

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬ-  
НОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НА-  
ЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИ-  
ВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

**Особенности перехода к хаосу и мультистабильность  
в связанных дискретных отображениях  
с различным уровнем диссипации в подсистемах**

**АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студента 4 курса 4041 группы

направления 09.03.02 Информационные системы и технологии

института физики

Юданова Даниила Витальевича

Научный руководитель  
доцент КФОС, к.ф.-м.н

\_\_\_\_\_ Савин Д. В.

Зав. кафедрой физики открытых систем,

д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_ Короновский А.А.

Саратов 2021 г.

## Введение

Поведение связанных колебательных систем, в частности, демонстрирующих хаотическую динамику, является на протяжении определённого времени популярным объектом для изучения. В частности, на базе связанных систем с хаотической динамикой можно, например, создавать системы связи и передачи информации [1, 2]. Знания о поведении таких систем, таким образом, могут быть полезны для разработки и модификации схем передачи информации при помощи хаотических сигналов, что продолжает оставаться актуальной задачей информационных технологий.

С другой стороны, системы с малым уровнем диссипации также представляют собой объект, открывающий широкие возможности для проведения исследований. Уменьшение уровня диссипации в нелинейной системе приводит, как правило, к увеличению количества сосуществующих аттракторов [3, 4]. В настоящей работе предполагается исследовать определённые аспекты поведения связанных отображений с хаотической динамикой при уменьшении уровня диссипации. В качестве объекта для изучения выбрано четырёхмерное отображение, представляющее собой два линейно связанных отображения Эно. Само двумерное отображение Эно представляет собой широко известную модельную систему, демонстрирующую переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода и допускающую изменение уровня диссипации [5]. Система линейно связанных отображений Эно в случае равенства параметров диссипации исследовалась ранее. В этом случае можно наблюдать, как при уменьшении параметра диссипации усложняется форма границы хаотической области на плоскости параметров [6]. С целью изучения более общего случая кажется интересным рассмотреть поведение несимметричных по параметру диссипации связанных систем — т.е. различающихся параметрами диссипации, — в том числе в случае, когда диссипация в одной из подсистем мала.

Таким образом, целью работы является численное исследование поведения системы двух взаимно связанных дискретных отображений, демонстрирующих каскад бифуркаций удвоения периода, при различных параметрах диссипации в подсистемах, и создание программ, моделирующих динамику таких систем.

В ходе выполнения работы решаются следующие задачи:

- создание комплекса программ, позволяющих визуализировать поведение четырёхмерных дискретных отображений;
- изучение динамики связанных отображений Эно в симметричном случае - при равенстве параметров диссипации в подсистемах, - и воспроизведение известных для такой системы результатов;
- изучение структуры плоскости параметров указанных отображений в окрестности границы области хаоса и её трансформаций при изменении параметров диссипации в каждой из подсистем по отдельности;
- проследить, как изменяется количество сосуществующих аттракторов при изменении уровня диссипации в подсистемах.

При численном исследовании для визуализации динамики и получения информации о структуре пространства параметров использовался метод построения карт динамических режимов [7], для получения информации о наличии и количестве сосуществующих аттракторов — метод построения бифуркационных деревьев для множества начальных условий [4]. Для компьютерного моделирования использовался язык программирования Pascal, для создания программ была использована среда разработки Lazarus.

Работа состоит из двух разделов. В первом разделе описывается исследуемая система и рассматривается, как изменяется структура её плоскости параметров при изменении параметров диссипации. Во втором разделе изучается изменение количества сосуществующих с основным «побочных» аттракторов при уменьшении уровня диссипации.

## 1 Исследуемая система и устройство её пространства параметров

В качестве системы для исследования в данной работе выбрано четырёхмерное отображение, представляющее собой два линейно связанных отображения Эно. Двумерное отображение Эно

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2 - by_n, y_{n+1} = x_n \quad (1)$$

где  $\lambda$  и  $b$  – параметры,  $x$  и  $y$  — переменные, было предложено в 1976 году как абстрактный пример динамической системы французским математиком и астрономом Мишелем Эно [8]. Сейчас известно, что оно может служить для описания ряда простых физических систем, таких как частица в вязкой среде под действием импульсных толчков [9, 5]. В отображении Эно возможен переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода, а уровень диссипации регулируется значением параметра  $b$ :  $b=0$  соответствует бесконечно сильной диссипации, а  $b=1$  – отсутствию диссипации, т. е. система в этом случае является консервативной [5].

