

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Исследование динамики неоднородных и гетерогенных одномерных
ансамблей нелокально связанных хаотических осцилляторов**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 2232 группы
направления 03.04.03 Радиофизика
Института физики
Пузанова Алексея Михайловича

Научный руководитель

Зав. кафедрой, д.ф.-м.н., доцент _____ Г.И. Стрелкова

Зав. кафедрой радиофизики

и нелинейной динамики,

д.ф.-м.н., доцент _____ Г.И. Стрелкова

Саратов 2021

ВВЕДЕНИЕ

Коллективная динамика сложных систем различной природы, формирование разнообразных пространственно-временных структур и их эволюция представляют одно из центральных направлений в нелинейной динамике и связанных с ней наук. В последнее время внимание исследователей направлено на изучение особого типа пространственно-временных структур, названных химерными состояниями. Химерные состояния характеризуются сосуществованием локализованных в пространстве областей (кластеров) с синхронной и асинхронной динамикой. Данная структура возникает как промежуточное состояние при переходе когерентность-некогерентность в ансамблях с уменьшением силы нелокальной связи между элементами. Было также показано, что такой переход может происходить и через другие состояния частичной синхронизации, а именно, через уединенные состояния. Для режима уединенных состояний характерно, что отдельные «уединенные» осцилляторы при вариации коэффициента связи начинают покидать синхронный кластер в случайных положениях в пространстве и наблюдаются резкие выбросы амплитуд для различных элементов ансамбля.

Первоначально при исследовании механизмов и условий возникновения особых пространственно-временных структур рассматривались ансамбли связанных идентичных осцилляторов с симметричной нелокальной связью между элементами. Однако реальные системы, как правило, являются неоднородными, то есть индивидуальные элементы могут характеризоваться некоторым разбросом или расстройкой по управляющим параметрам. Кроме того, связь между элементами также может быть неоднородной и зависеть как от расстояния между связанными элементами, так и от влияния различных внешних факторов (шумового или регулярного воздействия). В ряде работ была исследована эволюция химерных структур в присутствии различного типа неоднородности по управляющим параметрам и при задании нерегулярных типов топологии, и иерархических или квазифрактальных и случайных фрактальных типов связи.

Для иллюстрации общности полученных ранее результатов представляется целесообразным и интересным продолжить изучение динамики неоднородных ансамблей с целью обнаружения химерных структур различного типа и режимов уединённых состояний и исследования их эволюции при изменении параметров системы.

Целью магистерской работы является численное моделирование динамики ансамблей нелокально связанных систем с дискретным временем с наличием неоднородности по управляющему параметру и со специально заданными распределениями значений силы нелокальной связи, а также динамики гетерогенного ансамбля, составленного из двумерных отображений различного типа.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Исследовать влияние неоднородности по управляющему параметру индивидуальных элементов на реализацию химерных состояний различного типа в ансамбле нелокально связанных логистических отображений при изменении значений радиуса и силы нелокальной связи.

2. Провести исследования динамики ансамбля нелокально связанных логистических отображений при заданном изменении значений силы связи в зависимости от расстояния между связанными элементами.

3. Провести численное моделирование пространственно-временной динамики гетерогенного ансамбля нелокально связанных двумерных отображений, в котором парциальные элементы описываются отображением Эно и отображением Лози.

Все численные исследования в работе проводятся с использованием программного комплекса, разработанного аспирантами кафедры радиофизики и нелинейной динамики.

Проведён литературный обзор по теме устойчивость химерных состояний в нелокально связанных сетях неидентичных логистических отображений для

случая иерархических связей и химерных состояний в сетях осцилляторов ФитцХью-Нагумо с фрактальной топологией связей.

