

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Взаимодействие двух связанных одномерных ансамблей нелокально
связанных генераторов Анищенко – Астахова с параметрическим
воздействием на элементы связи между ансамблями**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента(ки) 2 курса 2232 группы
направления 03.04.03 Радиофизика
Института физики
Сафронова Максима Вячеславовича

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н.

_____ А.В. Слепнев

Зав. кафедрой радиофизики

и нелинейной динамики,

д.ф.-м.н., доцент

_____ Г.И. Стрелкова

Саратов 2021 г.

Введение

Существует огромное количество различных связанных осцилляторных систем, разнообразие которых обусловлено природой осцилляторов, способом их соединения и внешними силами, которые выводят систему из равновесия. Специфичная система, которая привлекла большое внимание, представляет собой совокупность большого количества связанных осцилляторов предельного цикла со случайно распределенными собственными частотами [1]. Эта система использовалась как простая модель для связанного химического, биологического или физического осциллятора. Наиболее характерным коллективным явлением, обнаруженным с помощью этой модели, является фазовый переход синхронизации, включающий взаимное увлечение осцилляторов посредством частотной и фазовой синхронизации. Однако в этой модели связь считается достаточно слабой, чтобы на амплитуду это не влияло. В результате модель не может описать амплитудные неустойчивости. Система, которая демонстрирует большое разнообразие амплитудных неустойчивостей, состоит из связанных параметрических осцилляторов [2, 3].

Существует огромное количество литературы по отдельным параметрическим осцилляторам с периодически [4] или стохастически [5] модулированными частотами, возможно, также подверженными тепловым флуктуациям [6]. Широкий спектр линейных и нелинейных, детерминированных и стохастических систем, которые проявляют энергетическую неустойчивость, можно моделировать как простые параметрические осцилляторы, испытывающие амплитудную нестабильность, известную как «параметрический резонанс». Примеры включают механические системы, в которых такие резонансы были впервые идентифицированы [4, 7–9], элементарные частицы [10], квантовые точки [11], астрофизику [12], механику жидкости [13], физику плазмы [14], электронные сети [15], сверхпроводящие и лазерные устройства [16] и лазерные пучки в нелинейных волноводах [17], биомеханику [18] и даже медицину [19].

Недавно были предложены связи с хаотическими системами [20]. Простейший и, пожалуй, самый знакомый пример параметрического резонанса возникает в гармоническом осцилляторе, частота которого периодически изменяется во времени [4, 7–9, 13]. Для определенных диапазонов параметров модуляции (частота, амплитуда) генератор неустойчив, в то время как для других он стабилен. Даже для этой, казалось бы, простой системы граничная диаграмма устойчивости уже достаточно богата и сложна.

Хотя понятие связи таких параметрических осцилляторов возникает естественным образом в ряде контекстов, в которых отдельные параметрические осцилляторы обеспечивают богатую феноменологию, работа над связанными параметрическими осцилляторами затруднена из-за сложности проблемы. С некоторыми исключениями [17] работа, предшествующая [18], была ограничена глобальной параметрической модуляцией, которая действует на все осцилляторы одинаково. В качестве примеров можно привести электроны с параметрической накачкой в ловушке Пеннинга [19], системы синус-Гордона с параметрическим возбуждением [20, 21], формирование структуры при глобальном резонансном воздействии [22], периодическая нагрузка упругой системы [19] и нелинейных параметрически управляемых решеток [27].

В работе [25] следуют описанному ранее пути перехода к многомерному (среднему полю) случаю. Находят, что детальная аналитическая теория возможна не только в приближении среднего поля, но и что этот анализ возможен при наличии фазового беспорядка. Насколько известно, это первая модель с пространственно случайной фазовой модуляцией, которая приводит к коллективному взаимодействию.

