

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Влияние аддитивного и мультипликативного шума на динамику
одномерных ансамблей нелокально связанных хаотических отображений**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 2232 группы
направления 03.04.03 Радиофизика
Института физики
Клюшиной Дарьи Юрьевны

Научный руководитель

зав. кафедрой, д.ф.-м.н., доцент _____ Г.И. Стрелкова

Зав. кафедрой радиофизики

и нелинейной динамики,

д.ф.-м.н., доцент _____ Г.И. Стрелкова

Саратов 2021

ВВЕДЕНИЕ

Важной задачей нелинейной динамики является изучение сложных пространственно-временных режимов, а также условий их установления, поддержания, разрушения или синхронизации. Одними из последних найденных пространственно-временных структур, обнаруженных в ансамблях нелокально связанных элементов, являются химерные структуры. Все объекты в окружающем нас мире связаны между собой посредством различных сетей. Транспортные развязки, социальные сети, косяки рыб и другие биологические сети, - всё это наглядные примеры многообразия реальных сетей. В системах с нелокальной связью была обнаружена интересная динамика, в последствие названная химерой. Под химерными состояниями понимают рождение ярко выраженных кластеров с некогерентными (несинхронными) колебаниями в локализованных областях пространства осцилляторов, в то время как все другие элементы ансамбля демонстрируют когерентную (синхронную) динамику. Они были обнаружены в широком классе различных моделей, включающих как дискретные отображения, так и дифференциальные системы с регулярной и хаотической динамикой. Существование химерных состояний многократно подтверждено не только численно, но и экспериментально.

В данной работе химерные состояния были рассмотрены на примере кольца нелокально связанных отображений Эно.

Целями выпускной квалификационной работы являются наблюдение химер уединённых состояний и анализ влияния шумового воздействия на время жизни амплитудных и фазовых химер в ансамбле нелокально связанных отображений Эно.

Для достижения этих целей были поставлены следующие **задачи**:

1. На примере временных реализаций для выбранных осцилляторов из областей существования химерных структур провести наблюдение и установить наличие химер уединённых состояний.

2. Исследовать влияние источника шума с нормальным распределением на области реализации фазовых химер при различной интенсивности и силе связи между элементами.
3. Исследовать влияние источника шума с равномерным распределением на области реализации фазовых химер при различной интенсивности и силе связи между элементами.
4. Исследовать зависимость времени жизни амплитудных и фазовых химер от шумового воздействия различной интенсивности при вариации силы связи.

Основное содержание работы. В главе 1 приводится краткий обзор состояния разработок по теме, исследуемой в рамках ВКР.

Глава 2 посвящена исследованию влияния аддитивного шума на области реализации фазовых и амплитудных химер по σ для различных D .

Исследовалась динамика кольца нелокально связанных двумерных отображений, которое описывается следующей системой:

$$x_i^{t+1} = f(x_i^t, y_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{j+P} [f(x_j^t, y_j^t) - f(x_i^t, y_i^t)],$$

$$y_i^{t+1} = \beta x_i^t$$
(1)

где x_i - вещественная динамическая переменная; $i = 1, 2, \dots, N$ - порядковый номер замкнутых в кольцо парциальных осцилляторов; N - число осцилляторов в ансамбле; t - дискретное время; σ - коэффициент связи; P - число соседних осцилляторов слева и справа от i -го осциллятора; $r = P/N$ - радиус связи. $f(x, y)$ и $g(x, y)$ являются функциями двумерного отображения, которое управляет динамикой индивидуального элемента. В нашем исследовании мы выбираем отображение Эно:

$$x_i^{t+1} = 1 - \alpha_0(x_i^t)^2 + y_i^t,$$

$$y_i^{t+1} = \beta x_i^t$$
(2)

Для исследования была выбрана система (1) со следующими параметрами: $r=0.32$, $P=320$, $N=1000$, $\alpha_0 = 1,4$ и $\beta = 0,3$.