1 Динамика неоднородного ансамбля нелокально связанных логистических отображений

В качестве объекта исследований в данной работе было выбрано кольцо нелокально связанных логистических отображений. Индивидуальный (парциальный) элемент описывается одномерным логистическим отображением вида

$$x^{t+1} = \alpha x^t(1 - x^t), \quad (1.1)$$

где t – дискретное время, α – управляющий параметр, динамическая переменная x изменяется в интервале $[0, 1]$. Исследуемый ансамбль представляет собой кольцо нелокально связанных отображений (1.1) и описывается следующим уравнением:

$$x_i^{t+1} = f(x_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [f(x_j^t) - f(x_i^t)], \quad (1.2)$$

Здесь x^t – действительные значения фазовых переменных, t – дискретное время, σ – коэффициент нелокальной связи, P – число соседних элементов ансамбля слева и справа от элемента с номером i , $i = 1, 2, \dots, N$ – порядковый номер элемента в ансамбле. Функции $f(x_j^t)$ и $f(x_i^t)$ соответствуют правой части уравнения отображения (1.1). Число элементов в ансамбле $N = 1000$. Начальные условия, разные для всех элементов ансамбля, выбирались распределёнными случайным образом в интервале $[0, 1]$. Времена установления и итерирования выбирались равными 10^4 итераций.

Рассмотрим случай неоднородного распределения значений управляющего параметра α . Значение управляющего параметра α для всех элементов ансамбля (1.2) выбиралось случайным образом из интервала $[3.58, 3.9]$. Число соседних элементов фиксировано: $P = 320$. Исследования проводились при уменьшении силы нелокальной связи σ от 0.5 до 0 с шагом по параметру $\Delta\sigma = 0.005$.

Как видно из рисунка 1.1, на котором приведены результаты расчетов профилей ансамбля для достаточно большой силы связи $\sigma = 0.5$, динамика ансамбля характеризуется достаточно гладким, но зашумленным мгновенным профилем (рисунок 1.1, а). Имеет место хаотизация амплитуд (значений) переменной (рисунок 1.1, б), которая обусловлена неоднородным распределением значений параметра α для элементов ансамбля. Данный режим соответствует *режиму колебательной хаотической синхронизации*.

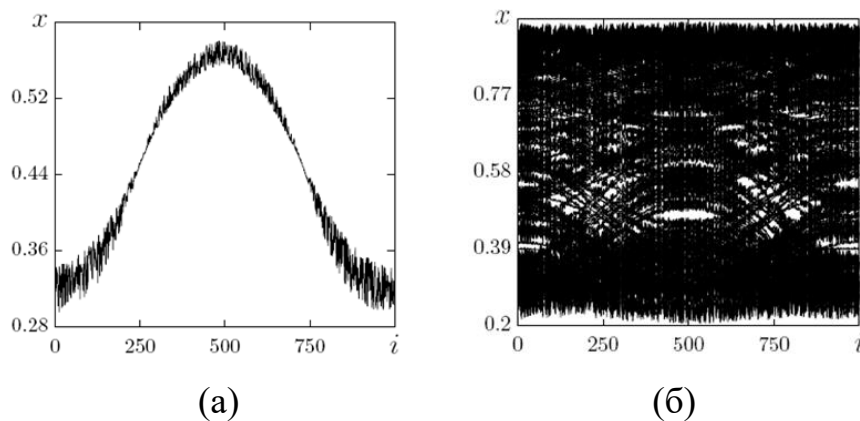


Рисунок 1.1 – Мгновенный (а) и пространственно-временной (б) профили для переменной x_i ансамбля (1.2) при $\sigma = 0.5$, $P = 320$

Далее с уменьшением силы нелокальной связи σ наблюдались нерегулярные режимы: для $\sigma = 0.495$, 0.49 , 0.485 . При значениях $\sigma = 0.48$ и 0.475 наблюдались режимы, схожие с показанным на рисунке 1.1 случаем. При дальнейшем уменьшении σ до значения 0.445 хаотизация амплитуд осцилляторов будет выражена довольно ярко.

В результате проведённых численных исследований динамики ансамбля нелокально связанных логистических отображений (1.2) с неоднородным распределением значений управляющего параметра α было установлено, что рассмотренная неоднородность ведет к зашумлению мгновенных пространственных и пространственно-временных профилей динамики ансамбля. Показано, что в определенных интервалах вариации значений силы нелокальной связи σ в ансамбле наблюдаются фазовые и амплитудные химеры. Однако эти интервалы значительно уже по сравнению со случаем однородного

ансамбля. Установлено, что в случае неоднородности по управляющему параметру переход к режиму пространственно-временной некогерентности происходит значительно раньше по параметру нелокальной связи, чем в случае фиксированного значения управляющего параметра во всех осцилляторах ансамбля.