Исследуемая нами система имеет вид

$$x_{n+1} = \lambda_1 - x_n^2 - b_1 y_n + \varepsilon(x_n - u_n), y_{n+1} = x_n \quad (2)$$

$$u_{n+1} = \lambda_2 - u_n^2 - b_2 v_n + \varepsilon(u_n - x_n), v_{n+1} = u_n$$

Уравнения данной системы содержат параметры  $\lambda_1, \lambda_2, b_1, b_2, \varepsilon$ . Параметр связи  $\varepsilon$  в рамках нашей работы будет фиксирован и равен 0,4. Четыре других являются управляющими параметрами:  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  управляют удвоениями периода в подсистемах, параметры  $b_1$  и  $b_2$  определяют диссипацию. В случае, если параметры диссипации в обеих подсистемах одинаковы и равны  $b$ , для такой системы определитель матрицы Якоби (якобиан) равен  $b^2$  [6].

При различных сочетаниях значений параметров динамика отображения может быть различной: периодической, квазипериодической или хаотической. В случае равенства параметров диссипации в подсистемах (будем в дальнейшем называть такую ситуацию случаем симметричной диссипации) отображение (2) исследовалось ранее [6]. При увеличении  $b$  в этом случае происходит усложнение структуры плоскости параметров в

области границы хаоса — линии удвоения периода, которые при малых  $b$  были непрерывными для всех циклов из каскада удвоения периода, теперь начиная с определённого периода, разделяются на несколько фрагментов [6].

Рассмотрим теперь структуры пространства параметров в случае различных значений параметров диссипации  $b$  в подсистемах (несимметричный случай). Для построения карты динамических режимов нам нужно будет выбрать какие-либо значения параметров  $\lambda_1, \lambda_2$ , зафиксировав остальные параметры системы, и определить период цикла при этих значениях параметров. На плоскости параметров соответствующую этим значениям параметров точку будем отмечать некоторым цветом. В итоге плоскость должна быть окрашена в разные цвета в соответствии с периодом движения на аттракторе. Области существования непериодических режимов (это может быть хаос либо квазипериодический режим) нам также будет необходимо окрасить в некоторый цвет. Шаг по параметру при сканировании плоскости мы будем рассчитывать автоматически, так, чтобы сдвиг на один шаг соответствовал сдвигу на один пиксель. Будем использовать следующее кодирование цветов: область существования устойчивой неподвижной точки будем обозначать красным цветом, фиолетовым цветом - устойчивый цикл периода 2, синим цветом - цикл периода 4, жёлтым цветом - цикл периода 8, зелёным цветом - цикл периода 16, чёрным цветом — непериодический режим, участки, где переменные, убегают на бесконечность — голубым цветом. Таким образом с помощью карт динамических режимов мы наблюдаем за эволюцией периодов аттракторов при изменении параметров.

На Рисунке 1 представлены карты динамических режимов для такой системы. Параметр  $\varepsilon$ , как и ранее, зафиксирован равным 0.4, и параметр  $b_1$  также фиксирован и равен 0.1, а параметр  $b_2$  мы изменяем в интервале от 0.1 до 1 — последняя ситуация соответствует консервативности второй подсистемы. Карты построены на плоскости  $(\lambda_1, \lambda_2)$ . Отметим, что карты строились так называемым «методом наследования» [7]: при этом при

сканировании плоскости параметров сохраняются в качестве начальных условий в следующей точке по параметру координаты аттрактора из предыдущей точки. При построении плоскость сканировалась в направлении из левого нижнего угла в правый нижний, следующий ряд точек - сверху над предыдущим, так же от левого угла до правого, и т. п.

На Рисунке 1 в левом столбце приведены карты динамических режимов, а в правом - их увеличенные фрагменты в области границы хаоса.