Мы исследуем сеть (1) как без шума, так и при наличии внешнего шума, когда параметр α модулируется мультипликативным источником шума следующим образом:

$$\alpha = \alpha_0(1 + \sqrt{2D}\xi^t), \quad (3)$$

где ξ^t - случайный процесс, равномерно распределенный в интервале $[-1; 1]$, D - интенсивность шума. Начальные условия по x выбираются случайным образом в интервале $[-0,5; 0,5]$, по y в интервале $[-0,15; 0,15]$.

Для выбранных значений α_0 и β и определенных значений σ и r кольцо нелокально связанных осцилляторов может демонстрировать два различных типа химерных состояний, а именно фазовые и амплитудные химеры.

Анализировалась динамика системы в отсутствие шума ($D=0$). При малой силе связи σ элементы ведут себя практически независимо друг от друга (рисунок 1).

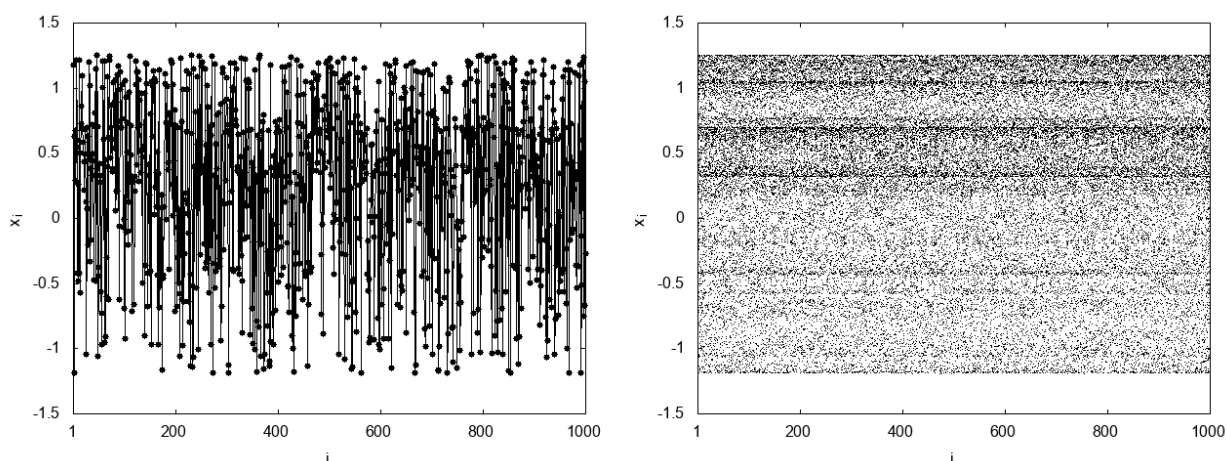


Рисунок 1 - Мгновенный профиль (слева) и пространственно-временной профиль (справа) для $\sigma = 0.02$. Параметры системы: $r = 0.32$, $\alpha_0 = 1,4$ и $\beta = 0,3$, $N = 1000$.

Динамика ансамбля (1) исследовалась при изменении силы нелокальной связи в интервале $\sigma \in [0;1]$, но уже при $\sigma=0.61$ динамика ансамбля (1) становится когерентной (пространственно-однородной) (рисунок 2,а), а затем

реализуется режим полной хаотической синхронизации (рисунок 2,б).