Теперь перейдём к случаю неоднородности по силе связи σ между элементами. Сначала рассмотрим случай, когда сила связи уменьшается следующим образом:

$$\sigma_j = \sigma(1 - j\Delta), \quad (1.3)$$

где $j = 2, \dots, P$, Δ – некоторая малая величина. Исследования динамики ансамбля (1.2) проводились для ряда значений σ , например, $\sigma = 0.5, 0.4, 0.37, 0.29$, для каждого $P = 160, 320, 500$.

Рассмотрим случай фиксированного значения управляющего параметра α : $\alpha = 3.8$. Выберем и зафиксируем радиус связи $P = 160$; $\Delta = 0.001$. Динамика ансамбля (1.2) характеризуется гладким мгновенным пространственным профилем, что отражает когерентную динамику всех элементов ансамбля. Все элементы во времени демонстрируют регулярные колебания периода 4. С уменьшением силы связи, мгновенный профиль теряет свою гладкость, и возникают химерные состояния. В частности, рисунок 1.2 иллюстрирует режим сосуществования фазовой, включающей 4 некогерентных кластера, и амплитудной (один некогерентный кластер) химер.

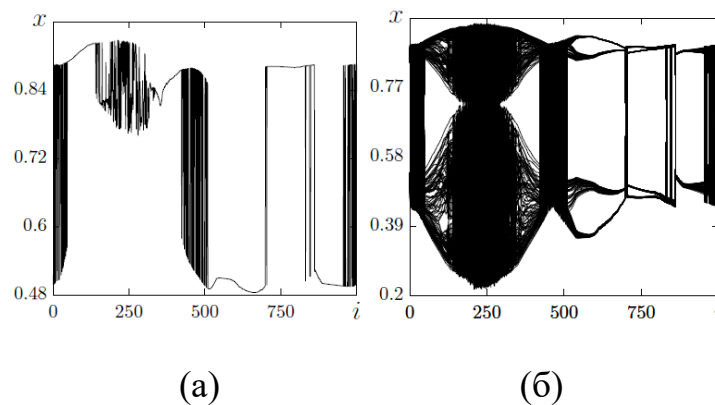


Рисунок 1.2 – Мгновенный (а) и пространственно-временной (б) профили для переменной x_i ансамбля (1.2) при $\sigma = 0.29$, $P = 160$, $\Delta = 0.001$, $\alpha = 3.8$

Далее был рассмотрен случай, когда сила связи уменьшается по экспоненциальному закону:

$$\sigma_j = \sigma \exp(-j\Delta), \quad (1.4)$$

где $j = 2, \dots, P$, Δ – некоторая малая величина. Параметр α всё также фиксирован и равен 3.8 для всех осцилляторов. Для каждого $\Delta = 0.001; 0.0001$ проводились исследования динамики ансамбля (1.2) для значений силы связи $\sigma = 0.5, 0.4, 0.37, 0.29, 0.25$ и для каждого значения радиуса связи $P = 160, 320, 500$.

Установим $\Delta = 0.001$ в выражении (1.4) при $P = 160$. С уменьшением силы связи изначально гладкий профиль искажается, и в результате приводит к появлению химерных структур. Пример типичной пространственно-временной динамики приведен на рисунке 1.3.

