что объекты и системы могут влиять друг на друга. Эта связь может быть реализована в форме физического или определенного химического соединения. Хотя синхронизация является повсеместным явлением среди связанных колебательных систем, ее причины не всегда очевидны. Следовательно, как именно синхронизируются связанные генераторы и при каких условиях? В некоторых случаях получить ответы на эти вопросы крайне сложно. Возьмем, к примеру, знаменитый пример Христиана Гюйгенса [1,2,3,4] с двумя маятниковыми часами, демонстрирующие противофазные или синфазные синхронные движения. Гюйгенс действительно заметил, что существует «сила», ответственная за синхронизацию. Однако, несмотря на удивительно правильное наблюдение Гюйгенса, даже сегодня совершенно строгое математическое объяснение этого явления отсутствует, несмотря на использование соответствующих моделей маятника и гибкой соединительной планки. Так, синхронизация произвольных автогенераторов со связью Гюйгенса выглядит следующим образом: маятниковые часы заменены произвольными нелинейными осцилляторами второго порядка и вместо гибкого деревянного стержня рассматривается жесткий стержень с одной степенью свободы. Каждый осциллятор снабжен управляющим входом, чтобы гарантировать установившееся колебания. Требование наличия управляющего входа для поддержания колебаний могут быть связаны с маятниковыми часами

Гюйгенса, где каждый маятник оснащен механизмом спуска, который обеспечивает импульсную силу маятнику для поддержания хода часов. Доказано, что синхронизированное движение в осцилляторах не зависит от типа внутреннего источника энергии, используемого для поддержания колебаний. Скорее, соединительный стержень, рассматривается как ключевой элемент в возникновении синхронизации. В частности, показано [5,6,7], что масса соединительного стержня определяет возможное синхронизированное поведение в генераторах, а именно синфазную и противофазную синхронизацию.

Синхронизация рассматривается как процесс поддерживания колебаний двух или нескольких осцилляторов (генераторов), частоты которых близки друг к другу. Самым простым примером является случай, когда отдельные осцилляторы демонстрируют периодические колебания и в результате их взаимодействие может привести либо к синхронизации, либо к квазипериодическим колебаниям. Для периодической и хаотической вынужденной синхронизации в качестве критериев используются условия частотного и фазового (подстройки) захвата. Считается, что осциллятор 1:1 синхронизируется с внешним воздействием, если его наблюдаемая частота равняется частоте внешнего воздействия. Захват фазы означает, что разность фаз внешнего воздействия и осциллятора равняется константе для любого момента времени t . Если две автоколебательные системы с небольшой частотной расстройкой связаны между собой, и они осуществляют воздействие друг на друга – это эффект взаимной синхронизации связанных систем. Если одна из колебательных систем имеет большую частоту и происходит захват частоты то имеет место вынужденная синхронизация.

Цель выпускной квалификационной работы состоит в исследовании взаимной синхронизации связанных слоёв осцилляторов Рёсслера с частотной расстройкой, многообразии режимов, реализующихся со случайных начальных условий в автономной цепочке нелокально связанных осцилляторов Рёсслера, в том числе химероподобных режимов.

Для достижения выше поставленных целей были выполнены следующие задачи:

- 1) Определить основные режимы, реализующиеся в исследуемой двуслойной сети осцилляторов с частотной расстройкой между слоями при вариации силы межслойной и внутрислойной связи и радиуса внутрислойной связи.
- 2) Найти и количественно исследовать характеристики межслойной синхронизации структур.
- 3) Исследовать системы в которых наблюдается частотная и структурная синхронизация.

Выше поставленные задачи выполнялись численно с помощью программного обеспечения C++, Latex, Gnuplot.

Раздел 1 «Синхронизация периодических колебаний в условиях концепции хаотической фазовой синхронизации» содержит теоретические сведения о фазовой синхронизации хаотических сигналов взаимодействующих осцилляторов. Нарушение фазовой синхронизации хаотических фазово-когерентных аттракторов

Раздел 2 «Практическая часть, осциллятор Рёсслера» содержит описание исследовательской работы. Описание системы дифференциальных уравнений одиночного и двухслойной мультиплексного осциллятора Рёсслера, меры количественной оценки и построение диаграмм частотой, структурной синхронизации.