В более ранней работе [2] введена модель, которая состоит из бесконечного набора глобально связанных гармонических осцилляторов, подверженных периодическим кусочно-постоянным модуляциям со случайным распределением подавленных фаз. («Подавленная» в этом контексте означает, что фаза частотной модуляции каждого генератора

устанавливается в момент времени $t = 0$ и затем остается неизменной). В [2] показали появление коллективной параметрической неустойчивости: даже если каждый отдельный осциллятор находится в своей области стабильных параметров, средняя амплитуда связанной системы может монотонно расходиться. Эта коллективная неустойчивость возникает, когда амплитуда параметрической модуляции достаточно велика, что мгновенная частота осцилляторов временно становится мнимой. Неустойчивость является повторной по отношению к силе связи генераторов и сохраняется в пределах демпфирования. При наличии насыщающей нелинейности [28] он генерирует бифуркацию вил, соответствующую подлинному неравновесному фазовому переходу второго рода (подразумевающему спонтанное нарушение пространственной симметрии и эргодичности).

В дополнение к неустойчивости системы измерения, описываемой монотонным ростом средней амплитуды, глобально связанная бесконечная система также может претерпевать переходы к коллективной колебательной неустойчивости с внутренней частотой, которая не связана простым способом либо на частоты отдельных осцилляторов, либо на частоту внешней модуляции. Насыщающая нелинейность превращает эту неустойчивость в бифуркацию Хопфа, порождая предельный цикл с сопутствующим нарушением временной симметрии и эргодичности [28]. Кроме того, даже когда амплитуда модуляции очень мала, монотонный рост все еще может происходить, но через механизм, полностью отличающийся от того, который был определен ранее.

Пытаясь объяснить это коллективное поведение, одно впечатление производит сходство с введенной ранее простой моделью [3] двух связанных параметрических генераторов, которые периодически модулируются с фиксированной разностью фаз θ между их модуляциями. Поведение этого димера, когда $\theta = \pi$, поразительно похоже на поведение глобально связанной бесконечной системы, и корни неустойчивости, наблюдаемые в последней, уже присутствуют в этой простой системе. На еще более первичном уровне

начало этих коллективных нестабильностей можно проследить до поведения отдельных осцилляторов. В общем, отдельный генератор имеет тенденцию синхронизироваться с внешней модуляцией, тогда как связь вызывает взаимную синхронизацию между генераторами. Эти две тенденции синхронизации не всегда могут быть выполнены одновременно. Тогда связь между осцилляторами можно рассматривать как ведущую к некоторому «отбору» среди режимов одиночного осциллятора, который усиливает одни (дестабилизация) и сглаживает другие (стабилизация). Тесная связь между моделью среднего поля и очень маленькими системами также приводит к тому, что система среднего поля может также описывать некоторые аспекты больших систем меньшего размера, такие как, например, одномерная цепочка параметрических генераторов с соседними связями. Например, в одномерном массиве параметрических осцилляторов с избыточным затуханием обнаруживается неравновесный фазовый переход, который является реентерабельным по отношению к пространственной связи, в соответствии с предсказанием теории среднего поля [29]. Эти соответствия придают дополнительную ценность информации в модели среднего поля за пределами ограничений конкретной модели.

В работе [30] была пересмотрена модель среднего поля глобально и гармонически связанных параметрических осцилляторов подверженных периодическому блочному воздействию с изначально случайными фазами. В дополнение к известной параметрической неустойчивости, было обнаружено два случая коллективной неустойчивости. В одном из них средняя амплитуда расходится монотонно, в другом – колебательно. Частоты коллективной неустойчивости при этом не имеют простой связи с собственными частотами отдельных осцилляторов или с частотой внешнего воздействия. Численное моделирование показало, что коллективная неустойчивость присутствует только в системах, с взаимодействием между соседними генераторами, как и в модели среднего поля.

В работе [31] изучена синхронизация пространственно-временных структур в двухслойной сети связанных хаотических отображений, где каждый слой представлен хаотическим кольцом. Было показано, что модуляция силы межслойной связи при помощи цветного шума, оказывает значительное влияние на динамику сети, и в частности, на степень синхронизации пространственно-временных структур взаимодействующих слоев, изначально проявляющих химерные состояния.