При малых значениях  $b$  линии удвоения периода непрерывны, и при увеличении параметра  $\lambda_2$  при любом значении  $\lambda_1$  наблюдаются последовательные бифуркации удвоения периода и переход к хаосу. На картах, представленных на Рисунке 1, можно видеть, что в несимметричном случае усложнения структуры плоскости параметров при уменьшении диссипации в одной из подсистем не наблюдается. При этом можно отметить, что с увеличением параметра диссипации второй подсистемы  $b_2$  в окрестности границы области хаоса, возникающего при увеличении параметра нелинейности второй подсистемы  $\lambda_2$ , уменьшается расстояние между линиями бифуркации удвоения периода. Также уменьшается и размер области хаоса.

## **2 Мультистабильность при различных уровнях диссипации**

Известно, что мультистабильное поведение — сосуществование при одних и тех же значениях параметров различных устойчивых режимов — является характерной особенностью динамики систем с малым уровнем диссипации [3, 4]. В этом случае выбор различных начальных условий может привести к попаданию на различные аттракторы в процессе эволюции системы.

Попробуем определить, как влияет на количество сосуществующих аттракторов и размер их областей существования в пространстве параметров изменение уровня диссипации в связанных отображениях (2).

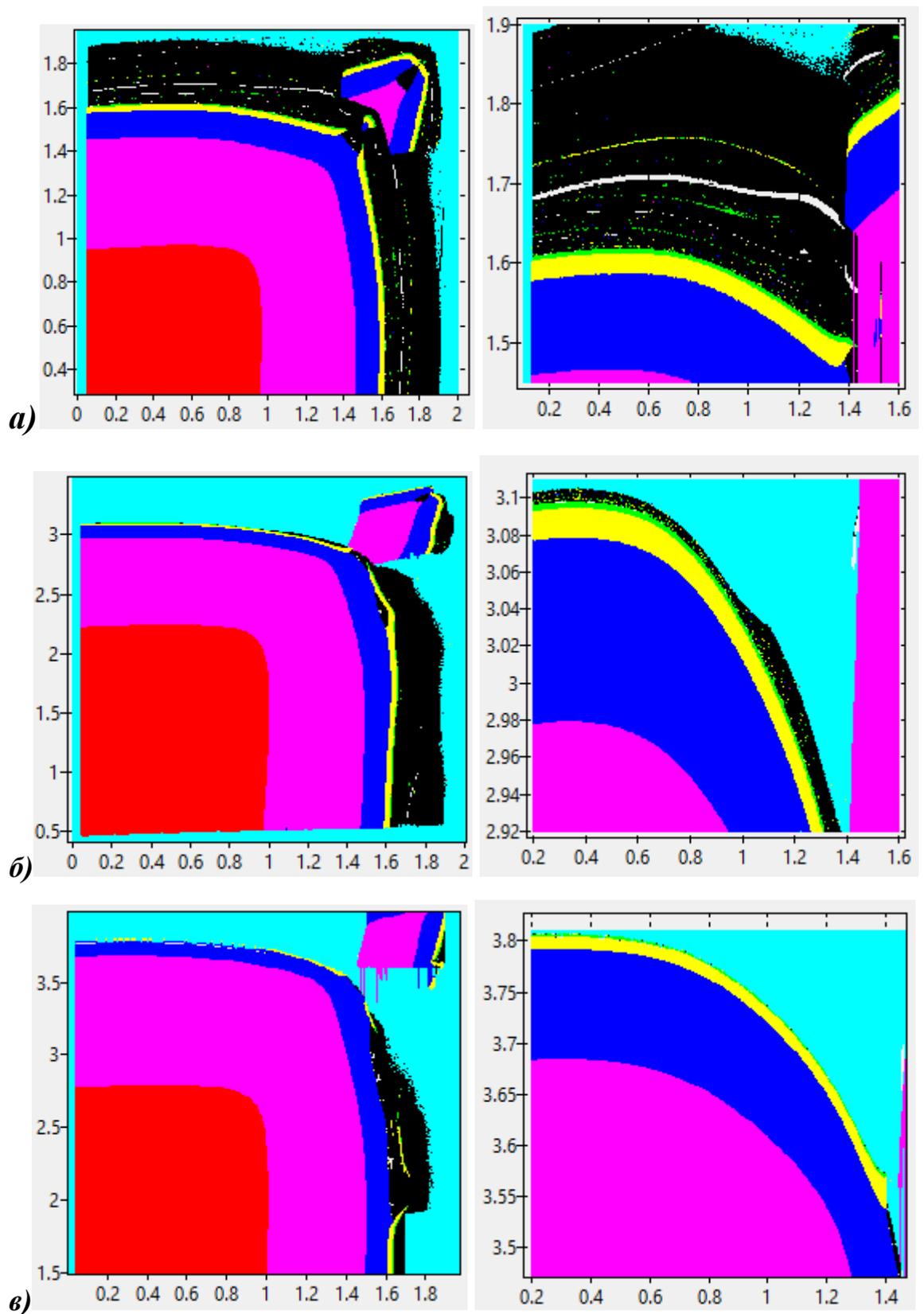


Рисунок 1 - Карта динамических режимов для двух линейно связанных отображений Эно в несимметричном по диссипации случае. На координатной плоскости по вертикали откладывается значение параметра  $\lambda_2$ , а по горизонтали  $\lambda_1$ . Значения параметров: а)  $b_2=0.1$ , б)  $b_2=0.7$ , в)  $b_2=0.9$ . Параметр  $b_1=0.1$ .