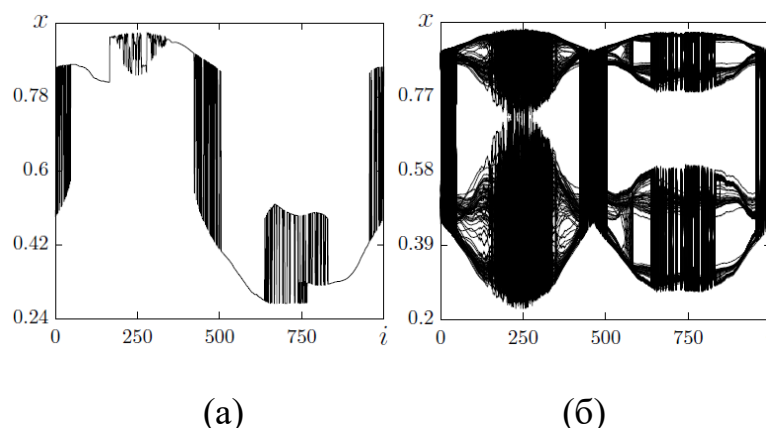


Рисунок 1.3 – Мгновенный (а) и пространственно-временной (б) профили для переменной x_i ансамбля (1.2) при $\sigma = 0.29, P = 160, \Delta = 0.001, \alpha = 3.8$

Начиная со значения $\sigma = 0.25$ и при дальнейшем его уменьшении, в ансамбле наблюдался режим пространственно-временной некогерентности.

Случай неоднородности по параметру α . Рассмотрим случай, когда сила связи уменьшается по закону (1.3), который был описан выше, но управляющий параметр α имеет случайный разброс из интервала $[3.58, 3.9]$. Численные исследования динамики ансамбля (1.2) проводились для значений $\sigma = 0.5, 0.4, 0.37, 0.29, 0.25$, для каждого $P = 320, 500$.

Установим значение радиуса $P = 320$ и величины $\Delta = 0.001$. Для этого случая фазовые химерные структуры возникают при силе связи $\sigma = 0.4$. С изменением значения (уменьшением) силы связи с $\sigma = 0.5$ до $\sigma = 0.4$, наблюдается усиление степени хаотичности колебаний осцилляторов и в реализации многоленточного (многообходного) хаотического аттрактора. В частности, при $\sigma = 0.5$, колебания элементов соответствуют двухленточному хаотическому аттрактору, напоминающему «зашумленный» цикл периода 2. На рисунке 1.4,б при $\sigma = 0.4$ колебания отвечают четырёхленточному хаотическому аттрактору.

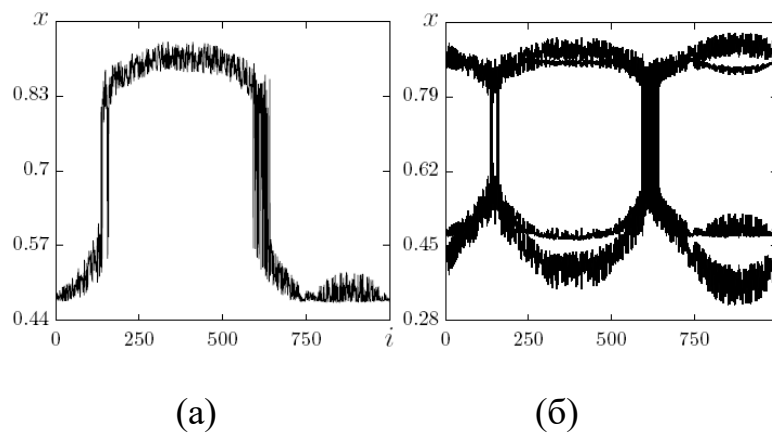


Рисунок 1.4 – Мгновенный (а) и пространственно-временной (б) профили для переменной x_i ансамбля (1.2) при $\sigma = 0.4$, $P = 320$, $\Delta = 0.001$

При уменьшении силы связи $\sigma \leq 0.29$ система (1.2) демонстрировала режим полной некогерентности.

Теперь перейдем к исследованию динамики ансамбля (1.2) для случая, когда сила нелокальной связи уменьшалась по экспоненциальному закону (1.4) с увеличением номера осциллятора. Значения параметра α случайно распределены в $[3.58, 3.9]$. Исследования динамики ансамбля (1.2) проводились для каждого $\Delta = 0.01, 0.001, 0.0001$, для значений силы связи $\sigma = 0.5, 0.4, 0.37, 0.29, 0.25$, для каждого радиуса $P = 320, 500$. При $\Delta = 0.01$ в выражении (1.4) и для радиуса связи $P = 320$ и $P = 500$ система уходит на бесконечность для всех выбранных значений σ .