Для обобщения результатов, полученных в [31], на случай систем с непрерывным временем и выявления новых эффектов, возникающих в них при параметрическом внешнем воздействии, в рамках данной выпускной квалификационной работы будет рассмотрено взаимодействие двух диффузионно связанных одномерных ансамблей нелокально связанных хаотических генераторов при параметрическом воздействии на элементы связи между ними.

Выпускная квалификационная работа состоит из двух глав, которые включают в себя:

- 1. Модель и методы исследования***
- 2. Исследование динамики двух связанных хаотических генераторов при параметрическом воздействии на элементы связи***

Основное содержание работы

В данной работе исследовалось взаимодействие двух связанных одномерных ансамблей нелокально связанных генераторов Анищенко – Астахова с параметрическим воздействием на элементы связи между ансамблями.

Исследуемая система уравнений имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{1,i} = mx_{1,i} + y_{1,i} - x_{1,i}z_{1,i} + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} (x_{1,j} - x_{1,i}) + (k + A_p \sin(\omega_p t))(x_{2,i} - x_{1,i}), \\ \dot{y}_{1,i} = -x_{1,i} + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} (y_{1,j} - y_{1,i}), \\ \dot{z}_{1,i} = g(\Phi(x_{1,i}) - z_{1,i}), \\ \dot{x}_{2,i} = mx_{2,i} + y_{2,i} - x_{2,i}z_{2,i} + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} (x_{2,j} - x_{2,i}) + (k + A_p \sin(\omega_p t))(x_{1,i} - x_{2,i}), \\ \dot{y}_{2,i} = -x_{2,i} + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} (y_{2,j} - y_{2,i}), \\ \dot{z}_{2,i} = g(\Phi(x_{2,i}) - z_{2,i}). \end{array} \right.$$

Как видно из уравнений, в системе присутствует элемент связи между двумя ансамблями, на который подается параметрическое воздействие. Синусоидальное параметрическое воздействие выбрано для того, чтобы при нулевой частоте такого воздействия сила связи между двумя ансамблями становилась равной k .

Синхронизация на частотах, близких к собственной частоте отдельных элементов, напоминает синхронизацию через захват частоты, а синхронизация на частоте $\omega = \omega_i$ напоминает синхронизацию через подавление собственной частоты. Однако, ключевых синхронизации, как в классических случаях синхронизации автоколебательных систем, выделить не удастся.

Из рис. 3 видно, что на частотах, близких к собственным частотам парциальных элементов, наблюдаются резонансные явления — существуют области оптимальных значений амплитуды параметрического воздействия, на

которых пространственно-временные структуры синхронны. При значениях амплитуд параметрического воздействия меньших или больших этих оптимальных значений синхронизация не наблюдается. Причем ширины областей оптимальных значений амплитуд различны для разных частот параметрического воздействия.