Хорошим методом визуализации сосуществующих аттракторов в зависимости от параметров является построение бифуркационных деревьев для набора (множества) начальных условий [4] - это позволит одновременно наблюдать за всеми аттракторами, к которым система будет приходить при старте из различных начальных условий.

В ходе выполнения работы была создана программа, позволяющая строить для системы (2) такие бифуркационные деревья в зависимости от параметра нелинейности  $\lambda_1$  или  $\lambda_2$  при разных значениях параметров диссипации. Полное фазовое пространство отображения (2) четырёхмерное, и его сложно покрыть сеткой начальных условий с достаточной плотностью — это требует задания большого числа начальных условий и, соответственно, существенно увеличивает время расчёта. Поэтому удобнее выбирать начальные условия для каких-либо двух переменных фиксированными, а для двух других — изменять. Перебор различных вариантов показал, что оптимальные результаты получаются, если начальные условия для переменных  $x$  и  $y$  зафиксировать равными 1, а начальные условия для переменных  $u$  и  $v$  распределить по  $u$  в диапазоне от -2 до 2 и по  $v$  в диапазоне от -2 до 2 с шагом 0.2.

## **2.1 Сосуществующие аттракторы в случае несимметричной диссипации**

Рассмотрим сначала случай, когда симметрия по параметру нелинейности  $\lambda$  сохранена, но подсистемы несимметричны по диссипации.

На Рисунке 2 приведены бифуркационные деревья для множества начальных условий в этом случае: параметры  $\lambda$  одинаковые, параметр диссипации  $b_1$  мы зафиксировали равным 0.1, а параметр диссипации  $b_2$  мы изменяли в пределах 0.1 до 1.