Основное содержание работы

Предметом исследования данной работы является двуслойная мультиплексная сеть двумерных решеток нелокально-связанных хаотических осцилляторов Рёсслера, которая описывается обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\varepsilon_l \dot{x}_i^l = -y_i^l - z_i^l + \frac{\varepsilon_l \sigma_l}{2P_l} \sum_{m_i} (x_{m_i}^l - x_i^l) + \varepsilon_l \sum_{k=1}^2 \gamma_{kl} (x_i^k - x_i^l),$$

$$\varepsilon_l \dot{y}_i^l = x_i^l + a y_i^l + \frac{\varepsilon_l \sigma_l}{2P_l} \sum_{m_i} (y_{m_i}^l - y_i^l), \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_l \dot{z}_i^l = b + z_i^l (x_i^l - c),$$

$x_{i \pm N}^l(t) = x_i^l(t)$, $y_{i \pm N}^l(t) = y_i^l(t)$, $z_{i \pm N}^l(t) = z_i^l(t)$, где x_i^l, y_i^l, z_i^l – динамические переменные, l – номер слоя сети, σ – сила внутрислойной связи, γ – сила межслойной связи, P – радиус внутрислойной сети. Попарная двунаправленная связь между слоями вводится в первое уравнение каждого слоя и описывается третьим слагаемым в системе (1.1).

Значение γ_{kl} определяет силу межслойной связи и определяется следующим образом:

$$\gamma_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

где номера строк и столбцов относятся к соответствующим слоям. Радиус связи межслойного взаимодействия соответствует определению мультиплексной сети, то есть каждый i -й осциллятор первого слоя связан только с i -м элементом второго слоя.

Сначала фиксируются значения силы межслойной связи $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = 0,043$ и значения радиуса связи $P_{1,2} = P = 90$. Эти значения соответствуют существованию химерных состояний в изолированных слоях уравнения (1.1).

В случае $\varepsilon = 1$ средняя частота колебаний для всех элементов как первого, так и второго слоя равна $\omega_0^{1,2} = 1.079$. Рассматриваемый режим химерных состояний проиллюстрирован на мгновенном пространственном профиле на рис. 1.1, а).

Хорошо видно, что фазовая химера включает в себя два кластера некогерентности. Пространственно-временная динамика режима представлена на пространственно-временной диаграмме на рис. 1.1, б). Из нее видно, что рассматриваемая фазовая химера является устойчивой во времени – кластеры не меняют своего пространственного положения в течение всего времени наблюдения. На рисунке 1.1, с) показана нормализованная спектральная плотность мощности для двух выбранных осцилляторов из кластеров некогерентности из первого слоя (черная линия, $\omega_0^1 = 1,079$) и второго слоя (красная линия, $\varepsilon = 1.1$, $\omega_0^2 = 0,98$). График для $\varepsilon = 1$ показывает, что хаотические колебания осцилляторов характеризуются спектральными максимумами на частотах $\omega_0^1 = 1,079$, $\frac{1}{2}\omega_0^1$, $\frac{3}{2}\omega_0^1$ и других.

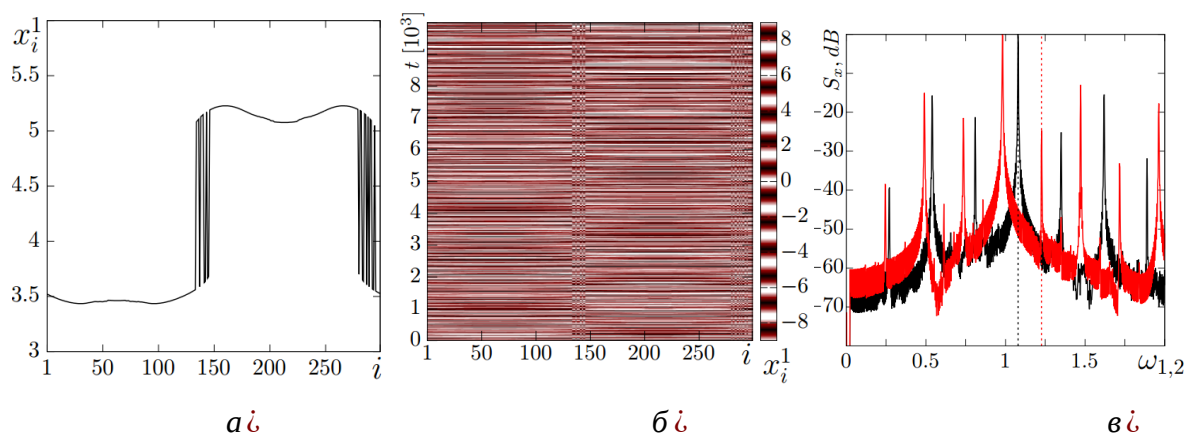


Рис 1.1 а) Иллюстрация фазовых химерных состояний в изолированных слоях, б) пространственно-временная диаграмма для 1-го слоя, в) нормированная спектральная плотность мощности колебаний [7].