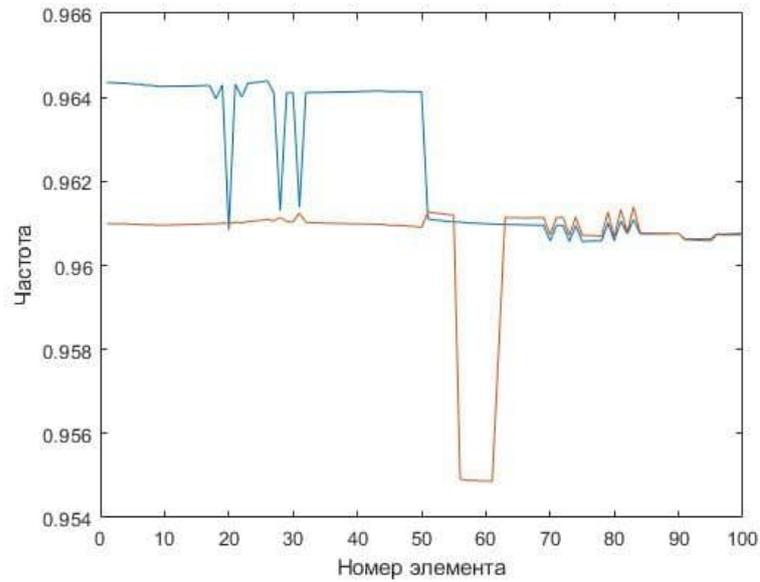


Рисунок 1. Собственные частоты генераторов, синим и фиолетовым цветом показано первое и второе кольцо из генераторов соответственно.

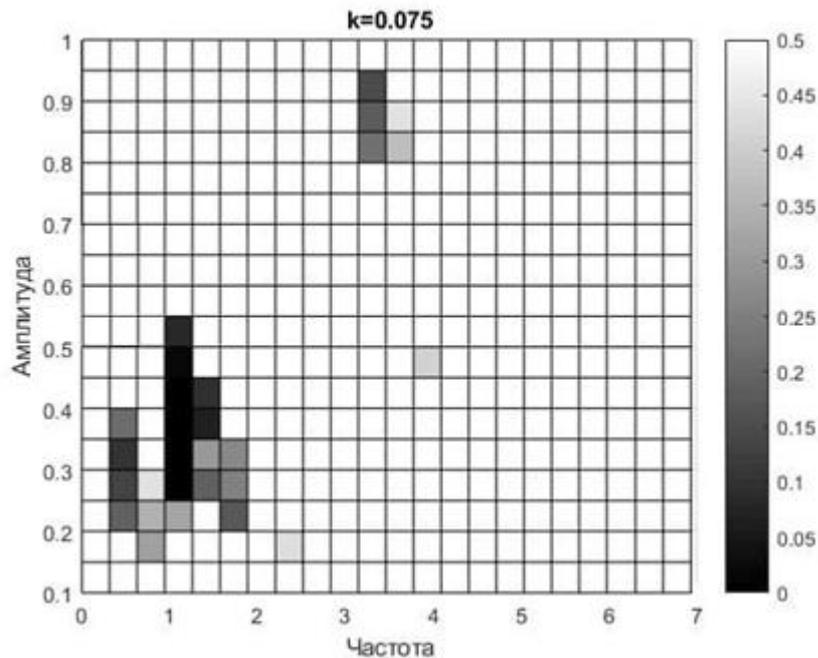


Рисунок 2. Области синхронизации двух колец генераторов при параметрическом воздействии.

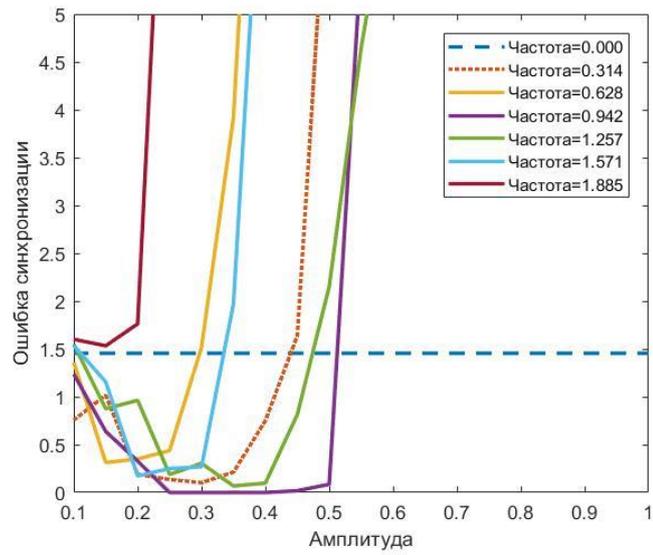


Рисунок 3. Резонанс на частотах близких к собственным частотам генераторов.

