

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

**Численное исследование различных типов хаотической синхронизации**

---

**в двух однонаправленно связанных динамических системах**

---

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента (ки) 4 курса 431 группы

направления 09.03.02 Информационные системы и технологии

института физики

Червяковой Анастасии Михайловны

---

Научный руководитель  
профессор кафедры ФОС, д.ф.-м.н.,  
доцент

\_\_\_\_\_

подпись, дата

О.И. Москаленко

Зав. кафедрой физики открытых систем  
д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_

подпись, дата

А.А. Короновский

Саратов 2021

## Введение

В последние годы возрастает интерес к математическим методам, которые обеспечивают возможность проведения качественного анализа исследуемой динамической системы, с одной стороны, а с другой – эффективного численного моделирования<sup>1</sup>. Этот интерес в основном вызван проблемами моделирования сложных систем, требующих аккуратного и тщательного численного исследования с учётом известных или выявленных (прежде всего качественных) особенностей системы с применением современных вычислительных средств, в частности параллельных и распределенных вычислительных систем (кластерные системы, GRID-системы и т.д.). Поэтому поиск математических методов наиболее эффективными и подходящими для реализации средствами современной вычислительной техники является чрезвычайно актуальной задачей.

Не менее важным является изучение синхронизации хаотических колебаний связанных динамических систем, которая представляет собой одно из наиболее значимых нелинейных явлений, активно исследуемых в последнее время<sup>2</sup>. Большое число исследователей, работающих в области радиофизики, электроники сверхвысоких частот, химии, биологии, нейрофизиологии на протяжении многих десятилетий заинтересованы в его рассмотрении, что обусловлено не только большим фундаментальным значением изучения этого явления, но и широким кругом практических приложений, где могут найти применение различные типы сложной динамики и хаотической синхронизации, например, в задачах построения систем связи на основе хаотической синхронизации, при анализе взаимодействия биологических, физиологических и химических систем, в задачах управления хаосом при изучении процессов в радиоэлектронных устройствах радио- и микроволнового диапазонов и т.д.

---

<sup>1</sup> Белоглазкина М.В., Егоров Е.Н., Левин Ю.И. Численное решение уравнений. Учебно-методическое пособие, Саратов (2008) 27 с.

<sup>2</sup> Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. New York: Cambridge University Press (2001) 411 p.

Целью настоящей бакалаврской работы является детальное изучение различных типов хаотической синхронизации при помощи численного моделирования двух однонаправленно связанных систем Рёсслера. В работе будут рассмотрены такие типы хаотической синхронизации как обобщенная синхронизация и ее частные проявления – режимы полной синхронизации и синхронизации с запаздыванием. Подробно будет изучен вопрос о переходе от одного типа синхронного поведения к другому при изменении параметра связи между взаимодействующими системами.

Бакалаврская работа содержит 24 страницы, приведённый список литературы включает 15 наименований.

### Основное содержание работы

Работа состоит из введения, трех глав и заключения.

В первой главе приводится подробное описание наиболее распространенных типов хаотической синхронизации, а именно режимов полной синхронизации<sup>3</sup>, синхронизации с запаздыванием<sup>4</sup>, фазовой<sup>5</sup> и обобщённой<sup>6</sup> синхронизации.

Во второй главе рассматриваются объект и методы исследования. В качестве объекта исследования выбраны два однонаправленно связанных осциллятора Рёсслера<sup>7</sup>:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \omega_1 y_1 - z_1, & \dot{x}_2 &= \omega_2 y_2 - z_2 + \varepsilon(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_1 &= \omega_1 x_1 + a y_1, & \dot{y}_2 &= \omega_2 x_2 + a y_2, \\ \dot{z}_1 &= p + z_1(x_1 - c), & \dot{z}_2 &= p + z_2(x_2 - c), \end{aligned} \quad (1)$$

<sup>3</sup> Pecora L.M., Carroll T.L. Synchronization in chaotic systems, Phys. Rev. Lett. 64, 821-824 (1990).

<sup>4</sup> Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. From Phase to Lag Synchronization in Coupled Chaotic Oscillators, Phys. Rev. Lett. 78, 4193 (1997).

<sup>5</sup> Анищенко В.С., Постнов Д.Э. Эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний. Синхронизация странных аттракторов, Письма в ЖТФ, 14 (6), 569-573 (1988).