Для диагностики эффекта синхронизации частот химерных состояний в двух слоях сети в результате их взаимодействия рассчитываются отношение средних

частот колебаний двух осцилляторов из двух слоев: $\frac{\omega_1}{\omega_2}$. Средняя частота

ω_m колебаний осциллятора определялась как частота Райса по следующей формуле:

$$\omega = \frac{2\pi M}{T} \quad (1.3)$$

M – это число переходов значений переменной x_i через ноль в одном направлении за время наблюдения T .

Кроме частотной синхронизации также интересно изучение эффекта синхронизации пространственно-временной динамики в целом, когда осцилляторы в двух слоях попарно близки к полной хаотической синхронизации.

Для этого введём количественную оценку степени синхронности колебаний. Для этого вычисляем коэффициент корреляции между соответствующими i -й парой соответствующих осцилляторов из двух слоев:

$$R_i^{12} = \frac{\tilde{x}_i^{1'} \cdot \tilde{x}_i^{2'}}{\sqrt{(\tilde{x}_i^{1'})^2 \cdot (\tilde{x}_i^{2'})^2}}; \tilde{x}_i^{12} = x_i^{12} - x_i^{12'} \quad (1.4)$$

Где (') означает усреднение по времени.

Используя меру корреляции (1.4) для произвольных режимов колебаний, можно оценить как полную, так и эффективную синхронизацию между парой осцилляторов двух слоев с одинаковыми номерами i . Так эффективная синхронизация наблюдается, когда $R_{12} \approx \pm 1$, а полная синхронизация – когда $R_{12} = \pm 1$. Знаки «+» и «-» соответствуют синфазной и противофазной синхронизации, соответственно. Мы задаем условие эффективной синхронизации как

$$|R_{12}| \geq 0,95. \quad (1.5)$$

Для определения динамических режимов в мультиплексной сети изменялась частотная расстройка между слоями $r_\omega = \varepsilon^{-1}$ в пределах $[0.8; 1.2]$, а также сила межслойной связи γ . Все остальные параметры системы оставались постоянными. На плоскости управляющих параметров r_ω , γ , в соответствии с указанными ранее критериями синхронизации, были определены границы областей частотной синхронизации и эффективной синхронизации структур. Диаграмма областей вне и внутри частотной синхронизации приведена на рис. 1.2, а). На ней можно выделить две области, соответствующие наличию или отсутствию частотной синхронизации: С – область отсутствия частотной синхронизации, В – включающая в себя область

структурной синхронизации, А – область частотной и структурной синхронизации. Градациями цвета на диаграмме представлены значения отношения средних частот $\frac{\omega_1}{\omega_2}$.

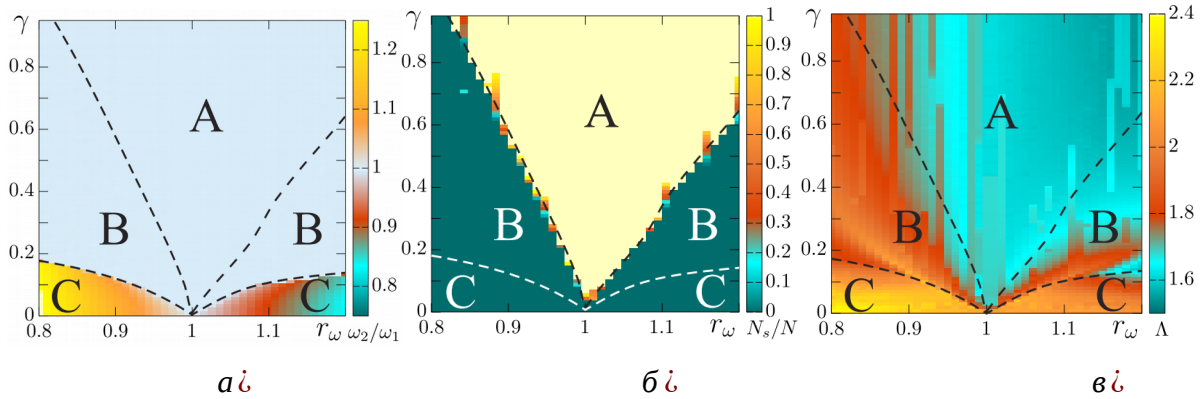


Рис 1.2 а) Диаграмма областей частотной и структурной синхронизации, б) Диаграмма отношений синхронизованных пар осцилляторов к общему числу пар осцилляторов, в) карта значений старшего ляпуновского показателя Λ [7].