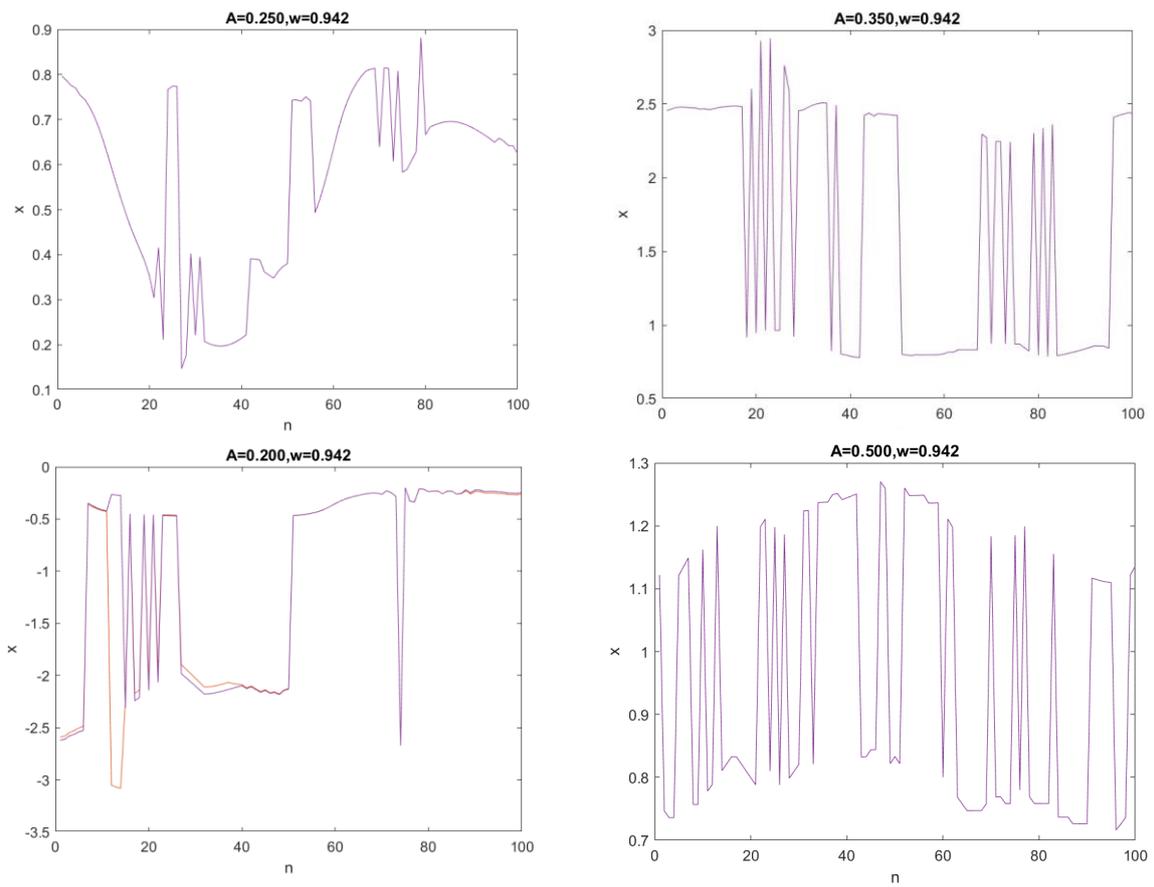


Рисунок 4. Пространственные профили двух колец генераторов.