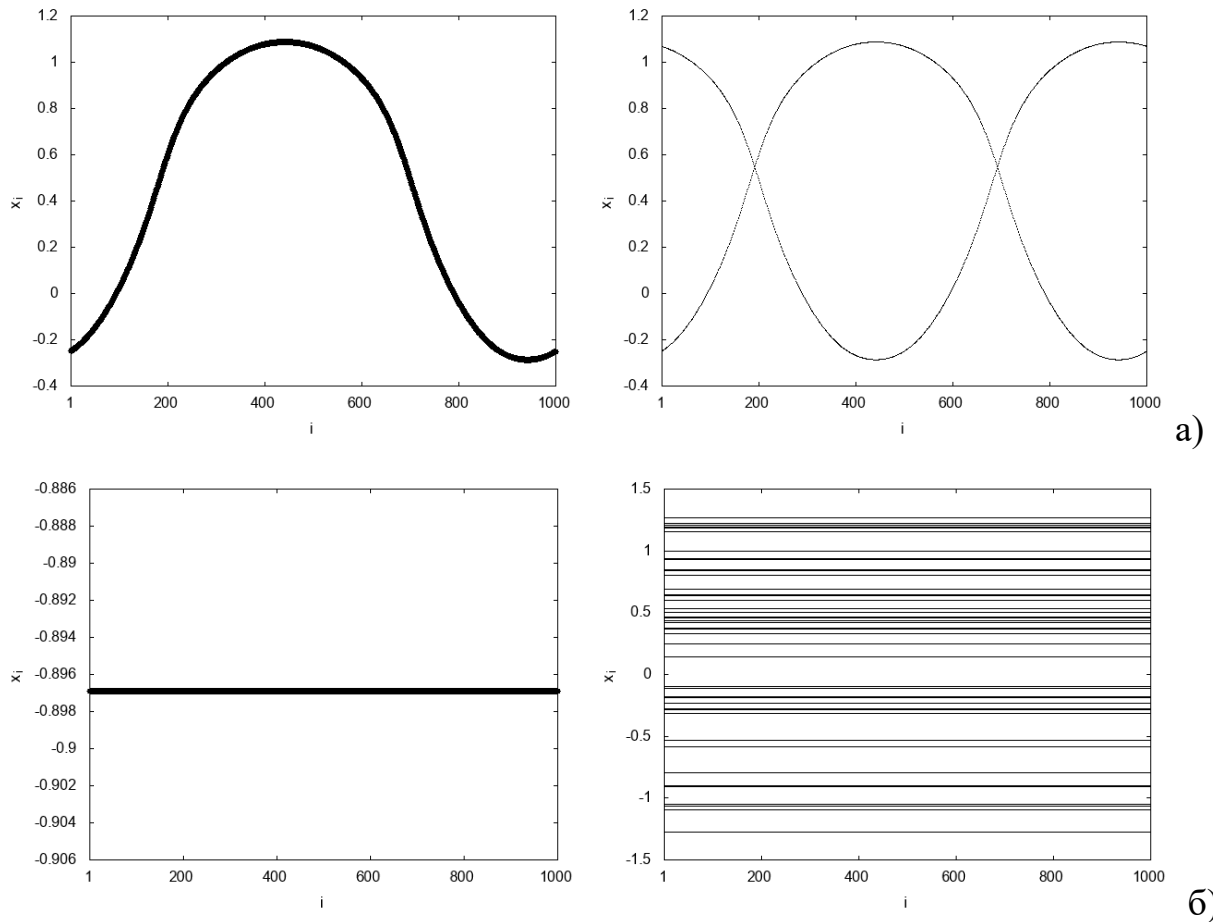


Рисунок 2 - Мгновенные профили (слева) и пространственно-временные профили (справа): а) для $\sigma = 0.6$; б) для $\sigma = 0.61$. Параметры системы: $r = 0.32$, $\alpha_0 = 1,4$ и $\beta = 0,3$, $N = 1000$.

Также исследовалось глобальное влияние шума (на все элементы ансамбля) с начала отсчёта (с $t=0$). Интенсивность источника шума изменялась в интервале $D \in [10^{-10}; 10^{-3}]$ при вариации силы связи $\sigma \in [0;1]$ (рисунки 3 и 4).