На рис. 1.2, б) представлена диаграмма, для которой рассчитывалось отношение числа синхронизованных пар осцилляторов N_s (согласно условию эффективной синхронизации) к общему числу пар осцилляторов N . Градациями цвета выделены значения $\frac{N_s}{N}$ в зависимости от r_ω и γ . Светло-желтая область, в которой $\frac{N_s}{N}=1$ соответствует области эффективной синхронизации пространственно-временных структур А на рис 1.2, а). На рис. 1.2, в) приведена карта значений старшего ляпуновского показателя Λ на плоскости управляющих параметров, которая сопоставляется с границами областей А, В и С. Старший показатель является всюду положительным, что соответствует хаотической динамике сети.

Режим синхронизации структур

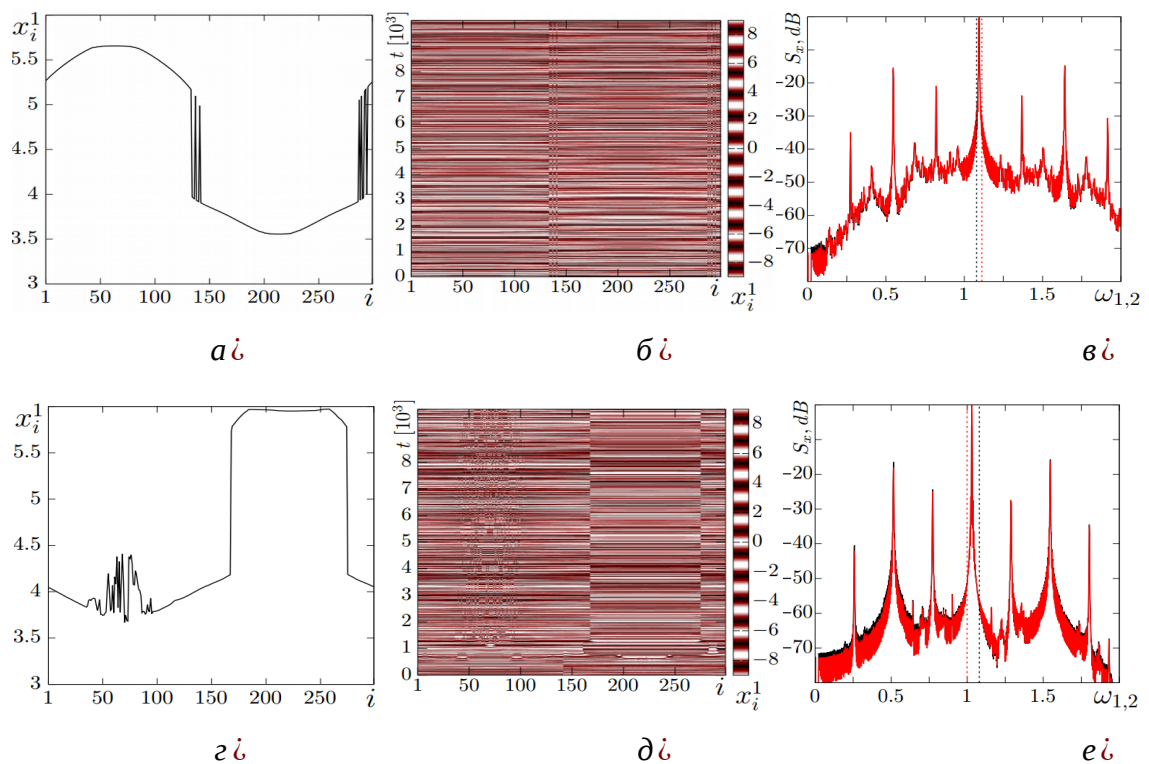


Рис 1.3, а), г) Иллюстрация фазовых химерных состояний. в), е) нормированная спектральная плотность мощности. б), д) пространственно-временная диаграмма соответственно. В исследуемой системе наблюдается как частотная, так и структурная синхронизация. При этом, начальная структура может как сохраниться (верхний ряд), так и разрушиться с образованием нового состояния (нижний ряд) [7].