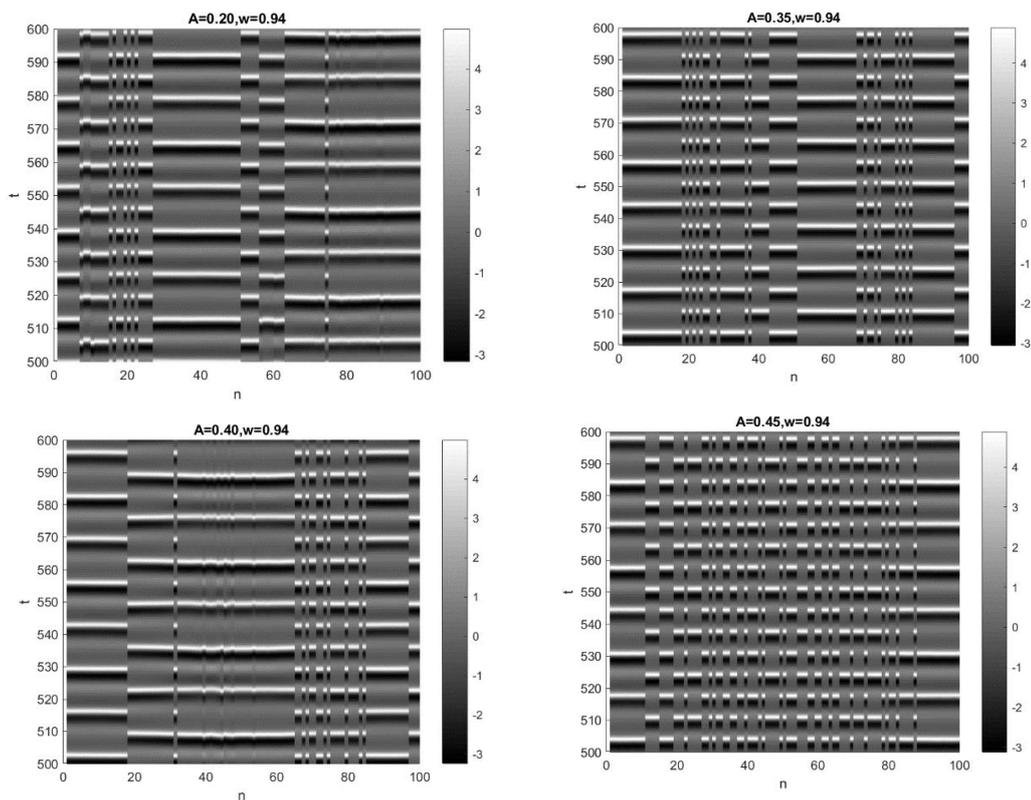


Рисунок 5. Пространственные диаграммы при синхронизации двух колец.