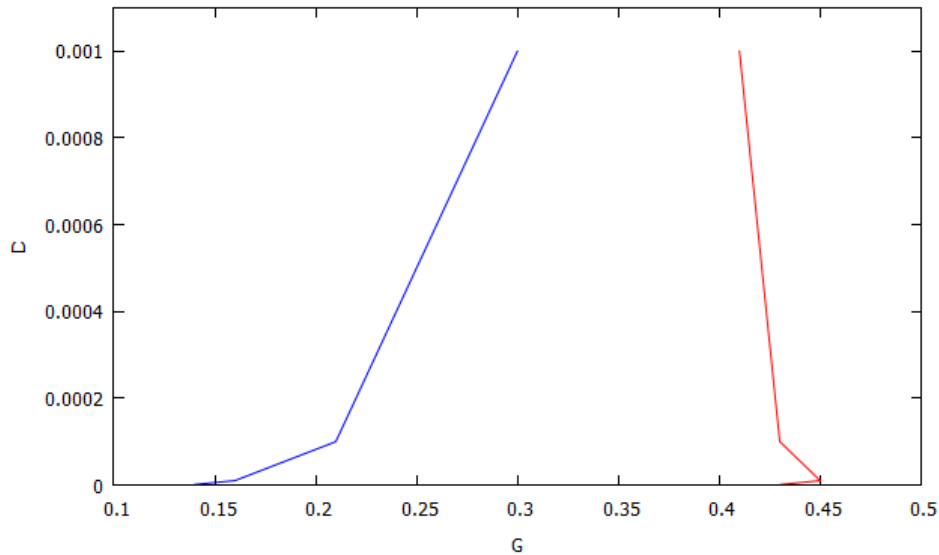


Рисунок 3 – Границы моментов появления (синяя кривая) и исчезновения (красная кривая) фазовых химер на плоскости параметров «силы связи - интенсивности шума».

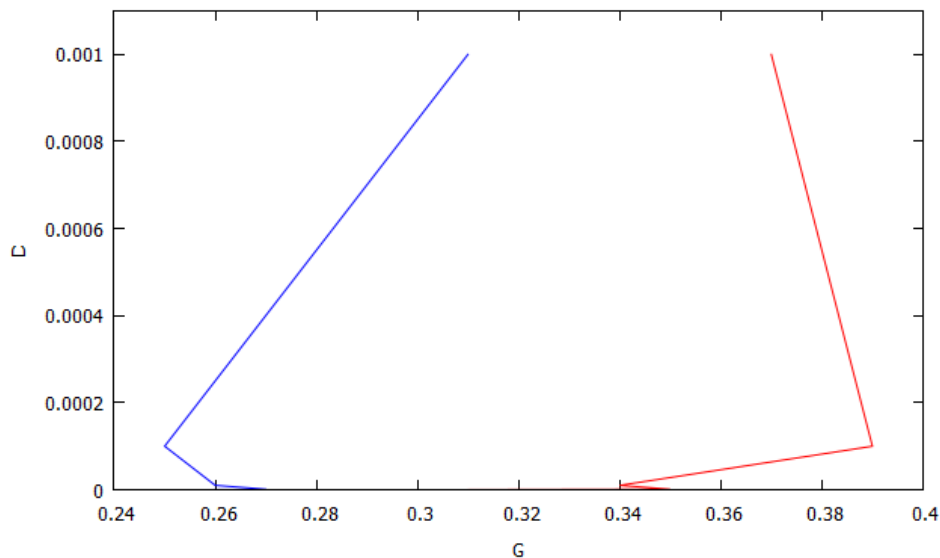


Рисунок 4 - Границы моментов появления (синяя кривая) и исчезновения (красная кривая) амплитудных химер на плоскости параметров «силы связи - интенсивности шума».

Кроме фазовых и амплитудных химер, в ансамбле нелокально связанных отображений Эно возможна реализация режимов уединённых состояний и соответствующих химерных структур. На рисунке 5 им соответствуют осцилляторы с номерами $i \in [800; 1000]$.