Рисунок 1.3 иллюстрирует два химерных состояния, возникающих в этой области. Графики в верхнем ряду на рис. 1.3, а), б) соответствуют случаю, когда синхронный режим аналогичен химерным состояниям в несвязанных слоях.

Снимок состояния системы и пространственно-временной график для первого слоя показаны на рис 1.3, а), б), соответственно. Состояние второго слоя идентично первому слою. Нормированная спектральная плотность мощности колебаний для первого (черная линия) и второго (красная линия) слоев изображена на рис. 1.3, в). Видно, что спектр колебаний для амплитудной химеры заметно отличается от спектра для фазовой химеры. Колебания становятся более хаотичными.

Режим частотной синхронизации

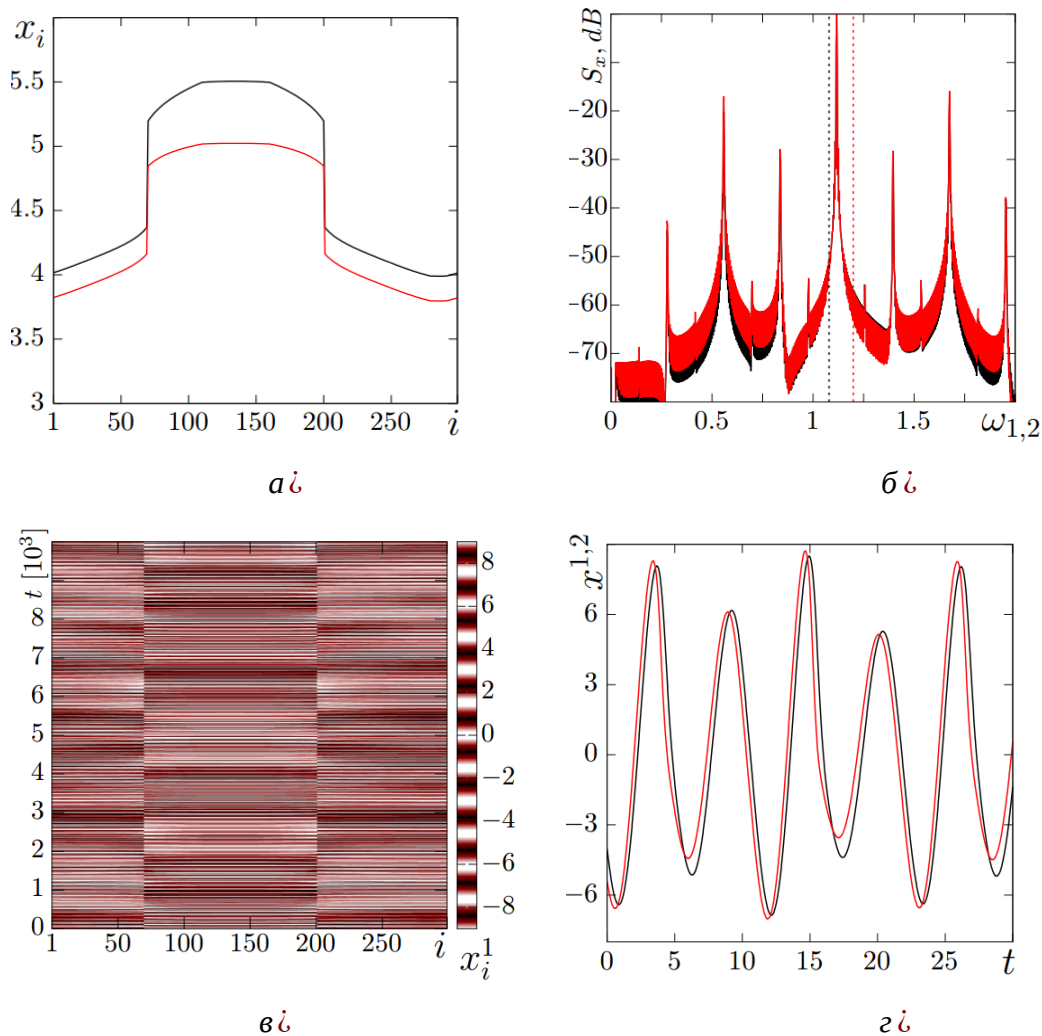


Рис 1.4. Иллюстрация фазовых химерных состояний, нормированная спектральная плотность мощности, пространственно-временная диаграмма соответственно. Частоты в двух слоях одинаковы, однако мгновенные амплитуды и фазы колебаний соответствующих осцилляторов в верхнем и нижнем слоях не различаются[7].