<sup>6</sup> Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems, Phys. Rev. E, 51 (2), 980-994 (1995).

<sup>7</sup> Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Generalized synchronization onset, Europhysics Letters. 72, 6, 901-907(2005).

где параметр  $\varepsilon$  характеризует величину связи между осцилляторами,  $a = 0.15$ ,  $p = 0.2$ ,  $c = 10.0$  – управляющие параметры. Параметр  $\omega_2$ , характеризующий собственную частоту колебаний ведомой системы, фиксировался  $\omega_2 = 0.95$ , а аналогичный параметр ведущей системы принимал значение в диапазоне  $\omega_1 = [0.85; 1.05]$ .

Выбор систем Рёсслера связан с тем, что они достаточно хорошо исследованы, в том числе, и с точки зрения хаотической синхронизации. Кроме того, с помощью этой системы возможно построение радиотехнического генератора, динамика которого будет описываться уравнениями системы Рёсслера.

Для реализации численного моделирования была использована программа Lazarus. Для построения фазовых портретов была использована программа gnuplot – свободная программа для создания двух-и трёхмерных графиков. Численное моделирование систем Рёсслера осуществлялось при помощи метода Эйлера.

В третьей главе приводятся результаты численного исследования динамики однонаправленно связанных систем Рёсслера при фиксированных значениях управляющих параметров и изменении параметра связи. Параметр  $\omega_1$  ведущей системы выбран равным 0.93. Исследование проводилось при помощи непосредственного сравнения состояний ведущей и ведомой систем (для диагностики наличия полной синхронизации), расчета функции подобия (для определения порога режима синхронизации с запаздыванием) и метода вспомогательной системы (для детектирования наличия обобщенной синхронизации).

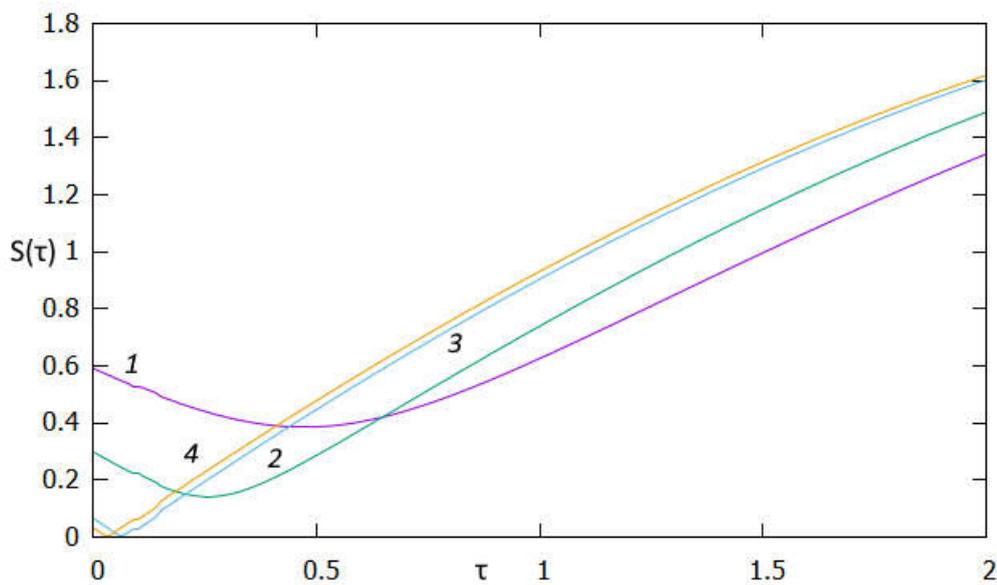
Показано, что при увеличении силы связи  $\varepsilon$  между системами однонаправленно связанные осцилляторы Рёсслера демонстрируют переход от асинхронного состояния к режиму обобщенной синхронизации, а затем к режимам синхронизации с запаздыванием и полной синхронизации. Полученные результаты проиллюстрированы плоскостями состояний

взаимодействующих систем, в том числе сдвинутыми на время запаздывания  $\tau$ , при различных значениях параметра связи.