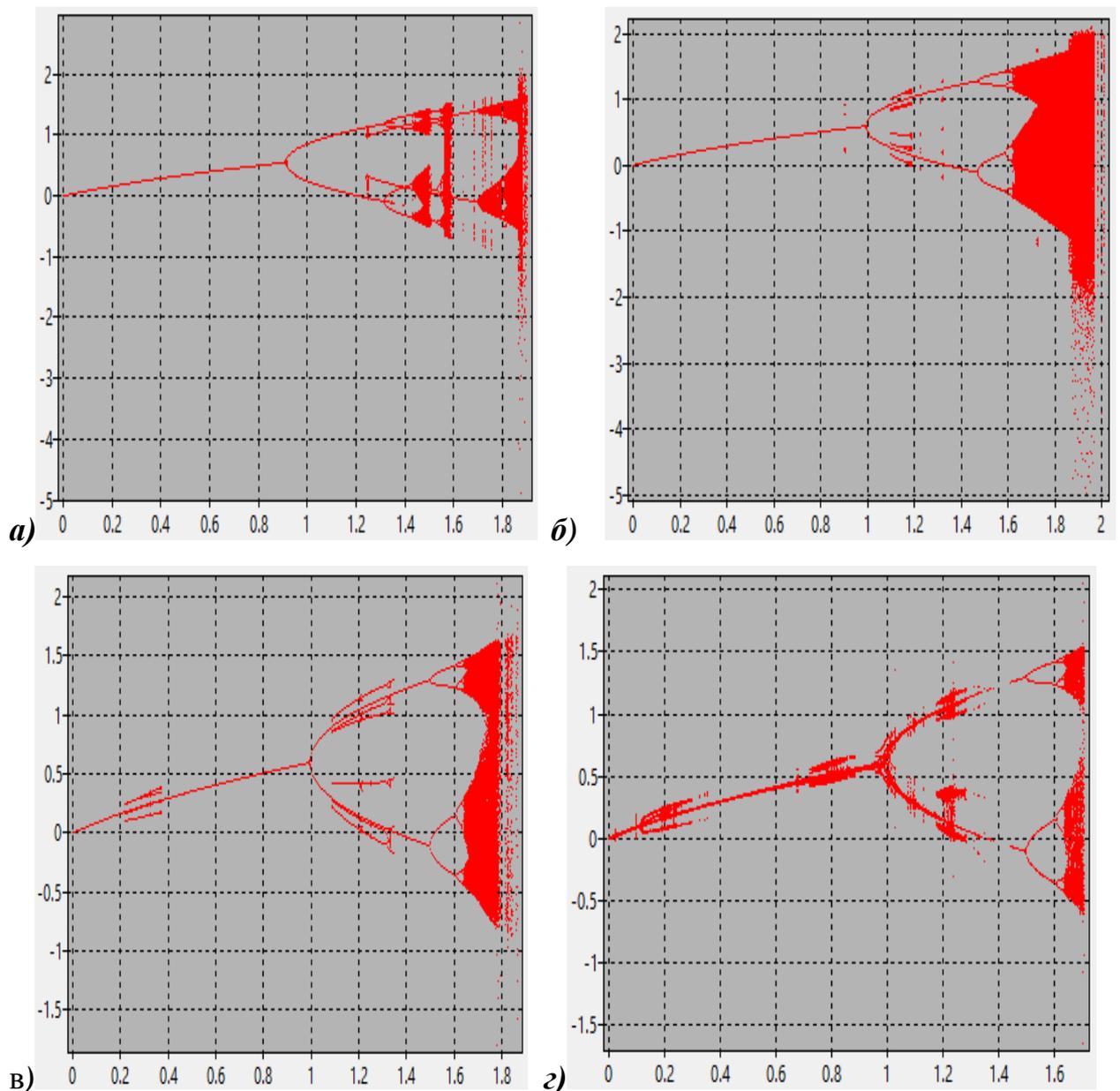


Рисунок 2 – Бифуркационные деревья для множества начальных условий двух линейно связанных отображений Эно в случае симметрии по параметру  $\lambda$ , но несимметричном по диссипации. На координатной плоскости по вертикали откладывается значение переменной  $u$ , а по горизонтали  $\lambda$ . Значения параметров: а)  $b_2=0.1$ , б)  $b_2=0.5$ , в)  $b_2=0.9$ , г)  $b_2=1$ .

При малых значениях параметра  $b$  (сильная диссипация) сосуществующих аттракторов немного, но их интервалы существования по параметру  $\lambda$  довольно велики. С увеличением  $b$  (уменьшением диссипации) параметра диссипации можно наблюдать, что количество побочных аттракторов становится несколько больше, но их интервал существования по параметру  $\lambda$  уменьшается.

Перейдём теперь к полностью несимметричному случаю. Рассмотрим бифуркационные деревья для случаев, когда  $\lambda_1$  отличен от  $\lambda_2$ , а  $b_1$  – от  $b_2$ .