Были проведены исследования для $\Delta = 0.001$. Радиус связи установлен $P = 320$. При $\sigma = 0.5$ мгновенный профиль для значений переменной x_i ансамбля (1.2) выглядел гладким (без разрывов), но зашумленным (рисунок 1.5), в силу случайного распределения значений параметра α . При уменьшении силы связи в системе возникали режимы фазовых химер.

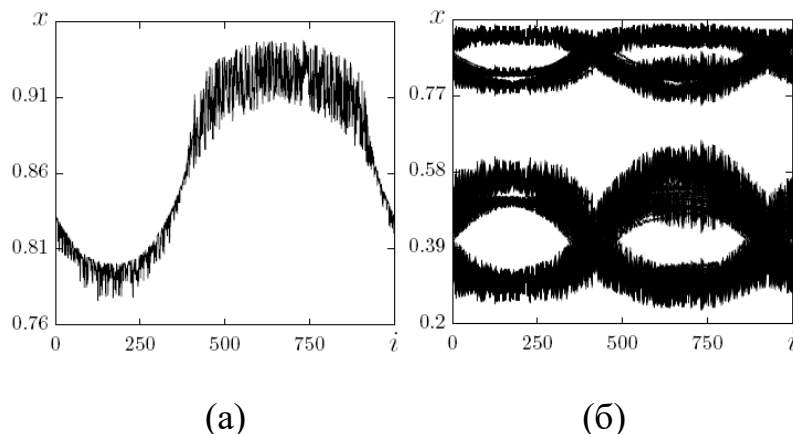


Рисунок 1.5 – Мгновенный (а) и пространственно-временной (б) профили для переменной x_i ансамбля (1.2) при $\sigma = 0.5$, $P = 320$, $\Delta = 0.001$

Для $\sigma = 0.29, 0.25$ система демонстрировала режимы пространственно-временной некогерентности.

Результаты численного анализа динамики ансамбля (1.2) нелокально связанных отображений показали, что при определенных наборах параметров: радиуса связи P , определенных значений силы нелокальной связи σ и параметра Δ , в данном ансамбле могут как существовать, так и сосуществовать режимы амплитудных и фазовых химерных структур. Было также наглядно продемонстрировано влияние неоднородности управляющего параметра α на реализацию различных пространственно-временных структур в исследуемой системе, например, для одних и тех же наборов параметров $P = 500$, $\Delta = 0.0001$ и вариации параметра σ , когда сила связи уменьшалась по экспоненциальному закону (1.4). При фиксированном параметре α был обнаружен режим полной хаотической синхронизации, но уединённых состояний не наблюдалось, когда же ввели неоднородность по параметру α , то в системе для малых значений силы нелокальной связи наблюдались уединённые состояния, режим

хаотической синхронизации обнаружен не был. В случаях, где параметр α имел случайный разброс значений из некоторого интервала, гладкие мгновенные профили не наблюдались.

2 Исследования гетерогенного ансамбля

2.1 Описание модели исследования

Объектом исследований является кольцо, состоящее из связанных отображений различного типа, и таким образом представляющее гетерогенный ансамбль. Вид уравнений кольца:

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= f(x_i^t, y_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [f(x_j^t, y_j^t) - f(x_i^t, y_i^t)], \\ y_i^{t+1} &= \beta x_i^t \end{aligned} \quad (2.1)$$

где параметр $\beta = 0.3$ фиксирован и одинаковый для обоих отображений.