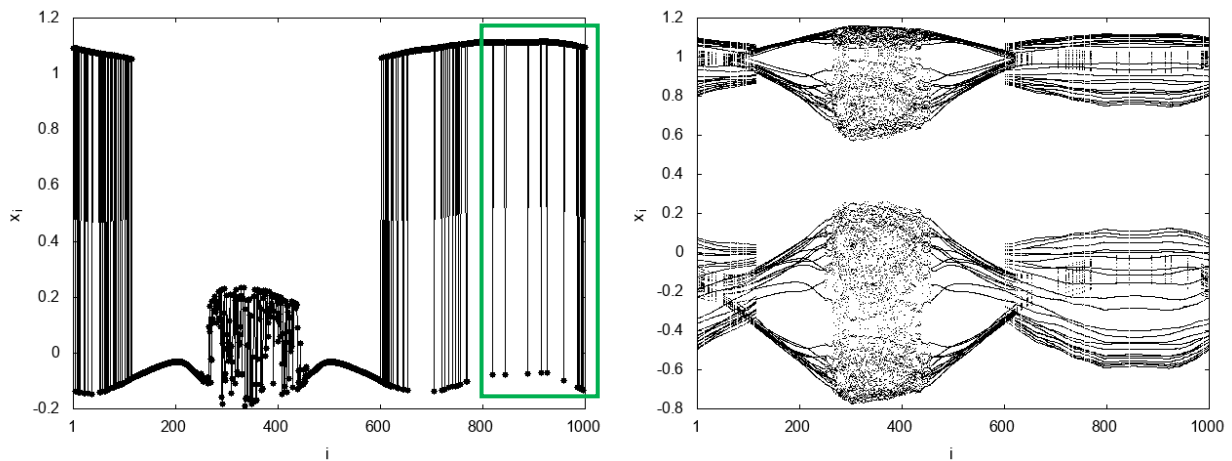


Рисунок 5 - Мгновенный профиль (слева) и пространственно-временной профиль (справа) для $\sigma = 0.27$, $D=0.27$. Параметры системы: $r = 0.32$, $\alpha_0 = 1.4$ и $\beta = 0.3$, $N = 1000$.

Наши исследования показывают, что амплитудные химеры образуются для больших значений σ , чем фазовые, а исчезают при значениях силы связи меньше, чем для фазовых химер. Динамика ансамбля (1) без шума, как и в его присутствии, становится когерентной (пространственно-однородной), а затем реализуется режим полной хаотической синхронизации.

В данной работе исследуется влияние неоднородного распределения управляющих параметров парциальных элементов на возможность установления режима фазовых химер и химер уединенных состояний при постоянном изменении управляющих параметров на каждой итерации и при их фиксированном распределении. При этом неоднородность вводится с помощью двух генераторов шума – с равномерным и нормальным распределениями.

В главе 3 проводилось исследование влияния источника шума с нормальным распределением на области реализации фазовых химер при различной интенсивности и силе связи между элементами. Управляющий параметр системы (2) α_i^t в общем случае является случайно распределённой величиной. Данный параметр можно расписать как $\alpha_i^t = \alpha_0 + D_\alpha \xi_i^t + A_\alpha \psi_i^t$, где ξ – генератор шума с равномерным распределением в интервале $[-1;1]$, D_α – интенсивность равномерно распределенного шума ($2D_\alpha$ – ширина интервала, в котором равномерно распределены случайные значения), ψ – генератор шума

со стандартным нормальным распределением ($\mu = 0, \sigma_\xi = 1$), A_α – интенсивность равномерно распределённого шума или стандартное отклонение. Параметр $\alpha_0=3.8$ – среднее значение силы связи, которое одинаково для всех элементов системы. Неоднородность вводится через случайное распределение параметра по всему ансамблю, которое задаётся в начале интегрирования и не изменяется. В этом случае можно записать $\alpha_i = \alpha_0 + D_\alpha \xi_i + A_\alpha \psi_i$.

Используя мгновенные профили пространственной кросс-корреляции, по которым легче распознать фазовую химеру при сильно неоднородном распределении управляющего параметра элементов (при больших значениях A_α), были построены области существования фазовых химер на плоскости параметров σ – A_α . (рис.1). Для построения этой области использовались 50 различных реализаций начальных распределения динамической переменной x_i^0 , случайно выбранных из интервала [0:1). Цветом на карте показано, сколько начальных условий (L) приводит к установлению фазовых химер при данных параметрах, красная линия отображает медианное значение границ наблюдения фазовых химер по всем начальным условиям.