Важной особенностью таких структур является совпадение средних частот колебаний в обоих слоях. На рис. 1.4, а) показан режим с кусочно-гладкими пространственными профилями в обоих слоях, которые показаны в один и тот же момент времени. Пространственные профили режимов качественно совпадают, но мгновенные состояния переменных x_i соответствующих i -х осцилляторов не совпадают, рис 1.4, в). Временная реализация продемонстрирована на рис 1.4, г). Плотность мощности рис.1.4, б).

Режим десинхронизации

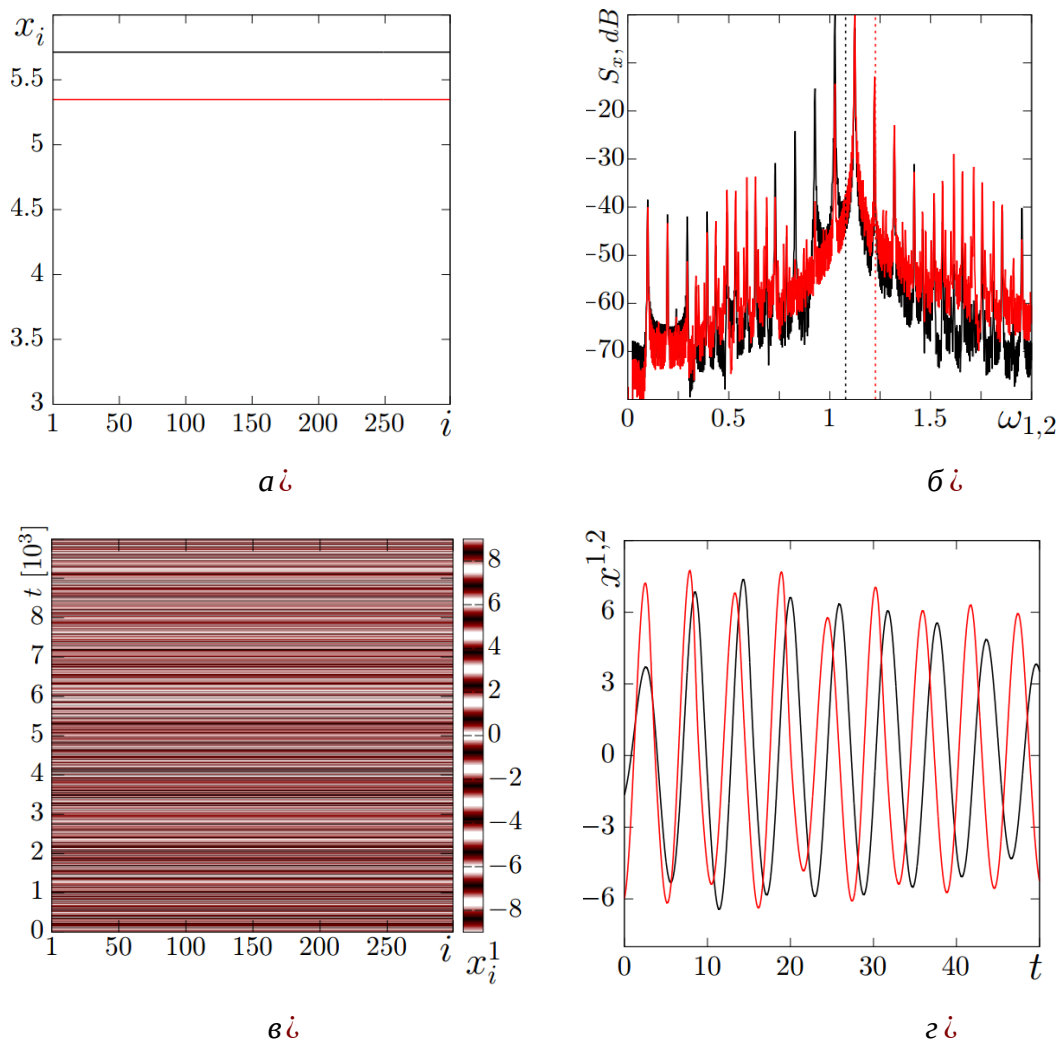


Рис 1.5. Иллюстрация фазовых химерных состояний, нормированная спектральная плотность мощности, пространственно-временная диаграмма соответственно. Наблюдается отсутствие как структурной, так и частотной синхронизации. У соответствующих осцилляторов в верхнем и нижнем слоях отличаются частоты, мгновенные фазы и амплитуды[7].