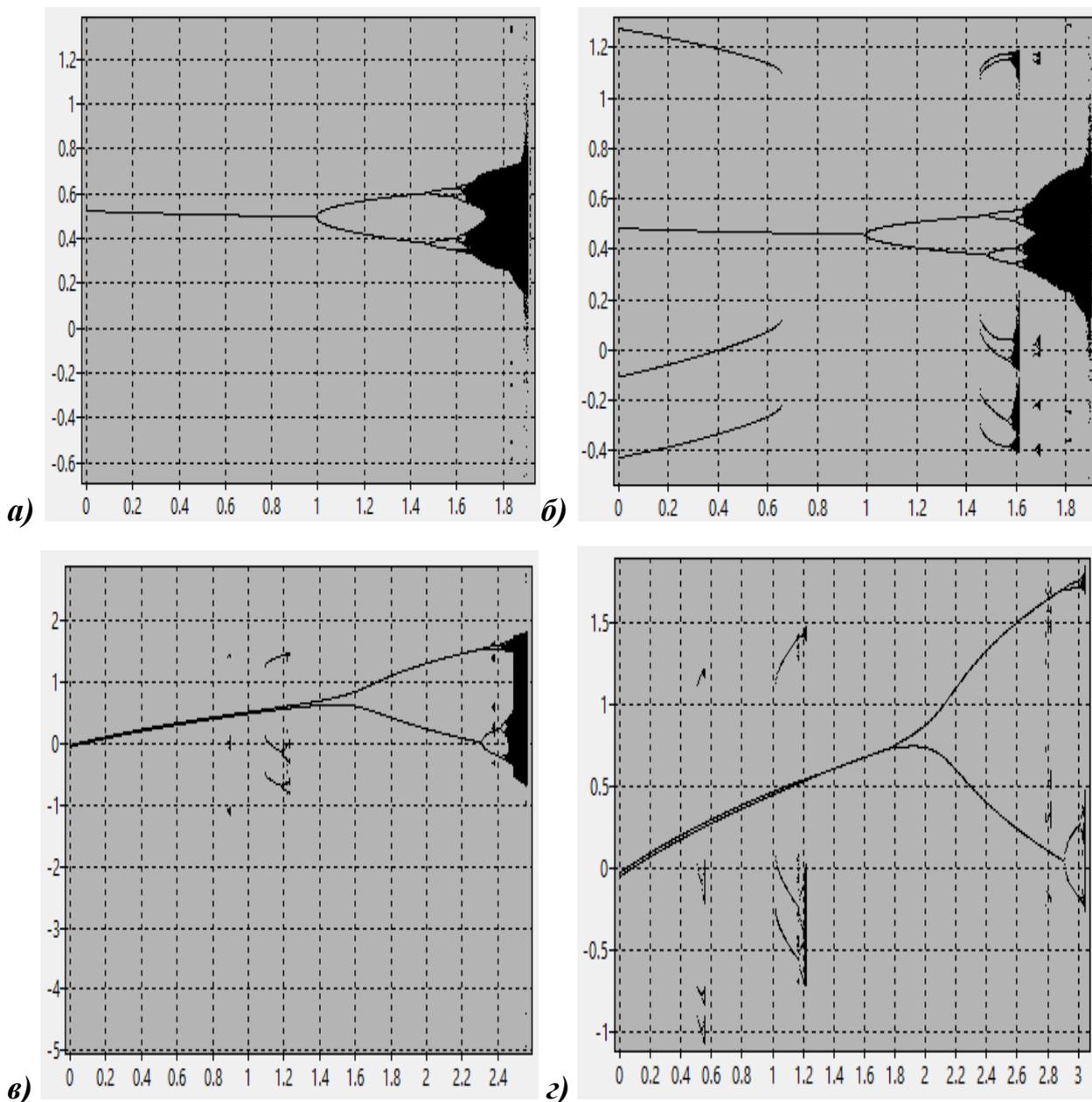


Рисунок 3 – Бифуркационные деревья для множества начальных условий двух линейно связанных отображений Эно в несимметричных случаях. Для *а)* и *б)* на координатной плоскости по вертикали откладывается значение переменной  $u$ , а по горизонтали – параметра  $\lambda_2$ , а для *в)* и *г)* по вертикали откладывается значение переменной  $u$ , а по горизонтали – параметра  $\lambda_1$ . Значения параметров: *а)*  $b_2=0.5$ , *б)*  $b_2=0.7$ , *в)*  $b_2=0.5$ , *г)*  $b_2=0.7$

На Рисунке 3 приведены бифуркационные деревья для множества начальных условий, построенные для несимметричных систем. Под буквами

а) и б) движение по карте динамических режимов производится «по вертикали»: параметр  $\lambda_1$  мы фиксировали равным 1, а параметр  $\lambda_2$  изменяли в интервале от 0 до 4. Параметр диссипации  $b_1$  мы также, как и раньше, зафиксировали равным 0.1, а параметр  $b_2$  изменяли в пределах 0.1 до 1. Под буквами в) и г) приведены аналогичные деревья для движения на карте динамических режимов «по горизонтали»: параметр  $\lambda_2$  в этом случае мы фиксировали равным 1, а параметр  $\lambda_1$  изменяли в интервале от 0 до 4.