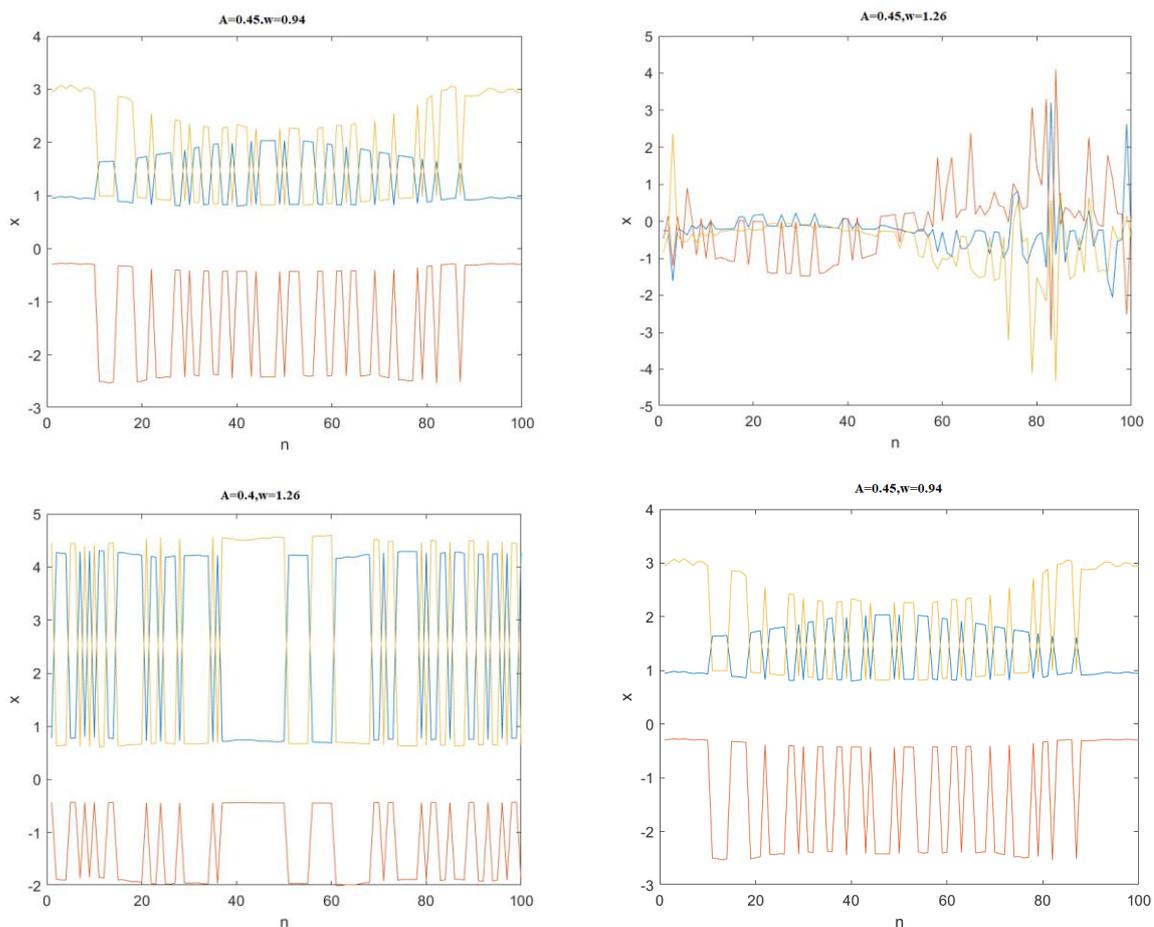


Рисунок 6. Пространственно-временные профили при различных параметрах внешнего воздействия.

Заключение

В работе проведено исследование взаимодействия двух связанных одномерных ансамблей нелокально связанных генераторов Анищенко – Астахова с параметрическим воздействием на элементы связи между ансамблями.

Было показано, что при внешнем параметрическом воздействии в системе существуют области синхронизации, но выделить именно клювы синхронизации не удалось. На частотах, близких к собственным частотам парциальных элементов, наблюдаются резонансные явления — существуют области оптимальных значений амплитуды параметрического воздействия, на которых пространственно-временные структуры синхронны. При значениях амплитуд параметрического воздействия меньших или больших этих оптимальных значений синхронизация не наблюдается. Причем ширины областей оптимальных значений амплитуд различны для разных частот параметрического воздействия. При этом система из химерного состояния переходит в некий периодический режим.

Таким образом, можно говорить о различиях в эффектах, наблюдающихся при синхронизации пространственных структур в дискретных и непрерывных связанных одномерных ансамблях хаотических элементов при внешнем параметрическом воздействии на элементы связи между ансамблями, которые требуют дальнейшего изучения.