В данной работе в качестве индивидуальных (парциальных) элементов выбираются двумерное отображение Эно:

$$\begin{aligned} x^{t+1} &= 1 - \alpha(x^t)^2 + y^t, \\ y^{t+1} &= \beta x^t, \end{aligned} \quad (2.2)$$

и двумерное отображение Лози:

$$\begin{aligned} x^{t+1} &= 1 - \alpha|x| + y^t, \\ y^{t+1} &= \beta x^t, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где t – дискретное время, α , β – управляющие параметры. Во всех исследованиях для обоих отображений параметры фиксированы: $\alpha = 1.4$, $\beta = 0.3$, что отвечает хаотическому режиму в отдельном осцилляторе в отсутствие связи. Начальные условия выбираются случайно распределенными в интервале $[0.1, 0.3]$, из-за того что при выборе начальных условий $[-0.5, 0.5]$ в расчетах наблюдался уход на бесконечность, так как при таких начальных условиях отображение Лози неустойчиво. Общее количество элементов в кольце $N = 1000$.

2.2 Динамика гетерогенного ансамбля

Исследования динамики гетерогенного ансамбля (2.1) связанных отображений (2.2) и (2.3) проводились при условии, когда каждый нечетный элемент ($i = 1, 3, 5, \dots$) описывался отображением Эно (2.2), а каждый четный – отображением Лози (2.3). Сила нелокальной связи σ уменьшалась от 0.5 до 0 с определенным шагом для некоторых значений радиуса связи $P = 1$ (локальная связь), 160, 193, 320 и 500 (глобальная связь).

Как показали численные исследования гетерогенного ансамбля (2.1), в кольце нелокально связанных отображений, при переходе от полной хаотической синхронизации к пространственно-временному хаосу (при уменьшении силы нелокальной связи) были обнаружены характерные структуры как для отображения Эно (2.2), так и для отображения Лози (2.3), а именно фазовые и амплитудные химеры, а также уединённые состояния. Довольно часто все они встречались при переходе когерентность-некогерентность при изменении значения радиуса связи P . Отметим наиболее интересный случай (рисунок 2.1), когда химерные структуры сосуществуют с уединёнными состояниями для $P = 320$, $\sigma = 0.3$ и $\sigma = 0.25$.

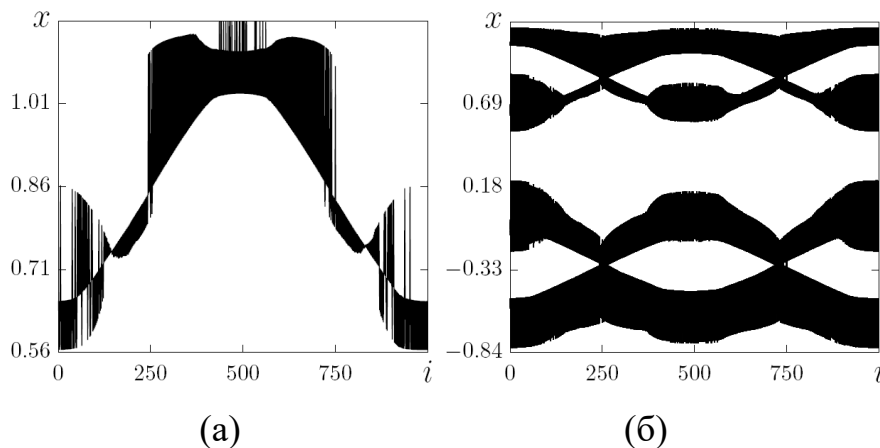


Рисунок 2.1 - Мгновенный (а) и пространственно-временной (б) профили для переменной x_i ансамбля (2.1) при $\sigma = 0.3$, $P = 320$, $\alpha = 1.4$, $\beta = 0.3$

2.3 Диаграмма характерных режимов динамики гетерогенного ансамбля

Для более ясной картины наблюдаемых режимов динамики гетерогенного ансамбля (2.1) была построена диаграмма на плоскости параметров (P, σ) , приведенная на рисунке 2.2. Для всех вычислений начальные условия выбирались случайно распределенными в интервале $[0.1, 0.3]$. Шаг по параметру σ в интервале $[0, 1]$ составляет 0.05, а по параметру P – в интервале $[1, 499]$, он равен 10. Значения управляющих параметров выбрано $\alpha = 1.4$, $\beta = 0.3$, что отвечает хаотическому режиму в отдельном осцилляторе в отсутствие связи. На представленной диаграмме (см. рисунок 2.2) различными цветами показаны области характерных режимов динамики, которые наблюдаются для гетерогенного ансамбля (2.1) отображений (2.2 – 2.3) на плоскости параметров (P, σ) . Синяя область – нерегулярные режимы, оранжевая – химерные структуры, желтая – стоячие волны, зелёная – полная синхронизация.