Область асинхронных режимов, колебания в слоях имеют разную частоту.

Состояние системы в момент времени на рис. 1.5, а). Мгновенные состояния всех осцилляторов в каждом слое одинаковы, но нет совпадения колебаний между слоями. График пространства-времени на рис. 1.5, б) показывает пространственно-временную динамику первого слоя. Нормированные спектральные плотности мощности колебаний показан на рис. 1.5, в). Временные реализации проиллюстрированы на рис. 1.5, г).

Заключение

В ходе выполнения научной работы было исследовано взаимодействие двух слоев мультиплексной сети хаотических осцилляторов Рёсслера. Начальные состояния в изолированных слоях представляют собой фазовые химеры с аналогичной кластерной структурой, но средние частоты в первом и втором слоях различаются. Проведенное моделирование показывает, что рассогласование частот существенно влияет на режимы, возникающие во взаимодействующих слоях. В то же время существует достаточно широкая область межслойной синхронизации средних частот в плоскости параметров (рассогласование частот - сила межслойной связи). В слоях в этой области могут возникать различные типы пространственно-временных паттернов из упомянутых начальных состояний.

Это могут быть как химерные состояния, так и структуры с кусочно-гладким пространственным профилем. Можно выделить область эффективной синхронизации структур внутри области частотной синхронизации. Здесь можно наблюдать совпадения не только средних частот, но и пространственно-временных структур, которые становятся практически одинаковыми в любой момент времени. Синхронизированные режимы, возникающие во взаимодействующих слоях, могут быть как подобными исходной фазовой химере (начальное состояние в несвязанных слоях), так и отличаться от последней. Таким образом, можно получить разные синхронизированные пространственно-временные картины (включая фазовые и амплитудные химеры, структуры с кусочно-гладким профилем) для одних и тех же начальных

условий в зависимости от значений управляющих параметров. При десинхронизации колебаний слоя исходные состояния химеры разрушаются, начиная с достаточно малых значений силы межслойной связи. Если взаимодействие очень слабое, то исходные структуры сохраняются с разными средними частотами внутри слоев, несмотря на межслойное взаимодействие. Кроме того, наши расчеты показывают, что область эффективной синхронизации структур также характеризуется минимальными значениями максимального показателя Ляпунова. Напротив, область десинхронизации имеет максимальные значения максимального показателя Ляпунова. Таким образом, колебания наиболее хаотичны для асинхронных режимов и наименее хаотичны для синхронизированных структур.

Список литературы

1. Pena J. Huygens' synchronization of dynamical systems: beyond pendulum clocks. – 2013.
2. Liu Y. Tracking Phase Synchronization of Two Coupled RÖSSLER Oscillators with Internal Resonance //International Journal of Modern Physics B. – 2009. – Т. 23. – №. 23. – С. 4809-4816.
3. Girvan M., Newman M. E. J. Community structure in social and biological networks //Proceedings of the national academy of sciences. – 2002. – Т. 99. – №. 12. – С. 7821-7826.
4. Koronovskii A. A., Khramov A. E. Generalized synchronization of chaotic oscillators as a partial case of time scale synchronization //Technical physics letters. – 2004. – Т. 30. – №. 12. – С. 998-1001.
5. Rabinovich M. I., Trubetskov D. I. Introduction to the Theory of Oscillations and Waves. – 1984.
6. Kuznetsov A. P. et al. Dynamics of coupled generators of quasiperiodic oscillations: Different types of synchronization and other phenomena //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2019. – Т. 398. – С. 1-12.

7. Shepelev I. A., Vadivasova T. E. Synchronization in multiplex networks of chaotic oscillators with frequency mismatch //Chaos, Solitons & Fractals. – 2021. – T. 147. – C. 110882.