В данном случае, на Рисунках 3, мы так же, как и ранее, можем наблюдать сосуществование одновременно с основным «побочных» аттракторов, но в целом их, как и раньше, довольно небольшое количество, и интервал их существования по параметру также невелик.

### **3 Заключение**

В ходе выполнения выпускной квалификационной работы была написана программа, позволяющая визуализировать поведение связанных отображений Эно с различным уровнем диссипации в подсистемах. Для этого четырёхмерного отображения были построены карты динамических режимов в несимметричном случае, при равенстве параметров диссипации в подсистемах. Изменяя параметры диссипации, мы пронаблюдали за структурой плоскости параметров в окрестности границы области хаоса. В случае несимметричной диссипации, качественных изменений структуры плоскости параметров в этой области при уменьшении диссипации в одной из подсистем не происходит.

Также были построены бифуркационные деревья для множества начальных условий с целью изучения мультистабильности. Проанализировав полученные бифуркационные деревья несимметричном случае, можно заметить, что при уменьшении диссипации появляются «побочные» аттракторы, но их немного, и интервалы их существования по параметру нелинейности небольшие. Такая ситуация наблюдается в разных частях плоскости параметров.

## Список литературы

1. Короновский, А.А. О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации. / А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов. // Успехи физических наук — 2009 — Т. 179, №12 — С. 1281—1310.
2. Дмитриев, А.С. Динамический хаос. Новые носители информации для систем связи. / А.С. Дмитриев, А.И. Панас — М.: Физматлит, 2002. — 252 с.
3. Feudel, U. Complex dynamics in multistable systems. / U. Feudel. // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2008 — V. 18, № 6 — P. 1607–1626.
4. Feudel, U. Map with more than 100 coexisting low-period periodic attractors. / U. Feudel, C. Grebogi, B.R. Hunt, J.A. Yorke // Physical Review E. — 1996 — V. 54, № 1 — P. 71–81.
5. Кузнецов, С.П. Динамический хаос: курс лекций. / С.П. Кузнецов — М.: Физматлит, 2001. — 296 с.
6. Savin, D.V. Different types of critical behavior in conservatively coupled Hénon maps. / D.V. Savin, A.P. Kuznetsov, A.V. Savin, and U. Feudel. // Physical Review E. — 2015 — V. 91 — P. 062905.
7. Кузнецов, А.П. Введение в физику нелинейных отображений. / А.П. Кузнецов, А.В. Савин, Л.В. Тюрюкина — Саратов: Научная книга, 2010. — 134 с.
8. Henon, M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. / M. Henon. // Communications in Mathematical Physics. — 1976 — V. 50, № 1 — P. 69–77.
9. Heagy, J.F. A physical interpretation of the Hénon map. / J.F. Heagy. // Physica D. — 1992. — V. 57, Iss. 3–4. — P. 436—446.
10. Yuan, J.-M. Instability and irregular behavior of coupled logistic equations / J.-M. Yuan, M. Tung, D.H. Feng, and L.M. Narducci // Physical Review A. — 1983 — Vol. 28 — P. 1662 — 1666.

11. Satoh, K. Self-Similar Structures in the Phase Diagram of a Coupled-Logistic Map / K. Satoh, and T. Aihara // Journal of Physical Society of Japan. – 1990 – Vol. 59 – P. 1184 — 1198.
12. Kuznetsov, A.P. Dynamics of coupled non-identical systems with period-doubling cascade / A.P. Kuznetsov, I.R. Sataev, and J.V. Sedova // Regular and Chaotic Dynamics. – 2008 – Vol. 13 – P. 9 — 18.