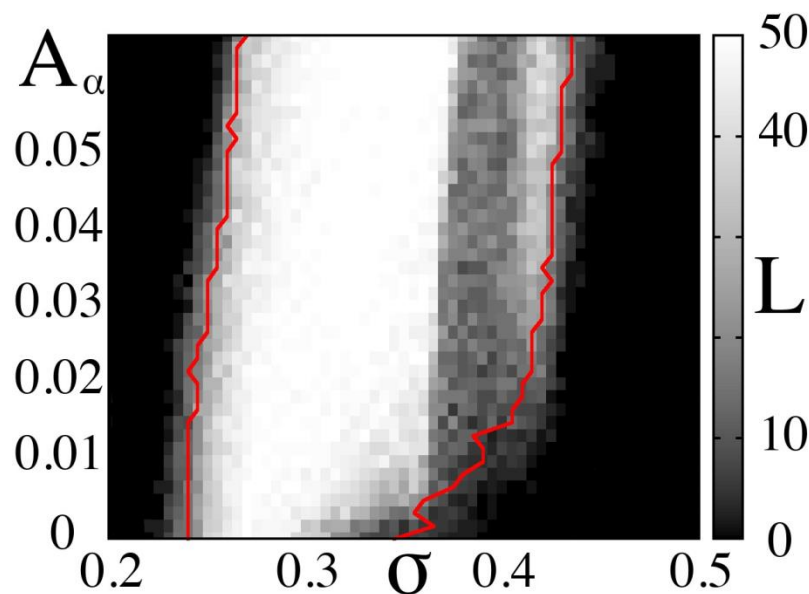


Рисунок 6 - Области существования химерных структур в системе (1) на плоскости параметров (σ – A_α) для случая фиксированного распределения параметра при нормальном распределении. L – количество начальных условий динамических переменных элементов ансамбля, приводящих к установлению фазовых химер при данных параметрах. Красные линии – медианные значения границ наблюдения фазовых химер по всем начальным условиям. Остальные параметры: $\alpha_0 = 1.4, P = 320, N = 1000$.

В главе 4 анализируется исследование влияния источника шума с равномерным распределением на области реализации фазовых химер при различной интенсивности и силе связи между элементами.

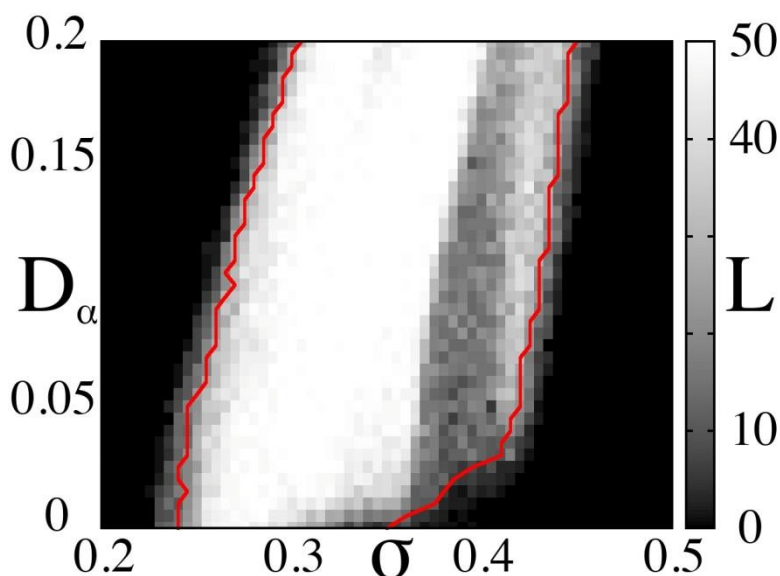


Рисунок 7 - Области существования химерных структур в системе (1) на плоскости параметров $(\sigma-D_\alpha)$ для случая фиксированного распределения параметра при равномерном распределении управляющего параметра. L – количество начальных условий динамических переменных элементов ансамбля, приводящих к установлению фазовых химер при данных параметрах. Красные линии – медианные значения границ наблюдения фазовых химер по всем начальным условиям. Красные и синие точки – параметры, соответствующие установлению химер уединенных состояний для двух различных начальных условий. Остальные параметры: $\alpha_0 = 1.4, P = 320, N = 1000$.