Список использованной литературы

1. Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence* // 1984, Springer-Verlag, Berlin.
2. I. Bena and C. Van den Broeck Note that the model can also be solved in the mean field approximation including inertia // 1999, *Europhys. Lett.* 48, 498.
3. M. Copelli and K. Lindenberg The nonequilibrium statistical mechanics of open and closed systems // *Phys. Rev.*, 2001, E 63, 036605.
4. L.D. Landau and E.M. Lifschitz, *Mechanics* // 1961, Pergamon, Oxford.
5. K. Lindenberg, V. Seshadri, and B.J. West Brownian motion of harmonic systems with fluctuating parameters // *Phys. Rev.*, 1980, A 22, 2171.
6. R.M. Mazo, *J. Stat Phys.* On the brownian motion of a frequencymodulated oscillator // 1981, *Phys.* 24, 39.
7. B. Van der Pol and M.J.O. Strutt On the stability of Mathieu's equation // 1928, *Philos. Mag.* 5, 18.
8. A.H. Nayfeh and D.T. Mook, *Nonlinear Oscillations* // 1979, Wiley, New York.
9. C. Van den Broeck and I. Bena, in *Stochastic Processes in Physics, Chemistry and Biology*, edited by J.A. Freund and T. Poeschel // *Lecture Notes in Physics* Vol. 557, 2000, Springer-Verlag, Berlin, pp. 257–267.
10. E. Kh. Akhmedov, *Pramana* Parametric resonance in neutrino oscillations in matter // 2000, *J. Phys.* 54, 47.
11. M. Calvo Erratum: Colossal magneto-optical conductivity in doped manganites // 1999, *Phys. Rev. B* 60, 10 953.
12. I. Zlatev, G. Huey, and P.J. Steinhardt Parametric resonance in an expanding universe // 1998, *Phys. Rev. D* 57, 2152.
13. J.W. Miles, *J. Fluid Mech.* Parametrically excited solitary waves // 1984, *Mech.* 148, 451.
14. S. Riyopoulos, *J. Plasma Phys.* Anomalous ion heating via parametric resonance in rf-driven plasma sheaths // 1992, *Phys. Rev. Lett.* 68, 3303.
15. M. Calvo Erratum: Voltage-probe and imaginary-potential models for dephasing in a chaotic quantum dot // 1997, *Phys. Rev. B* 55, 10 571.

16. N.V. Fomin, O.L. Shalaev, and D.V. Shantsev, J. Appl Variational analysis for photonic molecules: application to photonic benzene waveguides // 1997, Phys. Rev E 65 036611 036611-1781, 8091.
17. V.M. Perez-Garcia et al., J. Opt. B Moment analysis of paraxial propagation in a nonlinear graded index fibre // Quantum Semiclass, 2000, Opt. 2, 353.
18. M. Schienbein and H. Gruler Enzyme kinetics, self-organized molecular machines, and parametric resonance // 1997, Phys. Rev. E 56, 7116.
19. D. Ballon et al. Quantitative assessment of bone marrow hematopoiesis using parametric magnetic resonance imaging // 1998, Magn. Reson. Med. 39, 789.
20. R. Kobes, L. Junxian, and S. Peles Analysis of a parametrically driven pendulum // 2001, Phys. Rev. E 63, 036219.
21. T. Strunz and F-J. Elmer Simulation of nanofriction through driven simplified models // 1998, Phys. Rev. E 58, 1601.
22. J. Tan and G. Gabrielse One Electron in a Cavity // 1991, Phys. Rev. Lett. 67, 3090.
23. N. Gronbech-Jensen, Y.S. Kivshar, and M.R. Samuelsen Phase-locking of long annular Josephson junctions coupled to an external rf magnetic field // 1993, Phys. Rev. B 47, 5013.
24. S. Watanabe et al. Step Dynamics // 1995, Phys. Rev. Lett. 74, 379.
25. P. Couillet and K. Emilsson Strong resonances of spatially distributed oscillators: A laboratory to study patterns and defects// 1992, Physica D 61, 119.
26. B. Denardo et al. Parametrically driven cubic Klein-Gordon equation is studied in the Fourier space // 1992, Phys. Rev. Lett. 68, 1730.
27. R. Kawai et al. (unpublished).
28. J. Farago and C. Van den Broeck Parametric phase transition in one dimension // 2001, Europhys. Lett. 54, 411.
29. E. Yorke Stochastic Processes in Physics // 1978, Am. J. Phys. 46, 285.
30. I. Bena and C. Van den Broeck, R. Kawai, Mauro Copelli, and Katja Lindenberg, Collective behavior of parametric oscillators // 2002, Phys. Rev. E 65, 036611.

31. T.E. Vadivasova, A.V. Slepnev, A. Zakharova, Control of inter-layer synchronization by multiplexing noise // 2020, Chaos 30, 091101.