При построении плоскостей  $(x_1(t), x_2(t+\tau))$  время запаздывания  $\tau$  между системами определялось по минимуму функции подобия  $\sigma = \min_{\tau} S(\tau)$ , где

$$S^2(\tau) = \frac{\langle [x_2(t+\tau) - x_1(t)]^2 \rangle}{[\langle x_1^2(t) \rangle \langle x_2^2(t) \rangle]^{1/2}}, \quad (2)$$

$x_1$  и  $x_2$  – координаты (например,  $x$ ) взаимодействующих систем,  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение по времени.



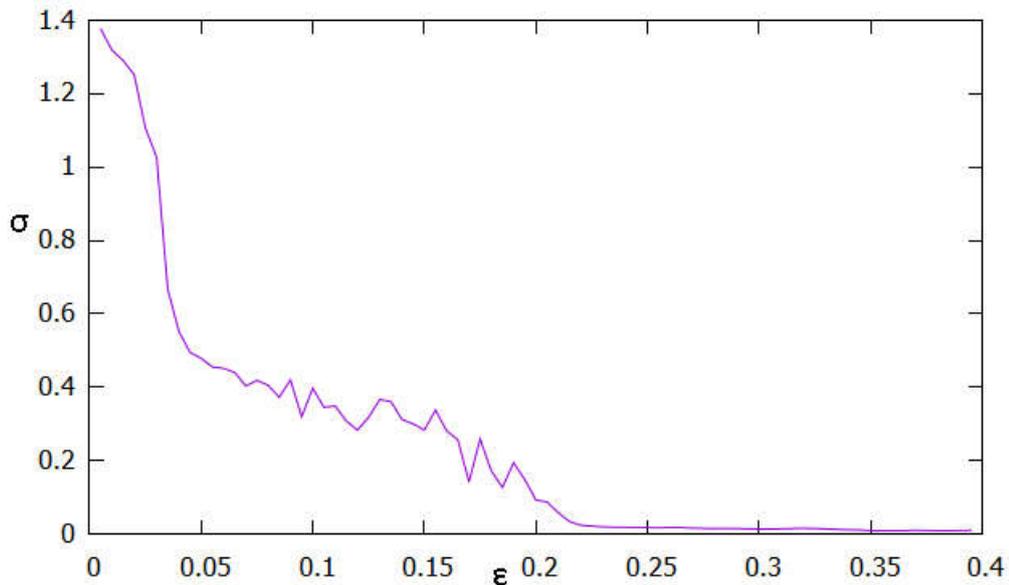
**Рисунок 1** – Функции подобия  $S(\tau)$ , полученные для двух однонаправленно связанных систем Ресслера при  $\omega_1 = 0.93$  и различных значениях параметра связи: кривая 1 –  $\varepsilon=0.1$ , кривая 2 –  $\varepsilon=0.17$ , кривая 3 –  $\varepsilon=0.8$ , кривая 4 –  $\varepsilon=2$

На рисунке 1 приведены зависимости  $S(\tau)$  при нескольких значениях параметра связи  $\varepsilon$ . Видно, что при увеличении параметра связи происходят сильные изменения в поведении функции подобия. При относительно малых значениях параметра связи (кривые 1,2) зависимость  $S(\tau)$  напоминает параболу, а ее минимум соответствует положительным значениям  $\sigma$ . По мере увеличения параметра связи величина  $\sigma$  уменьшается, а в режиме синхронизации с запаздыванием (кривая 3) приобретает значение, близкое к

0. При этом, минимум функции подобия становится острым, а значение  $\tau$ , соответствующего этому минимуму, оказывается положительным.

В режиме, близком к полной синхронизации, (кривая 4) минимум функции подобия находится практически в нуле, что свидетельствует о практически полной идентичности состояний взаимодействующих систем.