В главе 5 исследовалась модель Фитцхью-Нагумо при помощи моделирования, сложных вычислительных алгоритмов, интерактивной визуализации сайта The Virtual Heart (<http://dev1.thevirtualheart.org/>). Данная модель позволяет пронаблюдать важное явление в изучении динамики сердца – явление реституции сердечной ткани.

Мы реализуем модель, описываемую следующими уравнениями:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (a - V)(V - 1)V - v \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \epsilon(\beta V - \gamma v - \delta) \quad (2)$$

где V – напряжение (быстрая переменная), v – v -образный затвор (медленная переменная), a – порог возбуждения, ϵ – возбудимость, γ и δ –

параметры, изменяющие состояние покоя и динамику, t – время интегрирования.

Этот Java-апплет показывает продукцию напряжения тока клеткой, используя модель Фитцхью-Нагумо как функцию времени после того, как она простимулирована выше своего порогового значения.

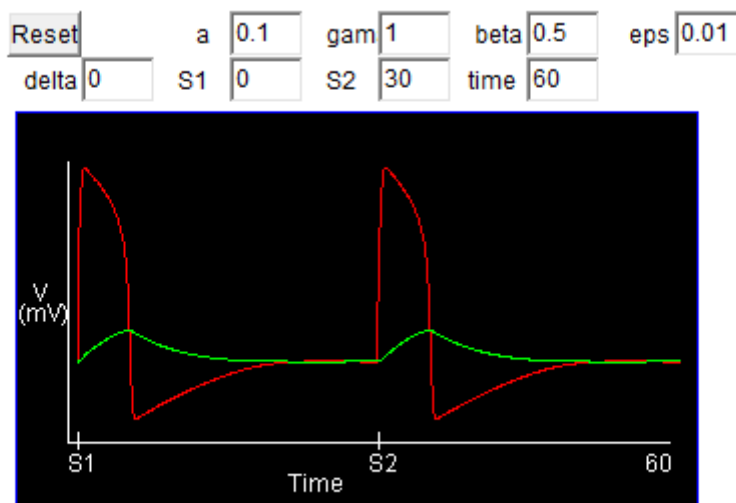


Рисунок 8 - Визуализация модели ФХН с начальными значениями параметров

Связь между длительностью потенциала действия (APD) и количеством времени между предыдущей активацией и вторым стимулом (диастолический интервал или DI) известна как реституция и является важной характеристикой сердечной ткани. Когда частота сердечных сокращений увеличивается, например, во время физической нагрузки, длины клеточных сигналов, которые инициируют мышечные сокращения, сокращаются аналогичным образом, чтобы обеспечить эффективное заполнение сердечных камер и выброс крови. Без такой адаптации желудочки не заполнялись бы перед сокращением во время более быстрого сердечного ритма. Функция, которая связывает APD с DI, известна как кривая реституции, и имеет значение в изучении динамики сердца.

Заключение. В ходе выпускной квалификационной работы было установлено наличие эффекта уединённых химерных состояний.

Амплитудные химеры образуются для больших значений σ , чем фазовые, а исчезают при значениях силы связи меньше, чем для фазовых химер.

Динамика ансамбля (1) без шума, как и в его присутствии, становится когерентной (пространственно-однородной), а затем реализуется режим полной хаотической синхронизации. Помимо фазовых и амплитудных химер в ансамбле нелокально связанных отображений Эно возможна реализация режимов уединённых состояний.

Введение в систему неоднородности по управляющему параметру парциальных элементов в кольцо нелокально связанных двумерных отображений Эно ведёт к изменению области наблюдения химерных состояний по силе связи между элементами. В области слабой связи между элементами ансамбля динамика и реализации системы существенно меняются (визуально и происходит смена фазы синхронизации). Введение в систему неоднородного распределения параметра α и увеличение A_α в области сильной связи между элементами ансамбля приводит к изменению коэффициента синхронизации между элементами ансамбля, но не приводит к смене фазы синхронизации.

На примере модели Фитцхью-Нагумо было продемонстрировано важное явление в изучении динамики сердца – явление реституции сердечной ткани.