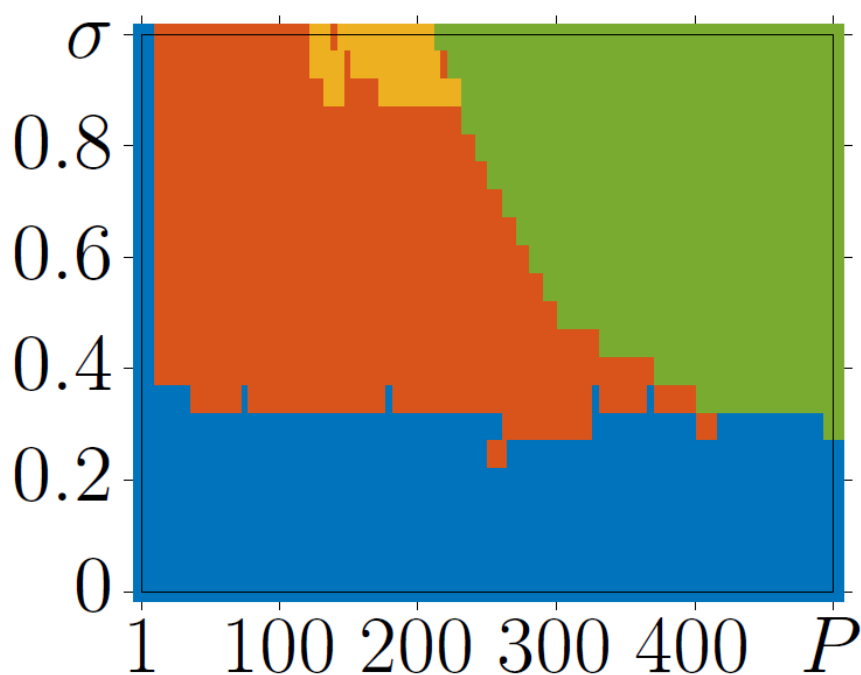


Рисунок 2.2 – Диаграмма характерных режимов динамики гетерогенного ансамбля (2.1) отображений (2.2 – 2.3) на плоскости параметров (P, σ)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения магистерской работы были проведены численные исследования динамики неоднородного ансамбля нелокально связанных логистических отображений и гетерогенного ансамбля, где каждый нечетный элемент описывался отображением Эно, каждый четный – отображением Лози. Численные расчёты проводились с использованием компьютерной программы, разработанной аспирантами кафедры радиофизики и нелинейной динамики.

Проведен детальный численный анализ динамики ансамбля нелокально связанных логистических отображений в присутствии неоднородности по параметрам α и σ . Показано, что для случая с неоднородным распределением значений управляющего параметра α , неоднородность ведет к зашумлению мгновенных пространственных и пространственно-временных профилей динамики ансамбля. Также в определенных интервалах вариации значений силы нелокальной связи σ в ансамбле наблюдались фазовые и амплитудные химеры. Для случая неоднородности по силе связи σ между элементами при определенных наборах параметров: радиуса связи R , определенных значений силы нелокальной связи σ и параметра Δ , могут как существовать, так и сосуществовать режимы амплитудных и фазовых химерных структур. В ходе исследования гетерогенного ансамбля, при уменьшении силы нелокальной связи, были обнаружены характерные структуры как для отображения Эно, так и для отображения Лози, а именно фазовые и амплитудные химеры, а также уединённые состояния. Было также продемонстрировано, что химерные структуры могут сосуществовать с режимом уединённых состояний. Построена диаграмма характерных режимов динамики гетерогенного ансамбля на плоскости параметров (R, σ) , по которой можно определить области существования различных режимов в зависимости от изменения параметров связи.