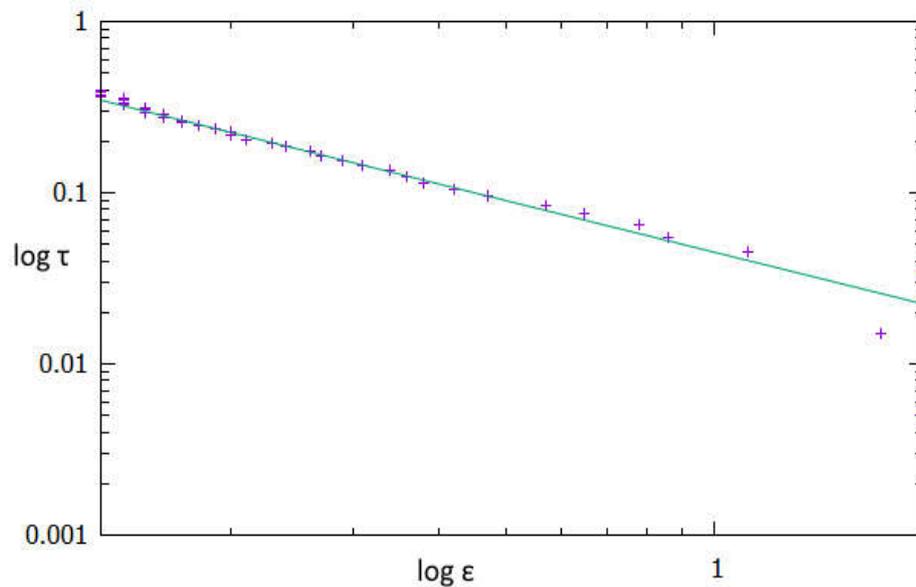
На рисунке 2 приведена зависимость минимума функции подобия от параметра связи. Видно, что она обращается в 0 при  $\varepsilon > 0.22$ , что свидетельствует о наличии синхронизации с запаздыванием в этом диапазоне.



**Рисунок 2** – Зависимость минимума функции подобия от параметра связи для двух однонаправленно связанных систем Ресслера

На рисунке 3 представлена зависимость времени запаздывания, соответствующего минимуму функции подобия, от параметра связи. Видно, что при увеличении параметра связи время запаздывания между взаимодействующими системами уменьшается, а режим синхронизации с запаздыванием стремится к полной синхронизации. Указанная зависимость хорошо аппроксимируется степенным законом  $\varepsilon = 0.045\tau^{-1}$ , что также

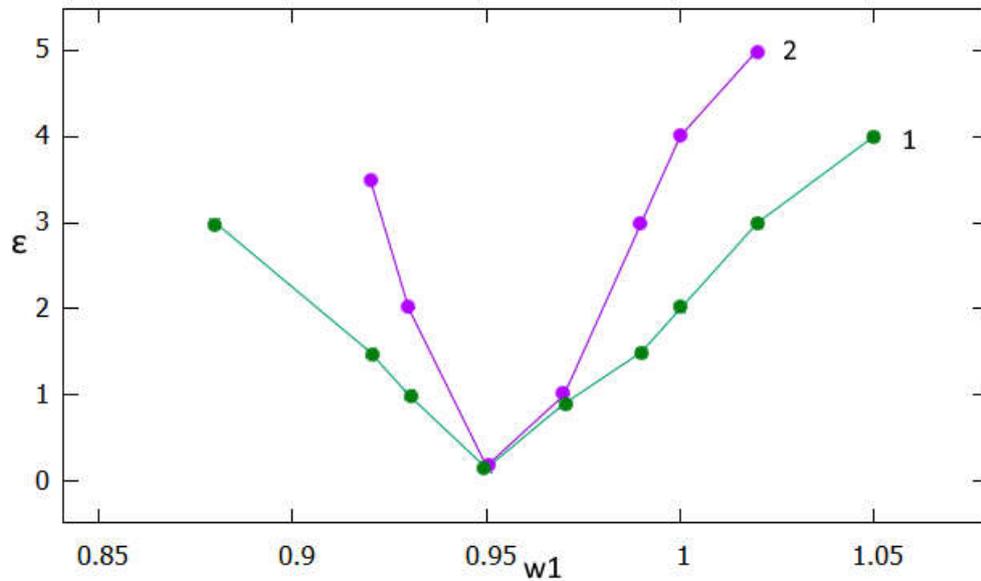
находится в хорошем соответствии с результатами работы<sup>8</sup>, где степенной закон с показателем «-1» был получен аналитически.



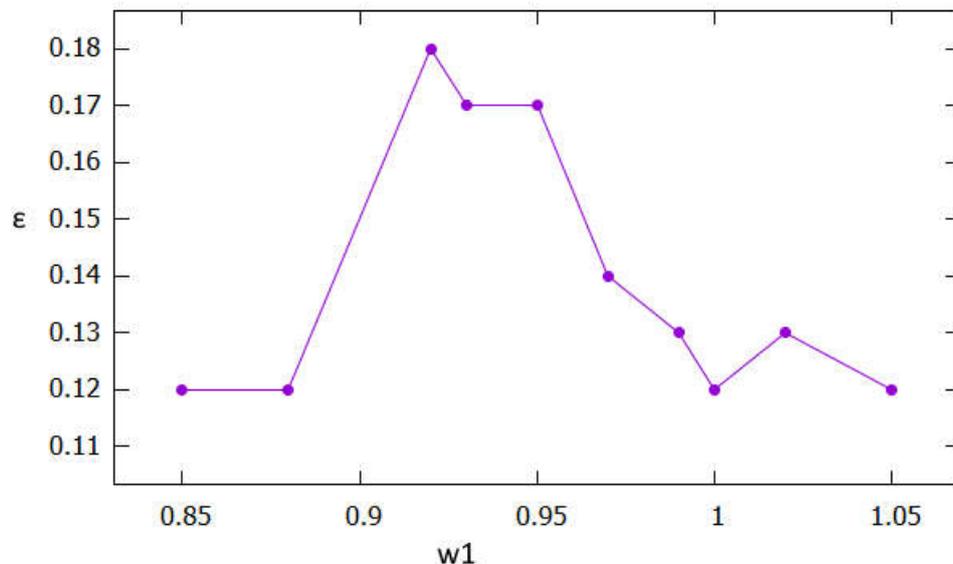
**Рисунок 3** – Зависимость временного сдвига между взаимодействующими однонаправленно связанными системами Ресслера от параметра связи и ее аппроксимация степенным законом  $\varepsilon = 0.045\tau^{-1}$

Выбирая  $\omega_1$  в диапазоне  $[0.85;1.05]$  и варьируя  $\varepsilon$ , были построены границы режимов обобщенной синхронизации, синхронизации с запаздыванием и полной синхронизации на плоскости параметров  $(\omega_1, \varepsilon)$  (рисунки 4-5). Показано, что чем больше расстройка управляющих параметров взаимодействующих систем, тем выше границы режимов полной синхронизации и синхронизации с запаздыванием. Для обобщенной синхронизации, напротив, наблюдается противоположное поведение: при относительно слабых значениях расстройки параметров  $\omega_{1,2}$  режим обобщенной синхронизации возникает значительно позже, чем при большой расстройке. При этом, в области относительно больших расстройек граница обобщенной синхронизации практически не меняется.

<sup>8</sup> Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е. Новый тип универсальности при хаотической синхронизации динамических систем, Письма в ЖЭТФ, 80 (1), 25-28 (2004).



**Рисунок 4** – Границы режима синхронизации с запаздыванием (кривая 1) и режима, близкого к полной синхронизации (кривая 2)



**Рисунок 5** – Граница режима обобщенной синхронизации

В то же самое время, независимо от величины расстройки между взаимодействующими системами режим полной синхронизации всегда наступает позже режима синхронизации с запаздыванием, который в свою очередь, всегда наступает после режима обобщенной синхронизации. Исключение составляет значения параметра  $\omega_1 = 0.95$ , когда

взаимодействующие системы полностью идентичны. В данном случае границы всех режимов практически в точности совпадают друг с другом.

### **Заключение**

В данной бакалаврской работе были изучены различные типы хаотической синхронизации (полная синхронизация, синхронизация с запаздыванием, обобщенная синхронизация) с помощью численного моделирования двух однонаправленно связанных систем Рёсслера методом Эйлера. Рассмотрен переход системы из асинхронного состояния к режиму обобщенной синхронизации, а затем к режимам синхронизации с запаздыванием и полной синхронизации. Диагностика полной синхронизации осуществлялась при помощи непосредственного сравнения состояний взаимодействующих систем, режим синхронизации с запаздыванием диагностировался при помощи расчета функции подобия, детектирование обобщенной синхронизации осуществлялось при помощи метода вспомогательной системы. Построены границы синхронных режимов на плоскости параметров (частота ведущей системы, параметр связи) и объяснен характер их поведения. Результаты получены при помощи численного моделирования с использованием среды разработки Lazarus и визуализированы с помощью программы gnuplot.